ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
L 1970 5

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

О геометрии изотропных поверхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 10/I 1970)

1. В V_n с неопределенной метрикой $ds^2 = a_{\alpha\beta}(y)\,dy^\alpha dy^\beta$* уравнения

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^m); \text{ ранг } (y_i^\alpha) = m; \; y_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \tag{1.1}$$

задают поверхность X_m с метрическим тензором

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta. \tag{1.2}$$

Обозначим через $r =$ ранг (g_{ij}). Если $r = m$, то в X_m индуцируется риманово перенесение и X_n является V_m.

Определение: X_m называется изотропной поверхностью, если $r < m$ и обозначается через V_m^p, где $p = m - r$.

В общем случае уравнения

$$a_{\alpha\beta} y_i^\beta n^\alpha = 0 \tag{1.3}$$

имеют $(n-m)$ линейно-независимые решения, т. е. существуют $(n-m)$ вектора — нормальные к X_m.

Если $r = m$, то существуют $(n-m)$ взаимно-ортогональные неизотропные вектора, нормальные к V_m. Если же $r < m$, то существуют p линейно-независимые изотропные вектора $\overset{a}{\mu}{}^\alpha$ и $(n - m - p)$ другие неизотропные вектора $\underset{q}{n}{}^\alpha$, ортогональные к первым ([1], стр. 177).

$$\text{а) } a_{\alpha\beta}\overset{a}{\mu}{}^\alpha y_i^\beta = 0; \quad \text{б) } a_{\alpha\beta}\overset{a}{\mu}{}^\alpha \overset{b}{\mu}{}^\beta = 0;$$

$$\text{в) } a_{\alpha\beta}\underset{p}{n}{}^\alpha \overset{a}{\mu}{}^\beta = 0; \quad \text{г) } a_{\alpha\beta}\underset{p}{n}{}^\alpha \underset{q}{n}{}^\beta \begin{cases} e_p; & p = q \\ 0; & p \neq q, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $e_p = \pm 1$. Имеет место следующая

* Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \nu = 1, 2, \cdots, n$;
$i, j, k, l, h \cdots = 1, 2, \cdots, m$;
$a, b, c, d \cdots 1, 2, \cdots, p$; $p, q, r, s \cdots = p+1, p+2, \cdots$
$e, f, g = 1, 2, \cdots, (n-m)$.

Теорема 1. 1. *Для того, чтобы X_m было V^p_m, необходимо и достаточно, чтобы из $(n-m)$ векторов, ортогональных к X_m, P вектора удовлетворяли условиям* (22.6а), (22.6б) *и* (22.6в).

Если $r < m$, то существуют линейно-независимые вектора $\overset{a}{\mu}_i$, удовлетворяющие условию.

$$\overset{a}{\mu}{}^i g_{ij} = 0, \tag{1.5}$$

которые определяют в V_n p—линейно-независимые изотропные вектора — нормальные к V^p_m и удовлетворяющие условиям (1.4б) и (1.4в)

$$\overset{a}{\mu}{}^\alpha = \overset{a}{\mu}{}^i y^\alpha_i. \tag{1.6}$$

Это означает, что p нормалей к V^p_m лежат на касательной гиперплоскости E_m к V^p_m. Следовательно, оснащение V^p_m с помощью векторов $\overset{a}{\mu}{}^\alpha$ и $\underset{p}{n}{}^\alpha$ невозможно.

Для оснащения V^p_m используем векторы $\underset{p}{n}{}^\alpha$ и $\underset{a}{n}{}^\alpha$. Последние определяются следующим образом: возьмем векторы $\underset{a}{\lambda}_i$, удовлетворяющие условиям

$$\overset{r}{\mu}{}^i \underset{a}{\lambda}_i = \delta^r_a, \tag{1.7}$$

а в остальном они произвольны. Из уравнений

$$\text{а) } a_{\alpha\beta} y^\alpha_i \underset{a}{n}{}^\beta = \underset{a}{\lambda}_i, \quad \text{б) } a_{\alpha\beta} \underset{p}{n}{}^\alpha \underset{a}{n}{}^\beta = 0,$$

$$a_{\alpha\beta} \underset{a}{n}{}^\alpha \underset{b}{n}{}^\beta = \begin{cases} l_a; & a = b \\ 0; & a \neq b \end{cases} \tag{1.8}$$

определяются $\underset{a}{n}{}^\alpha$ с произволом

$$\underset{a}{\overline{n}}{}^\alpha = \underset{a}{n}{}^\alpha + q_{ab} \overset{b}{\mu}{}^\alpha; \quad q_{ab} = -q_{ba}. \tag{1.9}$$

где q_{ab} — скалеры.

В случае $p = 1$, из уравнений (1.8) $\underset{a}{n}{}^\alpha$ определяются однозначно

Пусть система векторов $\underset{a}{n}{}^i$ является решением уравнений (1.8), тогда системы векторов $\underset{a}{n}{}^\alpha$, $\underset{p}{n}{}^\alpha$ и y^α_i линейно-независимые.

Векторы $\underset{a}{n}{}^\alpha$ и $\underset{p}{n}{}^\alpha$ образуют базис оснащающего E_{n-m}. Уравнения, определяющие индуцированную связность на оснащенный V^p_m, имеют вид:

$$\partial_k y^\alpha_i - y^\alpha_l \Gamma^l_{ik} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta_i y^\gamma_k = \overset{\kappa}{b}_{ik} \underset{\kappa}{n}{}^\alpha, \tag{1.10}$$

где Γ^l_{ik} и $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты связностей V^p_m и V_n соответственно, а

$\overset{c}{b}_{ih}$ — компоненты вторых квадратичных форм $\overset{c}{V}_m$. Из этих уравнений имеем

$$y^{a}_{i,h} = \nabla_h y^{a}_i = \overset{g}{b}_{ih} \underset{g}{n}^{a} - \Gamma^{a}_{\rho\sigma} y^{\rho}_i y^{\sigma}_h. \tag{1.11}$$

2. Версор. Поскольку метрический тензор V^{a}_m пониженного ранга, то нельзя ввести его контравариантные компоненты обычным путем. Составим тензор

$$c_{ij} = g_{ij} + \sum_{a} \underset{a}{\lambda}_i \underset{a}{\lambda}_j, \tag{2.1}$$

который в силу (1.7) является невырожденным, т. е. ранг $(c_{ij}) = m$. Простой проверкой убедимся, что

$$c_{ij}\overset{a}{\mu}^{i} = \underset{a}{\lambda}_j;\ c^{ij}\underset{a}{\lambda}_j = \overset{a}{\mu}^{i}$$

$$c_{ij}\overset{a}{\mu}^{i}\overset{c}{\mu}^{j} = c^{ij}\underset{a}{\lambda}_i\underset{c}{\lambda}_j = \begin{cases} l_a; & a = c \\ 0; & a \neq c. \end{cases} \tag{2.2}$$

Определим тензор

$$g^{ij} = c^{ij} - \sum_{a} \overset{a}{\mu}^{i}\overset{a}{\mu}^{j}, \tag{2.3}$$

который является аналогом контравариантного метрического тензора для неизотропных поверхностей.

Оказывается, что

$$\text{а) ранг } (g^{ij}) = r;\quad \text{б) } g^{ij}\underset{a}{\lambda}_i = 0. \tag{2.4}$$

В силу (1.4), (1.8) и (2. 3) определяется выражение

$$g^{ij}y^{\alpha}_i y^{\beta}_j = n^{\alpha\beta} + \sum_{a} \overset{a}{\mu}^{\alpha}\overset{a}{\mu}^{\beta} - \sum_{q} \underset{q}{n}^{\alpha}\underset{q}{n}^{\beta} - 2\overset{c}{\mu}^{(\alpha}\underset{c}{n}^{\beta)}, \tag{2.5}$$

которое используется при нахождении тензора кривизны и тензора Риччи.

3. Тензоры $\overset{g}{b}_{ij}$. Определение Γ^{l}_{ij}. Ковариантным дифференцированием (1.2), с помощью (1.7) и (1.8), находим:

$$g_{ij,k} = \nabla_k g_{ij} = \underset{a}{\lambda}_i \overset{a}{b}_{jk} = \underset{a}{\lambda}_j \overset{a}{b}_{ik} \tag{3.1}$$

откуда получим

$$g_{ek}\Gamma^{k}_{ij} = T_{l,\,ij} - \underset{a}{\lambda}_l \overset{a}{b}_{ij}, \tag{3.2}$$

где $T_{l,\,ij}$ — символы Кристофеля, составленные из g_{ij}. Свертывание с $\overset{c}{\mu}^{l}$ дает

$$\overset{c}{b}_{ij} = \overset{c}{\mu}^{l}\, T_{l,\,ij} \tag{3.3}$$

Теорема 3. 1. *Компоненты тензоров вторых квадратичных форм в случае $c = 1, 2, \cdots, p$ выражаются через символы Кристофеля и компоненты соответствующего вектора нормали, и не зависят от оснащения.*

Заметим, что в силу (1.5)

$$\overset{a}{\mu}{}^{l}\overset{c}{b}_{lj} = -\overset{c}{\mu}{}^{l}\overset{a}{b}_{lj}, \tag{3.4}$$

т. е. тензоры $\overset{a}{b}_{ij}$ — вырожденные, ранг $(\overset{c}{b}_{ij}) \leq m-1$. Ковариантно дифференцируя выражения (1.4а) и (1.4в), получим соответственно ([2], стр. 95)

$$\overset{a}{b}_{ik} = -a_{\alpha\beta}y_i^{\alpha}(\overset{c}{\mu}{}^{\beta}{}_{,k} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}y_k^{\rho}\overset{c}{\mu}{}^{\sigma}) = -a_{\alpha\beta}y_i^{\alpha}\overset{c}{\mu}{}^{\beta}{}_{,l}\,y_k^{l}; \tag{3.5}$$

$$\overset{p}{b}_{ik} = -a_{\alpha\beta}y_i^{\alpha}(\underset{p}{n}{}^{\beta}{}_{,k} + \Gamma^{\beta}_{\rho\sigma}y_k^{\rho}\underset{p}{n}{}^{\sigma}) = -a_{\alpha\beta}y_i^{\alpha}\underset{p}{n}{}^{\beta}{}_{,l}\,y_k^{l}. \tag{3.6}$$

Формула Вайнгартена для изотропных поверхностей имеет вид:

$$\overset{c}{\mu}{}^{h}{}_{,k} = -\overset{c}{b}_{lk}g^{hl} - \overset{a}{\mu}{}^{h}\overset{c}{\mu}{}^{l}\underset{a}{\lambda}_{l,k}; \tag{3.7}$$

$$\overset{c}{\mu}{}^{\alpha}{}_{,k} = -g^{hl}\overset{c}{b}_{hk}y_l^{\alpha} - \overset{c}{\mu}{}^{l}\overset{a}{\mu}{}^{\alpha}\underset{a}{\lambda}_{l,k} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}\overset{c}{\mu}{}^{\rho}y_k^{\sigma}. \tag{3.8}$$

Свертывая (1.10) с $a_{\alpha\beta}y_l^{\beta}$ и $a_{\alpha\beta}\underset{a}{n}{}^{\beta}$, суммируя по a и складывая почленно, получим:

$$c_{lk}\Gamma^{k}_{ij} = (g_{lk} + \sum_a \underset{a}{\lambda}_l\underset{a}{\lambda}_k)\Gamma^{k}_{ij} = T_{l,ij} -$$

$$-2\underset{a}{\lambda}_l\overset{a}{b}_{ij} + a_{\alpha\beta}(\partial_j y_i^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}y_i^{\rho}y_j^{\sigma})\sum_a\underset{a}{\lambda}_l\underset{a}{n}{}^{\beta}, \tag{3.9}$$

откуда определяются коэффициенты аффинной связности

$$\Gamma^{h}_{ij} = g^{hl}T_{l,ij} - \sum_a\overset{a}{\mu}{}^{l}\overset{a}{b}_{ij} + a_{\alpha\beta}(\partial_k y_i^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}y_i^{\rho}y_j^{\sigma})\overset{a}{\mu}{}^{h}\underset{a}{n}{}^{\beta}. \tag{3.10}$$

Введя обозначения:

$$\overline{\Gamma}^{l}_{ij} = g^{lh}T_{hij} + a_{\alpha\beta}\partial_j y_i^{\alpha}\overset{a}{\mu}{}^{h}\underset{a}{n}{}^{\beta}; \tag{3.11}$$

$$P^{h}_{ij} = \sum_a\overset{a}{\mu}{}^{h}b_{ij} + \underset{a}{n}{}^{\beta}\overset{a}{\mu}{}^{h}a_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}y_i^{\rho}y_j^{\sigma}. \tag{3.12}$$

можно коэффициенты аффинной связности и тензор кривизны записать соответственно в виде

$$\Gamma^{l}_{ij} = \overline{\Gamma}^{l}_{ij} + P^{l}_{ij} \tag{3.13}$$

$$R^{l}{}_{ijk} = K^{l}{}_{ijk} - 2P^{l}_{i[j,k]} - 2P^{l}_{h[j}P^{h}_{k]i}, \tag{3.14}$$

где K^{l}_{ijk} тензор Римана, составленный из $\overline{\Gamma}^{l}_{ij}$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову.

Ереванский государственный
университет

Ն. Գ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ

Իզոտրոպ մակերևույթների երկրաչափության մասին

Հոդվածում դիտարկված է n-չափանի Ռիմանի տարածության իզոտրոպ մակերևույթները։ Կառուցված է մակերևույթի ոչ-ինվարիանտ հավասարում, ներմուծված է վեկտոր, որի օգնությամբ որոշված են մակերևույթի երկրորդ տենզորները, աֆինական կապակցության գործակիցները, Ռիմանի տենզորը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, ГИИЛ, М., 1948. [2] *И. А. Скоутен, Дж. Стройк*, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, II, ГИИЛ, М., 1948. [3] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм ССР, XLV, № 3 (1967). [4] *Н. Г. Галстян*, Сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. [5] *Н. Г. Галстян*, Тезисы 5-ой международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968.