ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
L 1970 4

УДК 533—6

МЕХАНИКА

А. Г. Баглоев

Определение особенностей фронтов волн

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 5/II 1970)

Рассматривается произвольная линейная система первого порядка

$$A_1 \frac{\partial \bar u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \bar u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \bar u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

с независимыми переменными x, y, t и $A_3 \bar a = \bar a$.

Ищется решение, удовлетворяющее начальным условиям, заданным в виде начальной волны $u_i = a_i (-\tau_1)^{\lambda} x_4^{\lambda}$.

Решение вблизи фронта волны ищется в виде

$$\bar u = \iint \frac{v \bar A}{\sqrt{\Gamma}} \, dx_0 dy_0, \tag{2}$$

причем $\sqrt{\Gamma}$ — геодезическое расстояние от данной точки (t, x, y) до точки $(0, x_0, y_0)$ за начальной волной, $\frac{v}{\sqrt{\Gamma}}$ — элементарное решение [1], причем непрерывная часть его v находится из решения на самой волне AB [2]. $A_i = \frac{1}{\lambda} u_i \lambda (-\tau_1)^{\lambda-1} x_1^{\lambda}$.

Ищется решение в окрестности точки соединения произвольной волны AB и дифракционной BB_1.

Обозначая через s длину дуги AB, отсчитываемую от B, через $\bar k_1$ и $\bar k_2$ кривизны BB_1 и AB в B, можно найти соотношение

$$t_\phi - t_{\text{дифр.}} = -\frac{\bar k_1 - \bar k_2}{2 \bar c_0} s^2, \tag{3}$$

где $t_\phi = t$ есть уравнение AB, $t = t_{\text{дифр.}}$ есть уравнение BB_1. Предполагая обратимость (1) по t, то есть существование у системы (1) волн и ее гиперболичность, из условия совпадения $t - t_{\text{дифр.}}$ с соответствующей разностью времен для начальной волны A_0B_0 и дифракционной волны (или гиперсферы), образовавшейся в момент t в точке (x, y) и взятой в точке $x = 0$, $y = 0$ в момент $t = 0$, можно найти равенство

$$\frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0} s^2 = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} s^2, \tag{4}$$

где c_0 есть скорость волны в точке $(0, 0)$, s—дуга начальной волны A_0B_0. Кроме того, имеет место соотношение

$$s = \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}, \tag{5}$$

где θ есть угол нормали в начальной точке $(0, 0)$ к дифракционной волне BB_1 с осью $0x$, θ_0 — значение θ в B. Для волнового уравнения θ есть полярный угол и (5) видно из геометрических соображений.

Равенства (4) и (5) проверены для системы (1) с постоянными коэффициентами и некоторого уравнения с переменными коэффициентами [2].

Геодезическое расстояние $\sqrt{\Gamma}$ есть эйконал, представляющий $\sqrt{(t - t_0)^2 - \psi(x, y, x_0, y_0)}$, где $t - t_0 = \sqrt{\psi}$ есть уравнение характеристического коноида. Вблизи коноида $\Gamma = 2t\,(t - t_0 - \sqrt{\psi})$. Поскольку вдоль коноида, проходящего через (t, x, y), Γ не меняется, следует в качестве $c_0\,(t - \sqrt{\psi})$ брать расстояние от линии пересечения коноида с $t_0 = 0$ или от гиперсферы до точки x_0, y_0 за A_0B_0. Более строго уравнение фронта волны и значение Γ получатся рассмотрениями, подобными [2].

Пусть $\tau_1(x, y) = 0$ есть уравнение A_0B_0, $t = \tau$, $\tau = \tau(M, M_0)$ — уравнение гиперсферы с центром в M. Начало координат системы x_1, y_1 выбирается в точке пересечения A_0B_0 с лучом MC, проходящим через M, ось x_1 — по касательной к волне, ось y_1 в сторону, куда движется волна. Обозначая через $y_1 = \varphi_2(x_1)$ уравнение A_0B_0, через $y_1 = \varphi(x_1, t, \tau)$ — уравнение гиперсферы, а также учитывая равенства

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varphi_2} = -\frac{1}{c_0}, \quad \tau_1 = -\frac{\varphi_2}{c_0} + \frac{k_2}{2c_0}x_1^2 = 0, \qquad \frac{\partial\tau_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_1}{\partial\varphi_1} = -\frac{1}{c_0}, \quad \varphi_2'' = k_2, \quad \varphi_1'' = k_1, \quad t - \tau = t - \tau_0 + \frac{\varphi_1}{c_0} - \frac{k_1}{2c_0}x_1^2 = 0,$$

где $\tau_0 = t_\Phi$ есть значение τ в начале координат, можно найти

$$\frac{\varphi}{c_0} = \tau_0 - t + \frac{k_1 - k_2}{2c_0}x_1^2, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{6}$$

Удобно выбирать начало координат системы x_4, y_4 в начальной точке 0, из которой возникает дифракционная волна. Тогда, поскольку направление оси x_4 мало отличается от x_1, из предыдущих рассуждений можно найти

$$\varphi = c_0(\tau_0 - t) + \frac{k_1 - k_2}{2}(x_4 - s)^2, \tag{7}$$

где s есть длина дуги OC волны A_0B_0, причем за x_4 можно брать длину дуги A_0B_0, а за y_4—расстояние по нормали от A_0B_0. Под знаком интеграла находится геодезическое расстояние $\sqrt{\Gamma}$, представляющее $\sqrt{2t}\sqrt{t - \sqrt{\psi}}$, где $c_0(t - \sqrt{\psi})$ есть расстояние от линии пересечения коноида, проходящего через (x, y, t), с плоскостью $t = 0$ до некоторой точки за начальной волной $\tau_1 = 0$, или расстояние от гиперсферы $t = \tau$ до точки за волной $\tau_1 = 0$.

Обозначая через ζ расстояние от точки за волной $\tau_1 = 0$ до самой волны и учитывая, что расстояние от гиперсферы до начальной волны равно $-\varphi$, можно найти для расстояния от гиперсферы до точки за $\tau_1 = 0$

$$\frac{\Gamma}{2t} = -\varphi - \zeta, \quad \sqrt{\frac{\Gamma}{2t}} = \sqrt{c_0\delta - \frac{k_1 - k_2}{2}(x_4 - s)^2 - \zeta}, \tag{8}$$

$$\delta = (t_0 - \tau).$$

В пространственной задаче, выбирая оси x_1, y_1 по линиям кривизны начальной волны $\tau_1 = 0$ и гиперсферы $t = \tau$ (предполагается, что их главные направления совпадают, что верно для волнового уравнения), можно найти

$$k_1 = c_0 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2}, \quad k_2 = c_0 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_1^2}, \quad k_3 = c_0 \frac{\partial^2 \tau}{\partial y_1^2}, \quad k_4 = c_0 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial y_1^2},$$

$$\tau_1(x_1, y_1, \varphi_2) = 0, \quad t - \tau(x_1, y_1, \varphi_1, M) = 0,$$

или

$$\varphi = c_0(\tau_0 - t) + \frac{k_1 - k_2}{2}x_1^2 + \frac{k_3 - k_4}{2}y_1^2, \quad \tau_0 = t_0.$$

Выбирая начало координат в точке O, взяв в качестве координат x_4, y_4 длины дуг линий кривизны поверхностей $\tau_1 = 0$, $t = \tau$ и обозначая через s, T координаты точки C пересечения луча, проходящего через M с начальной волной, для расстояния от гиперсферы до некоторой точки за волной $\tau_1 = 0$ можно найти

$$\frac{\Gamma}{2t} = -\varphi - \zeta, \quad -\varphi - \zeta = c_0\delta - \frac{k_1 - k_2}{2}(x_4 - s)^2 - \frac{k_3 - k_4}{2}(y_4 - T)^2 - \zeta. \tag{9}$$

Из (2) и (8) решение плоской задачи найдется через гипергеометрические функции ([3]).

В пространственной задаче, по-видимому, более эффективен метод запаздывающих потенциалов, причем решение только множителем, характеризующим амплитуду AB, отличается от ([1])*.

Представляет интерес также задача об определении окрестности особой точки для медленной магнитозвуковой волны ABC (рис. 1), где ось $0x$ направлена по постоянному начальному магнитному полю. Окрестность точек A и B рассмотрена в ([4]).

* Через функцию φ, введенную С. Л. Соболевым, решение запишется в виде

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi}\iint \bar{a}\,\lambda(-\varphi)^{\lambda-1}x_4^{\lambda}\,dx_4\,dy_4$$

Обозначая через a_0 и a_1 начальные скорости звука и Альфвена, через t—время и вводя переменные

$$x_1 = t^{\frac{1}{2}} y, \quad y_1 = \varepsilon x - t, \ t, \quad \varepsilon^2 = \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_0^2 a_1^2}, \tag{10}$$

причем в точке c $x_1 \approx 0$, $y_1 \approx 0$, $x_1 \approx y_1^{\frac{1}{3}}$, можно показать, что линейное решение зависит от x_1, y_1, t в виде:

$$P = t^{\frac{1}{2}} \varphi_0 (x_1, y_1), \tag{11}$$

где P есть давление, φ_0—некоторая функция, и рассмотрена плоская задача с источником в точке $x = 0$, $y = 0$ [4]. Упрощенные нелинейные уравнения вблизи точки c получатся отбрасыванием в уравне-

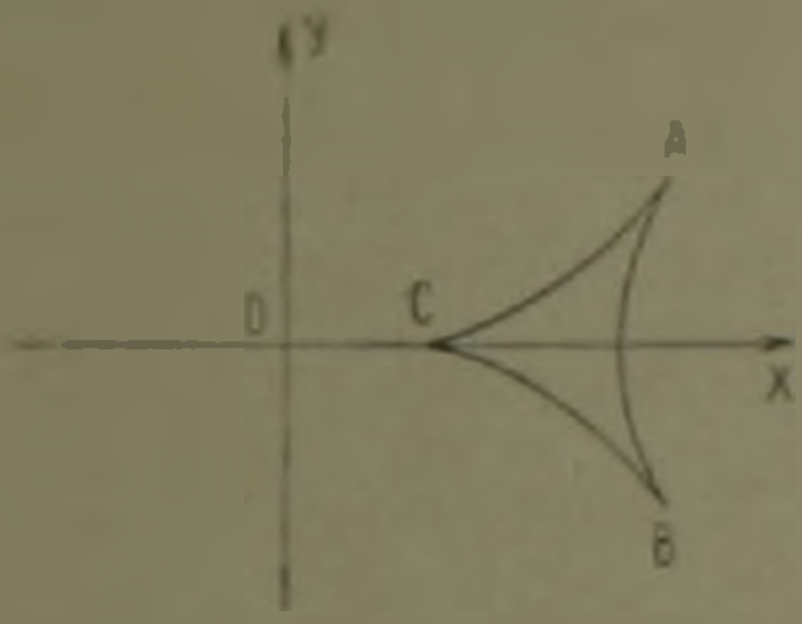

Рис 1

ниях магнитной гидродинамики слагаемых более высокого порядка. Исключая компоненты скорости и напряженности магнитного поля из системы, можно получить уравнения для давления P

$$\Delta_0 P = f, \quad \Delta_0 = \tau^4 - \tau^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) \left(a_0^2 + a_1^2 - \frac{a_0^2 a_1^2}{\tau^2} \xi_1^2 \right), \tag{12}$$

где

$$\tau = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

f есть функция, содержащая нелинейные слагаемые, в которых можно исключить v_x, v_y, h_x, h_y посредством линейных соотношений

$$v_x = \frac{\varepsilon}{\rho_0} P, \ h_x = -\varepsilon v_y, \ h_y = \frac{1}{\rho_0 a_1^2} P, \quad \frac{1}{\rho_0 a_1^2} \frac{\partial P}{\partial y_1} + t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v_y}{\partial x_1} = 0. \tag{13}$$

Здесь ρ_0 есть невозмущенная плотность.

В переменных (10) Δ_0 приближенно запишется в виде:

$$\Delta_0 = \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} - (a_0^2 + a_1^2) \left(x_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial y_1} + 3 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial y_1} \right) \tag{14}$$

и (12) примет вид:

$$\frac{\partial^3 P}{\partial y_1^3} + (a_0^2 + a_1^2)\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}(x_1 P) = -\frac{t}{\rho_0}\left(3 + 2\,\frac{a_1^2}{a_0^2}\,\alpha_0\right)\frac{\partial^3 \frac{P^2}{2}}{\partial x_1^2 \partial y_1}, \tag{15}$$

где α_0 связано с уравнением состояния ([1]). При получении (15) отброшено $\frac{\partial}{\partial y_1}$, что соответствует характеристике $x_1 = \mathrm{const}$.

Вводя функцию $P = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial y_1}$, можно найти

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y_1^4} + (a_0^2 + a_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\right) = -\frac{t}{\rho_0}\left(3 + 2\frac{a_1^2}{a_0^2}\alpha_0\right) P\,\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial y_1}. \tag{16}$$

В осесимметричной задаче с осью симметрии Ox и радиальной координатой r линейное решение в переменных $x_1 = t^{\frac{1}{2}} r$, $y_1 = \varepsilon x - t$, t имеет вид:

$$P = t\,\rho_0(x_1, y_1). \tag{17}$$

Уравнения движения после некоторых преобразований дают

$$\Delta_0 P = f,\quad \Delta_0 = (\tau^2 - a_1^2 \xi_1^2 - a_1^2 \xi_2^2)(\tau^2 - a_0^2 \xi_1^2) -$$

$$- a_0^2 \tau^2 \xi_2^2 - \frac{1}{r}\left(a_0^2 \tau^2 \xi_2 + a_1^2 \tau^2 \xi_2 - a_1^2 a_0^2 \xi_1^2 \xi_2\right), \tag{18}$$

причем

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial r},\quad \tau = -\frac{\partial}{\partial t},$$

f определяет нелинейные слагаемые.

В линейном приближении вблизи c можно получить:

$$v_x = \frac{P}{\rho_0}\varepsilon,\quad h_x = -\frac{P}{\rho_0 a_1^2},\quad h_r = -v_r \varepsilon,\quad \frac{1}{\rho_0 a_1^2}\frac{\partial P}{\partial y_1} + t^{\frac{1}{2}}\frac{\partial v_r}{\partial x_1} + t^{\frac{1}{2}}\frac{v_r}{x_1} = 0. \tag{19}$$

Для Δ_0 приближенно получится

$$\Delta_0 = \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} + (a_0^2 + a_1^2)\left(x_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial y_1} + 5\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial y_1} + \frac{3}{x_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\right) \tag{20}$$

и уравнение (18) с использованием (19) после некоторых преобразований запишется в виде:

$$\frac{\partial^4 (P x_1)}{\partial y_1^4} + (a_0^2 + a_1^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 \frac{\partial^2 P x_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial P x_1}{\partial x_1} - \frac{P x_1}{x_1}\right) =$$

$$= -\frac{t}{\rho_0}\left(3 + 2\frac{a_1^2}{a_0^2}\alpha_0\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_1}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{P^2}{2}\right) \tag{21}$$

или, введя переменную φ по формуле $Px_1 = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1}$,

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial y_1^3} + (a_0^2 + a_1^2)\left(x_1 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \frac{1}{x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) =$$

$$= -\frac{t}{\rho_0}\left(3 + 2\frac{a_1^2}{a_0^2}\alpha_0\right)\left\{\frac{1}{x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2 \partial y_1} - \frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial y_1}\right)^2\right\}. \quad (22)$$

Уравнения (16), (22) описывают в нелинейном случае решения плоской и осесимметричной задачи по определению окрестности точки C волны ABC.

Характеристики (22) имеют вид:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^3 - (a_0^2 + a_1^2)\,x_1 = -\frac{t}{\rho_0}\left(3 + 2\frac{a_1^2}{a_0^2}\alpha_0\right) P\,\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \qquad (23)$$

причем при $P > 0$ имеется одна характеристика.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Ալիքների եզակիությունների որոշման խնդիր

Դիտարկվում է կամայական ալիքի և դիֆրակցված ալիքի հատման կետի շրջակայքի որոշման հավասարումների գծային սխեմի համար։ Լուծումը ստացված է հիպերբոլիկ-պարաբոլական ֆունկցիաների տեսքով։ Ուսումնասիրված է նաև եզակիությունների որոշման ոչ գծային խնդիրը մագնիսահիդրոդինամիկ ալիքների անկյունային կետերի մոտ։ Ստացված են երրորդ կարգի ոչ գծային հավասարումներ, որոնց գծային գծայնում չեն բերվում Տրիկոմիի հավասարմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] J. Hadamard. Le problème de Cauchy, Paris, 1932. [2] В. М. Бабич. Ученые записки ЛГУ, № 32, 1958. [3] А. Г. Багдоев. Труды Ереванского политехнического института, 1969. [4] А. Г. Багдоев. „Известия АН Арм. ССР“, Механика, т. XXII, № 5, (1969).