ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

L 1970 3

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

С. Е. Маркосян

О базах дуг одного класса конечных ориентированных графов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 13/XI 1969)

При исследовании ориентированных графов (орграфов) возникающие задачи можно разделить на две части: теоретическую и практическую. Нужно признаться, что пока очень мало сделано по обеим частям, и многие вопросы еще ждут своих решений. Помимо многих нерешенных задач из первой части, очень интересна и трудна задача — вопрос существования базы дуг бесконечных ориентированных графов, который можно сформулировать и на языке теории множеств. Тогда получится чисто классическая задача теории множеств, которая связана с принципами максимальности. Результаты, касающиеся этого вопроса, пока еще скромные. О. Оре ([1]) описал класс ориентированных графов с компактным реберным разделением дуг. В работах автора настоящей статьи ([2, 3]) расширен этот класс, найдено необходимое условие существования базы дуг для произвольного орграфа и поставлена гипотеза достаточности этого условия.

Несмотря на то, что вопрос о полном обзоре всех баз дуг в общем случае невозможно решить в духе полного обзора всех баз вершин, существует такой класс орграфов, что полный обзор всех баз дуг для орграфов этого класса получается точно так же, как в случае базы вершин. Для этих орграфов можно описать удобный алгоритм для получения всех порождающих множеств, после чего все ранее поставленные задачи решаются тривиальным образом. Это класс орграфов, в которых никакие порождающие множества не пересекаются. Переходим к доказательству некоторых теорем, на которые основывается алгоритм нахождения порождающих множеств.

Следующая теорема аналогична теореме о базах вершин.

Теорема 1. *Если в конечном орграфе $G(X, U)$ порождающие множества* не пересекаются, то множество дуг $W \subseteq U$, образован-*

* Мы придерживаемся обозначений и терминологии работы ([4]).

тов дугами, выбранными по одной произвольным образом из каждого порождающего множества, является базой, и все базы дуг получаются таким образом.

Доказательство. Если W образовано таким образом, как сказано в теореме, то очевидно, что условия основной теоремы о базах дуг [1] выполнены, и W является базой дуг. А если W база дуг, то из основной теоремы и из условия, что порождающие множества не пересекаются, вытекает, что с каждым порождающим множеством W имеет равно одну общую дугу. Теорема доказана.

Пусть в орграфе G все порождающие множества $U_{\alpha_1,\beta_1}, U_{\alpha_2,\beta_2}, \cdots, U_{\alpha_l,\beta_l}$ и они не пересекаются. Тогда очевидны следующие три следствия:

Следствие 1. *Количество баз дуг орграфа G равно $|U_{\alpha_1,\beta_1}| \cdot |U_{\alpha_2,\beta_2}| \cdots |U_{\alpha_l,\beta_l}|$, где $|U_{\alpha_k,\beta_k}|$ $k = 1, 2, \cdots, l$ число элементов множества U_{α_k,β_k}.*

Следствие 2. *Базы дуг орграфа G минимальным (максимальным) весом получаются, если из каждого порождающего множества выбираем по одной дуге с минимальным (максимальным) весом.*

Следствие 3. *Все базы дуг орграфа G имеют одинаковую мощность.*

Интересно, что обратное утверждение следствия 3 неверно. Из того, что все базы дуг орграфа G имеют одинаковую мощность, не следует, что порождающие множества не пересекаются. Это доказывает следующий пример орграфа $G = (X, U)$ (рис. 1).

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\};$$

$$U = \{u_1 = (x_2, x_3),\ u_2 = (x_1, x_4),\ u_3 = (x_2, x_1),$$
$$u_4 = (x_1, x_2),\ u_5 = (x_3, x_1),\ u_6 = (x_3, x_4),$$
$$u_7 = (x_4, x_3)\}.$$

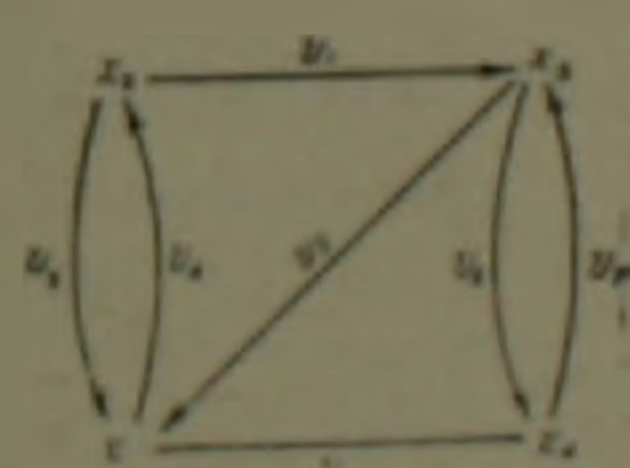

Рис. 1.

Порождающие множества этого орграфа

$$U_{\alpha_1,\beta_1} = \{u_4\},\quad U_{\alpha_2,\beta_2} = \{u_5\},\quad U_{\alpha_3,\beta_3} = \{u_7\},$$
$$U_{\alpha_4,\beta_4} = \{u_1, u_2\},\quad U_{\alpha_5,\beta_5} = \{u_2, u_6\},$$
$$U_{\alpha_6,\beta_6} = \{u_2, u_3\}.$$

Базы дуг этого орграфа

$$W_1 = \{u_6, u_5, u_7, u_1, u_2\},$$
$$W_2 = \{u_4, u_5, u_7, u_1, u_6\},$$
$$W_3 = \{u_4, u_5, u_7, u_2, u_3\}.$$

Несмотря на то, что все они содержат пять дуг, порождающие множества пересекаются.

Из следствия 3 вытекает, что если орграф G имеет две базы с различным количеством дуг, то порождающие множества пересекаются. Но пример показывает, что отсутствие таких баз еще не значит, что порождающие множества не пересекаются.

Вопрос о непересечении порождающих множеств решается следующим образом.

Пусть $G=(X, U)$ — конечный орграф и φ — выбирающая функция, определенная на порождающих множеств орграфа G: $\varphi(U_{\alpha,\beta}) \in U_{\alpha,\beta}$ для любого $U_{\alpha,\beta} \subset U$. Для краткости мы скажем: функция φ дает базу, если совокупность элементов $\{\varphi(U_{\alpha,\beta})\}$ является базой.

Теорема 2. *В орграфе G порождающие множества не пересекаются тогда и только тогда, когда любая выбирающая функция φ дает базу дуг.*

Необходимость вытекает из теоремы 1. Действительно, если порождающие множества не пересекаются, то для любой выбирающей функции φ совокупность $\{\varphi(U_{\alpha,\beta})\}$ содержит точно по одному элементу из каждого порождающего множества и является базой.

Достаточность. Пусть любая выбирающая функция дает базу. Предположим обратное: пусть порождающие множества пересекаются $u_1 \in U_{\alpha_1,\beta_1} \cap U_{\alpha_2,\beta_2}$, $U_{\alpha_1,\beta_1} \neq U_{\alpha_2,\beta_2}$. Тогда легко видеть, что U_{α_2,β_2} содержит хотя бы еще одну дугу, отличную от u_1. Пусть это будет u_2, $u_2 \neq u_1$, $u_2 \in U_{\alpha_2,\beta_2}$. Точно так же, если $u_2 \in U_{\alpha_k,\beta_k}$, $k=3, 4, \cdots$, то каждый U_{α_k,β_k} содержит дугу u_k, отличную от u_2. Выбирающую функцию φ определим следующим образом

$$\varphi(U_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} u_1, & \text{если } U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha_1,\beta_1}; \\ u_2, & \text{если } U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha_2,\beta_2}; \\ u_k, & \text{если } U_{\alpha,\beta} = U_{\alpha_k,\beta_k}, \ k = 3, 4, \cdots, \end{cases}$$

произвольным образом в остальных случаях.

Выбирающая функция φ не дает базу, так как для дуги $u_2 \in \{\varphi(U_{\alpha,\beta})\}$ не выполнено условие (2) основной теоремы ([4]). Полученное противоречие показывает, что порождающие множества не пересекаются. Достаточность, вместе с ней и теореме 2, доказаны.

Пусть $W=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$, $u_k=(x_k, y_k)$ база дуг для орграфа $G=(X, U)$. Тогда в суграфе $(X, W \setminus u_k)$ бикомпонента (максимальный сильно связный подграф) $G_{\alpha_k}=(X_{\alpha_k}, U_{\alpha_k})$, содержащая вершину x_k, и бикомпонента $G_{\beta_k}=(X_{\beta_k}, U_{\beta_k})$, содержащая вершину y_k, будут различными в силу того, что дуга $u_k \in W$ и W является базой.

Теорема 3. *В орграфе G всегда существуют две такие базовые пары $(G_{\alpha_k}, G'_{\beta_k})$ и $(G'_{\alpha_k}, G_{\beta_k})$, значит и два порождающих множества U'_{α_k,β_k}, U''_{α_k,β_k} такие, что $G'_{\beta_k} \supseteq G_{\beta_k}$, $G'_{\alpha_k} \supseteq G_{\alpha_k}$.*

Доказательство. Для доказательства существования первой базовой пары $(G_{\alpha_k}, G'_{\beta_k})$ поступим следующим образом.

В подграфе, порожденном множеством вершин $X \setminus X_{\alpha_k}$, обозначим через G_{β_k}' бикомпоненту, содержащую G_{β_k}, и покажем, что не может существовать пути, идущего из G_{α_k} в G_{β_k}' и имеющего длину больше единицы. Пусть $\mu = [x_1, x_2, \cdots, x_t]$, $t \geqslant 3$ такой путь, что $x_1 \in G_{\alpha_k}$, $x_t \in G_{\beta_k}'$, а $x_i \overline{\in} G_{\alpha_k}$, $x_i \overline{\in} G_{\beta_k}$ для любого $i = 2, \cdots, t-1$. Тогда в силу того, что W — база, любая вершина $x_i \in \mu$, $i = 2, \cdots, t-1$ достижима из вершин G_{α_k} в суграфе (X, W). Однако все вершины, которые достижимы из G_{α_k} в суграфе $(X, W \setminus u_k)$, входят в G_{α_k}, а так как $x_i \overline{\in} G_{\alpha_k}$, $i = 2, \cdots, t-1$, значит x_i достижима из G_{β_k} в суграфе $(X, W \setminus u_k)$. Этого тоже не может быть, так как из этого следовало бы, что $x_i \in G_{\alpha_k}$, вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что $(G_{\alpha_k}, G_{\beta_k}')$ — базовая пара, а соответственное множество дуг $U_{\alpha_k, \beta_k'}$ — порождающее. Аналогичным образом доказывается существование $(G_{\alpha_k}', G_{\beta_k})$ и U_{α_k', β_k}. Теорема доказана. Обозначим через $U^0_{\alpha_k, \beta_k}$ множество дуг, идущих из G_{α_k} в G_{β_k} в орграфе G.

Теорема 4. *Для того, чтобы для дуги $u_k \in W$, $k = 1, 2, \cdots, m$ существовало единственное порождающее множество такое, что $U_{\alpha_k, \beta_k} \cap W = \{U_k\}$ необходимо и достаточно, чтобы $U_{\alpha_k, \beta_k'} = U_{\alpha_k', \beta_k} = U^0_{\alpha_k, \beta_k}$.*

Необходимость. Если для дуги u_k существует единственное U_{α_k, β_k}, что $U_{\alpha_k, \beta_k} \cap W = \{u_k\}$, то ясно, что $U_{\alpha_k, \beta_k'} = U_{\alpha_k', \beta_k}$, а из этого следует, что $U_{\alpha_k, \beta_k'}$ не может содержать дугу, конец которой не принадлежит G_{β_k}, и U_{α_k', β_k} не может содержать дугу, начало которой не принадлежит G_{α_k}, т. е. $U_{\alpha_k, \beta_k'} = U_{\alpha_k', \beta_k} = U^0_{\alpha_k, \beta_k}$.

Достаточность. Если множества $U_{\alpha_k, \beta_k'}$, U_{α_k', β_k}, $U^0_{\alpha_k, \beta_k}$ совпадают, то очевидно, что для u_k $U^0_{\alpha_k, \beta_k}$ единственное порождающее множество, для которого $U^0_{\alpha_k, \beta_k} \cap W = \{u_k\}$. В противном случае $U^0_{\alpha_k, \beta_k}$ не было бы порождающим множеством. Теорема доказана.

Пусть в орграфе G порождающие множества не пересекаются.

Следствие 1. *Для любой дуги $u_k \in W$ в орграфе G $U_{\alpha_k, \beta_k'} = U_{\alpha_k', \beta_k} = U^0_{\alpha_k, \beta_k}$.*

Это следует из того, что для любой дуги $u_k \in W$ существует единственное порождающее множество U_{α_k, β_k} такое, что $U_{\alpha_k, \beta_k} \cap W = \{u_k\}$. Нужно отметить, что обратное утверждение этого следствия неверно.

Следствие 2. *В орграфе G количество порождающих множеств равно $|W|$, в частности для бисвязных орграфов количество порождающих множеств не превосходит $2n-2$* ([5]).

Очевидно

Теорема 5. *Если в орграфе G $U_{\alpha_k, \beta_k'} = U_{\alpha_k', \beta_k} = U^0_{\alpha_k, \beta_k}$ $k = 1, \cdots$*

$\cdots, m$ и $U^0_{a_i, b_i} \cap U^0_{a_j, b_j} = \varnothing$ *для любых* $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, m$, *то количество баз дуг орграфа* G *не меньше* $\sum_{k=1}^{m} |U^0_{a_k, b_k}|$.

Доказательство. Если в базе $W = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ только дугу u_k заменить дугой $u'_k \in U^0_{a_k, b_k}$, то полученное $W' = \{u_1, \cdots, u'_k, \cdots, u_m\}$ опять будет базой. Действительно, первое условие основной теоремы $U_{a, b} \cap W' \neq \varnothing$ для любого порождающего множества выполнено, потому что, если $U_{a, b} \neq U^0_{a_k, b_k}$, то оно содержит хотя бы одну дугу, отличную от u_k, в силу теоремы 4. А если $U_{a, b} = U^0_{a_k, b_k}$, то $U_{a, b} \cap W' = \{u'_k\}$. Второе условие основной теоремы, очевидно, тоже выполнено, так как для любой дуги $u_i \in W'$, $i \neq k$, $U^0_{a_i, b_i} \cap W' = \{u_i\}$ в силу непересечения $U^0_{a_1, b_1}, \cdots, U^0_{a_m, b_m}$, а для $i = k$ $U^0_{a_k, b_k} \cap W' = \{u'_k\}$. Значит для каждой дуги $u'_k \in U^0_{a_k, b_k}$ получается одна база. Для порождающего множества $U^0_{a_k, b_k}$ получим $|U^0_{a_k, b_k}|$ баз. Так как k произвольно, то получим $\sum_{k=1}^{m} |U^0_{a_k, b_k}|$ баз и все они будут разные. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Որիենտացված գրաֆների մի դասի աղեղների բազաների մասին

[illegible]

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *О. Оре*, Теория графов. Изд. „Наука", М., 1968. [2] *С. Е. Маркосян*, „Известия АН Арм. ССР", (Математика), № 4 (1969). [3] *С. Е. Маркосян*, О существовании базы дуг бесконечных ориентированных графов. Первая Всесоюзная конференция молодых специалистов ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, 1969. [4] *С. Е. Маркосян*, ДАН Арм. ССР, т. XLVI, № 1 (1968). [5] *М. К. Гольдберг*, Успехи математических наук, т. XX, вып. 5 (1965)