

УДК 513.7(07)

М. А. Василян

Квадратичные гиперполосы ранга $n-2$ в проективном пространстве P_n

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 11/II 1970)

1. В работе ⁽¹⁾ было построено инвариантное оснащение гиперполос H_{n-2} ранга $n-2$ в пространстве P_n . В настоящей работе рассматривается частный вид гиперполос H_{n-2} в пространстве P_n , именно квадратичные гиперполосы, построение инвариантного оснащения которых тесно связано с инвариантным оснащением гиперповерхностей конформного пространства S_{n-1} ⁽²⁾.

Если Q_{n-1} невырожденная гиперквадрика в проективном пространстве P_n и V_{n-2} — некоторая поверхность, лежащая на ней, то с этой поверхностью можно связать гиперполосу H_{n-2} , для которой поверхность V_{n-2} будет базисной. Плоский элемент (A, α) этой гиперполосы образован точкой A поверхности V_{n-2} и гиперплоскостью α , касающейся гиперквадрики в точке A . Гиперплоскости α огибают гиперповерхность V_{n-2}^{n-1} ранга $n-2$, касающуюся гиперквадрики Q_{n-1} вдоль поверхности V_{n-2} . Такую гиперполосу H_{n-2} назовем квадратичной.

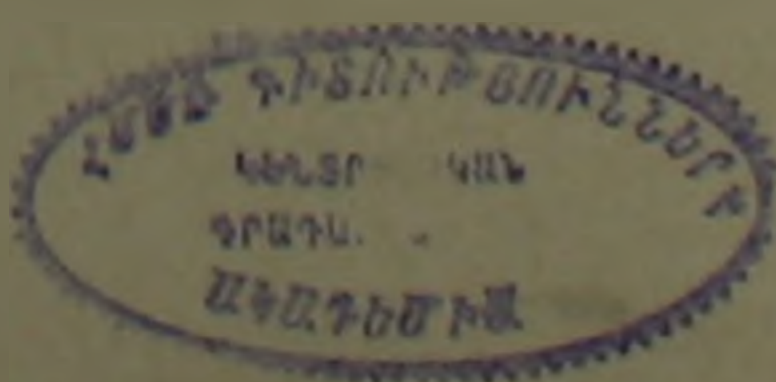
Геометрия квадратичных гиперполос ранга $n-2$ в пространстве P_n связана с геометрией гиперповерхностей конформного пространства S_{n-1} , так как при перенесении Дарбу пространство S_{n-1} отображается на гиперквадрику Q_{n-1} проективного пространства P_n . Гиперповерхность V_{n-2} пространства S_{n-1} при этом отображении перейдет в поверхность $V_{n-2} \subset Q_{n-1}$ пространства P_n , с которой можно связать квадратичную гиперполосу H_{n-2} .

2. Пусть Q_{n-1} — невырожденная гиперквадрика в пространстве P_n . Ее уравнение в произвольном точечном репере A_λ ($\lambda = 0, \dots, n$) имеет вид:

$$G(X, X) = g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0,$$

а в соответствующем тангенциальном репере α^i — вид

$$G(\xi, \xi) = g_{ij} \xi^i \xi^j = 0, \text{ где } g_{ij}, g^{ij} = \delta_{ij}^i.$$



Условие неподвижности этой гиперквадрики при произвольных преобразованиях репера A имеет вид:

$$\nabla g_{\alpha\beta} \equiv dg_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} - g_{\gamma\beta} \omega_{\alpha}^{\gamma} = 2\delta g_{\alpha\beta}. \quad (1)$$

Если точка A_0 репера лежит на гиперквадрике Q_{n-1} , а ее гиперплоскость π^n касается гиперквадрики, то $g_{00} = 0$, $g^{nn} = 0$. Так как точки A_p ($p = 1, \dots, n-1$) лежат в гиперплоскости π^n , то они полярно сопряжены точке A_0 относительно гиперквадрики Q_{n-1} , поэтому $g_{0p} = 0$. Точно так же из того, что гиперплоскости π^p , проходящие через точку A_0 , полярно сопряжены гиперплоскости π^n относительно гиперквадрики Q_{n-1} , вытекает, что $g^{pn} = 0$. Кроме того уравнение гиперквадрики Q_{n-1} можно пронормировать условием $g_{nn} = -1$.

Используя уравнение (1), можно найти соотношения, которые связывают коэффициенты уравнения гиперквадрики Q_{n-1} с компонентами инфинитезимального перемещения присоединенного к ней семейства реперов. Из этих соотношений нам понадобятся следующие:

$$\left. \begin{aligned} \nabla g_{pq} &\equiv dg_{pq} - g_{pr} \omega_q^r - g_{rq} \omega_p^r = g_{pr} \omega_q^n + g_{qn} \omega_p^n + 2\delta g_{pq}, \\ \omega_p^n &= g_{pq} \omega_q^n, \quad \omega_0^n = 0, \quad (p, q, r = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

3. Рассмотрим квадратичную гиперполосу H_{n-2} на гиперквадрике Q_{n-1} . Специализируем репер, присоединенный к этой гиперквадрике так, чтобы его точки A_l ($l = 1, \dots, n-2$) лежали в касательной плоскости E_{n-2} к базисной поверхности V_{n-2} гиперполосы H_{n-2} , а точка A_{n-1} принадлежала характеристике E_1 ее гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} . Тогда получим:

$$\omega_0^{n-1} = 0, \quad \omega_{n-1}^n = 0. \quad (3)$$

Учитывая эти соотношения, из второго уравнения системы (2) при $p = n-1$ получим: $g_{l, n-1} \omega_l^n = 0$. Формы $\omega_l^n = \omega^l$ будут базисными формами для гиперполосы H_{n-2} , поэтому они линейно независимы. Следовательно

$$g_{l, n-1} = 0. \quad (4)$$

В силу этого, из (2) находим, что

$$\omega_l^n = g_{lj} \omega^j. \quad (5)$$

Эти соотношения показывают, что основной тензор a_{ij} $(^1)$ квадратичной гиперполосы H_{n-2} совпадает с коэффициентами g_{ij} уравнения гиперквадрики Q_{n-1} . Соотношения (4) означают, что характеристика E_1 гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} и касательная плоскость E_{n-2} поверхности V_{n-2} полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} .

Так как $\det[g_{pq}] \neq 0$, то из второго уравнения системы (2) следует, что $\omega_0^n = g^{pn} \omega_p^n$ и при $p = n-1$ в силу (3) находим $g^{l, n-1} \omega_l^n = 0$ и как выше, аналогичное рассуждение приводит к соотношениям $g^{l, n-1} = 0$.

Из первого уравнения системы (2) при $p = i$, $q = n - 1$ получим:

$$g_{ij}(w_{n-1}^i + g_{n-1, n-1} w^j) + g_{n-1, n-1} w^{n-1} = 0. \quad (6)$$

Продолжение уравнений (3) вводит величины λ_{n-1}^{a-1} , λ_{n-1}^{ij} , которые в силу (6) связаны соотношением:

$$g_{ik} \lambda_{n-1}^{ik} + g_{n-1, n-1} \lambda_{n-1}^{n-1} + g_{n-1, n-1} \lambda_{n-1}^{n-1} g^{nn} = 0. \quad (7)$$

Свертывая (7) по индексам i, j , находим соотношение

$$\lambda_{n-1} + g_{n-1, n-1} + g_{n-1, n-1} \lambda^{n-1} = 0, \quad (8)$$

которое связывает величины λ_{n-1} и λ^{n-1} , введенные в (1). Рассмотрим инвариантную точку $M_{n-1} = A_{n-1} - \lambda_{n-1} A_0$ и гиперплоскость $r^{n-1} = x^{n-1} - \lambda^{n-1} x^n$, определяемые этими объектами. Проверка показывает, что соотношение (8) является условием полярной сопряженности точки M_{n-1} и гиперплоскости r^{n-1} относительно гиперквадрики Q_{n-1} .

В силу (7), тензоры b_{ij} и c^{ij} , введенные в (1), связаны соотношениями:

$$g_{ik} c^{ik} + g_{n-1, n-1} b_{nn} g^{nn} = 0. \quad (9)$$

Эти соотношения показывают, что тензоры b_{ij} и c^{ij} имеют одинаковый ранг. В частности, если один из них обращается в нуль, то и другой также обращается в нуль. Геометрически это означает, что, если поверхность V_{n-2} квадратичной гиперполосы H_{n-2} становится плоской, то ее гиперповерхность V_{n-2}^{n-2} будет гиперконусом и наоборот. В дальнейшем будем предполагать, что тензоры b_{ij} и c^{ij} невырождены.

В силу (9) тензоры g_{ij} , b_{ij} , c^{ij} можно привести одновременно к диагональному виду, а это означает, что сопряженной сети на поверхности V_{n-2} квадратичной гиперполосы H_{n-2} , соответствует фокальная сеть на гиперповерхности V_{n-2}^{n-2} .

4. Продолжение уравнений (8) приводит к соотношениям:

$$\lambda_i + g_{in} + g_{ij} \lambda^j = 0. \quad (10)$$

связывающим объекты λ_i и λ^j , введенные в (1). Эти объекты определяют соответственно инвариантные плоскости $E_{n-1} = [M_1 \dots M_{n-1}]$ и $E_n = [r^1 \dots r^{n-2}]$, где $M_i = A_i - \lambda_i A_0$, $r^i = x^i - \lambda^i x^n$. Из (10) следует, что эти плоскости полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} .

Далее, дифференцируя ковариантно соотношения (10), находим связь между величинами λ_{ij}^{ij} и λ_{ij}^0 , введенные в (1):

$$g_{ik} b_{jn} \lambda_{ij}^{kn} - g_{ik} \lambda_{ij}^0 c^{kn} = g_{ij} (g_{nn} \lambda^j + g_{n-1, n-1} \lambda^{n-1} + g_{nn}) = 0. \quad (11)$$

Свертывая левую часть уравнения (11) с тензором g^{ij} , получим соотношение

$$\lambda_n - \lambda^0 + g_{ik} \lambda^i + g_{n-1, n-1} \lambda^{n-1} + g_{nn} = 0, \quad (12)$$

которое связывает величины λ_n и λ^0 (1). Эти величины определяют

инвариантную точку $\bar{M}_n = A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} - \lambda^1 A_1 - \lambda_n A_0$ и гиперплоскость $\bar{\mu}^n = x^0 + \lambda_1 x^1 + \lambda_{n-1} x^{n-1} - \lambda^0 x^n$. В силу (8), (10) и (12), эти образы оказываются полярно сопряженными относительно гиперквადрики Q_{n-1} .

Тензоры l_{ij} и h^{ij} , введенные в (1), в силу (11), (12) и (9), связаны соотношениями:

$$g_{ik} h^{jk} + g_{n-1, n-1} l_{ik} g^{jk} = 0.$$

Обозначим через $\bar{M}_n$ точку пересечения гиперплоскости $\bar{\mu}^0$ и прямой $[M_n \bar{M}_n]$, а через $\bar{\mu}^0$ — гиперплоскость, проходящую через точку $\bar{M}_n$ и принадлежащую пучку гиперплоскостей $[\bar{\mu}^0, \mu^n]$ (здесь $M_0 = A_0$, $\mu^n = x^n$). Теперь рассмотрим точку $M = \bar{M}_n + \lambda M_0$ пересечения прямой $[M_0 \bar{M}_n]$ с гиперквადрикой Q_{n-1} . Легко проверить, что точка M является четвертой гармонической точкой для точки M_0 относительно точек $\bar{M}_n$, $\bar{M}_n$. Гиперплоскость $\mu = \bar{\mu}^0 + \lambda \mu^n$ из пучка гиперплоскостей $[\bar{\mu}^0, \mu^n]$, является касательной к гиперквадрике Q_{n-1} . Она будет четвертой гармонической гиперплоскостью для гиперплоскости μ^n относительно гиперплоскостей $\bar{\mu}^0$, $\bar{\mu}^0$. Более того, точка M и гиперплоскость μ инцидентны и полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} . Следовательно можно положить $M = M_n$, $\mu = \mu^0$. С инвариантной точкой M_n и гиперплоскостью μ^0 связываются тензоры $H^{ij} = h^{ij} + \lambda b^{ij}$, $L_{ij} = l_{ij} + \lambda c_{ij}$, причем $H^{ij} b_{ij} = L_{ij}$, $c^{ij} = \lambda$. Эти тензоры связаны соотношениями:

$$g_{ik} H^{jk} + g_{n-1, n-1} L_{ik} g^{jk} = 0.$$

5. Подсчет показывает, что матрица коэффициентов уравнения гиперквадрики Q_{n-1} в инвариантном репере принимает вид:

$$|G_{ij}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & G_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{n-1, n-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} (i, j = 0, \dots, n), \\ (i, j = 1, \dots, n-2). \end{matrix}$$

(13)

где $G_{ij} = g_{ij}$; $G_{n-1, n-1} = g_{n-1, n-1}$.

Теперь мы можем указать связь оснащения, а также геометрических образов, связанных с квадратичной гиперполосой H_{n-2} в пространстве P_n , с оснащением и геометрическими образами гиперповерхности V_{n-1} конформного пространства S_{n-1} , рассмотренными в работе (2).

Вид матрицы (13) показывает, что построенный инвариантный репер является репером такого же типа, как репер, использованный в работе (1), при изучении конформной геометрии гиперповерхности. При этом гармоническому полюсу M_{n-1} на характеристике гиперповерхности V_{n-1}^* соответствует центральная гиперсфера $\bar{S}_{n-1} = \bar{A}_{n-1} +$

$+ \bar{a} \bar{A}_0$ из пучка гиперсфер $\bar{A}_{n-1} + \lambda \bar{A}_0$, касательных к гиперповерхности $\bar{V}_{n-2}$ в точке $\bar{A}_n$. Так как гиперплоскость μ^{n-1} и точка M_{n-1} полярно сопряжены относительно гиперквадрики Q_{n-1} , то гармонической поляре μ^{n-1} из пучка гиперплоскостей $[a^{n-1} a^n]$ соответствует та же центральная гиперсфера $\bar{C}_{n-1}$. Инвариантной плоскости E_{n-2} , натянутой на линейно независимые точки M_i , соответствует инвариантный пучок гиперсфер, базисом которого являются линейно независимые гиперсферы $\bar{C}_i = \bar{A}_i - b_i \bar{A}_0$. Но поскольку инвариантная плоскость E_2 полярно сопряжена плоскости E_{n-2} относительно гиперквадрики Q_{n-1} , то плоскости E_2 будет соответствовать тот же инвариантный пучок гиперсфер. Инвариантной точке M_n соответствует инвариантная точка

$$\bar{C}_n = \bar{A}_n - a \bar{A}_{n-1} + b^i \bar{A}_i - \frac{1}{2} (g_{ij} b^i b^j + a^2) \bar{A}_0.$$

Но так как гиперплоскость μ^0 полярно сопряжена точке M_n относительно гиперквадрики Q_{n-1} , то гиперплоскости μ^0 будет соответствовать эта же инвариантная точка $\bar{C}_n$.

Тензорам g_{ij}, a_{ij}, c_{ij} , связанным с окрестностями первого, второго и четвертого порядка гиперповерхности $\bar{V}_{n-2}$ пространства S_{n-1} , будут соответствовать тензоры g_{ij}, b_{ij}, L_{ij} , квадратичной гиперполосы H_{n-2} пространства P_n , связанные с окрестностями таких же порядков.

Таким образом, инвариантный репер гиперповерхности $\bar{V}_{n-2}$ конформного пространства S_{n-1} , построенный в работе (2), при перенесении Дарбу переходит в построенный нами инвариантный репер квадратичной гиперполосы H_{n-2} проективного пространства P_n .

Считаю своим долгом поблагодарить М. А. Акивиса, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

У. А. ՎԱՍԻՅԱՆ

$n-2$ օւանգի Բառակոսային հիպերշերտերը P_n սլաբկտիվ տարածությունում

Աշխատանքում դիտարկվում է $n-2$ օւանգի H_{n-2} ծառակոսային հիպերշերտերը P_n տարածությունում: Ընդ որում պատկերվում է $n-2$ օւանգի բնդիանուր տեսքի հիպերշերտերի (1) հետազոտության համար կառուցված ապարատը:

H_{n-2} ծառակոսային հիպերշերտերի համար $\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda_1 \in \mathbb{R}^1, \lambda_n \in \mathbb{R}^1$ որոշակիւնները, որոնք կապված են (8), (10), (12) առնչություններով, հանգիստանում են նրանցով որոշվող երկրաչափական կերպարների բևեռային համայնությունից պայմանները Q_{n-1} հիպերկվադրիկայի նկատմամբ: Պարզվում է, որ H_{n-2} ծառակոսային հիպերշերտերի տեսությունը կապված է C_{n-1} (2) կոնֆորմ տարածության հիպերմակերևույթների տեսության հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՆԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ М. А. Василья, ДАН Арм. ССР, т. 50, № 2. ² М. А. Акивис, Математический сборник, т. 31 (73), 43—75 (1952).