ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

L 1970 3

УДК 5137

МАТЕМАТИКА

Н. Г. Галстян

Инвариантное оснащение изотропных гиперповерхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 5/XI 1969)

В предыдущих статьях ([1–6]) автора доказывалась инвариантность скаляров ρ и ε в случае просто-регулярных изотропных гиперповерхностей с использованием законов преобразования тензоров g^{ij} и b^{ij} (которые определяются оснащением) при преобразовании оснащения. В настоящей работе доказывается инвариантность этих скаляров для случая просто-нерегулярных изотропных гиперповерхностей.

Автору удается доказать инвариантность этих скаляров и указать метод инвариантного оснащения, заранее не оснащая данную изотропную гиперповерхность. Такой метод инвариантного оснащения дает возможность перейти к определению изотропного пространства.

Формулы из работ ([1–6]) будут приведены с сохранением нумерации формул соответственно в виде (3. 2. 5); (4. 3. 2) и т. д.

1. *Нерегулярные гиперповерхности.* Поскольку ранг $(b_{ij}) = n - 2 - k$ к > 0, то существуют $(k+1)$ векторов μ^i, $\overset{a}{v}{}^i$ $(a, b, c, d = 1, 2, \cdots, k)$ удовлетворяющие условиям:

$$\mu^i b_{ij} = 0, \quad \overset{a}{v}{}^i b_{ij} = 0. \tag{1.1}$$

Эти векторы образуют линейное $(k+1)$ мерное пространство. Предположим, что в этом пространстве можно построить такой базис, векторы которого удовлетворяют условиям:

$$g_{ij} \overset{a}{v}{}^i \overset{d}{v}{}^j = \begin{cases} e_a; & a = d \\ 0; & a \neq d \end{cases}; \quad e_a = \pm 1 \tag{1.2}$$

Тогда имеет место

Теорема 1.1: *При предположении (1.2) векторы базиса можно выбрать так, чтобы имели место условия*

$$\text{а) } g_{ij} \overset{a}{v}{}^i \overset{d}{v}{}^j = \begin{cases} e_a; & a = d \\ 0; & a \neq d \end{cases} \qquad \text{б) } \overset{a}{v}{}^i = 0 \tag{1.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно взять

$$\underset{a}{v^l} = \underset{a}{\overset{*}{v^l}} - (\lambda_l \underset{a}{v^l})\mu^l, \tag{1.4}$$

а линейная зависимость векторов μ^l и $\underset{a}{v^l}$ доказывается, если учитывать (1.3), (4.3.2) и (5.1.4). Векторы $\underset{a}{v^l}$ однозначно определяют векторы

$$\underset{a}{v_l} = c_{lh}\underset{a}{v^h}, \tag{1.5}$$

удовлетворяющие условиям:

$$\text{а)}\ \underset{a}{v^l}\underset{b}{v_l} = \begin{cases} e_a; & a = b \\ 0; & a \neq b \end{cases} \quad \text{б)}\ \underset{a}{v_l}\mu^l = 0 \tag{1.6}$$

Составим тензор

$$\gamma_{ij} = b_{ij} + \lambda_i\lambda_j + \sum_a e_a \underset{a}{v_i}\underset{a}{v_j}, \tag{1.7}$$

который является невырожденным. С помощью этого тензора определяется тензор

$$b^{ij} = \gamma^{ij} - \mu^i\mu^j - \sum_a e_a \underset{a}{v^i}\underset{a}{v^j}. \tag{1.8}$$

где γ^{ij} — взаимный тензор тензора γ_{ij}.

Легко проверить, что

$$\text{а)}\ b^{ij}b_{jl} = \delta^i_l - \mu^i\lambda_l - \sum_a e_a \underset{a}{v^i}\underset{a}{v_l};$$

$$\text{б)}\ b^{ij}\underset{a}{v_j} = 0; \quad \text{в)}\ b^{ij}\lambda_j = 0. \tag{1.9}$$

Закон преобразования этого тензора при преобразовании оснащения (5.3.1) имеет вид

$$\overline{b}^{ij} = pb^{ij} - \mu^i b^{jl}p_l - \mu^j b^{il}p_l - \gamma/p\mu^i\mu^j,$$

где

$$p_l = c_{lh}p^h, \quad \gamma = -b^{ih}p_ip_h + 2\sum_a (v_lp^l)^2 \tag{1.10}$$

2. *Инвариантное оснащение.* Обозначим через

$$\sigma = g^{ij}b_{ij}; \quad \rho = b^{ij}g_{ij}. \tag{2.1}$$

которые при преобразовании оснащения преобразуются по закону

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{p}\sigma; \quad \overline{\rho} = p\rho. \tag{2.2}$$

Гиперповерхности, для которых $\sigma \neq 0$, будем называть просто-регулярными или просто-нерегулярными изотропными гиперповерхностями. Для таких гиперповерхностей имеет место

Теорема 2.1: *Условие* $\overline{\sigma} = 1$ *однозначно определяет вектор*

нормали, т. е. вектор $\frac{1}{\sigma}\mu^i$ *определяется однозначно и не зависит от того, отправляемся мы от вектора* μ_1^i *или же от вектора* μ_2^i. *В обоих случаях*

$$\overline{\mu}^i = \frac{1}{\sigma_1}\mu_1^i = \frac{1}{\sigma_2}\mu_2^i. \tag{2.3}$$

После конкретного выбора вектора нормали преобразование оснащения принимает вид:

$$\overline{n}^\alpha = n^\alpha + p^i y_i^\alpha; \quad \overline{\mu}^\alpha = \mu^\alpha; \quad \overline{\varkappa}_i = \varkappa_i + g_{ik} p^k \tag{2.4}$$

Первый способ: Поскольку при таких преобразованиях скаляр ρ является инвариантом и не зависит от оснащения, то его можно применять для определения вектора оснащения. Рассмотрим случай

$$\mu^i \frac{\partial \rho}{\partial x^i} = t \neq 0. \tag{2.5}$$

Для такого класса изотропных просторегулярных и простонерегулярных гиперповерхностей определим вектор

$$\lambda_i = \frac{1}{t}\frac{\partial \rho}{\partial x^i}; \quad \mu^i \lambda_i = 1, \tag{2.6}$$

который однозначно, инвариантным образом определяет единственный изотропный вектор оснащения, не лежащий на этой гиперповерхности

$$a_{\alpha\beta} n^\alpha y_i^\beta = \lambda_i; \quad a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0.$$

Второй способ: После конкретного выбора вектора нормали из уравнений

$$\mu^i \mu_{\alpha i} = \tau \mu^\alpha$$

следует, что τ является инвариантом и не зависит от оснащения. Если $\tau \neq 0$ и $\mu^i \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \neq 0$, то с помощью τ аналогичным образом можно ввести инвариантное оснащение. Если же $\tau = 0$, то уравнения

$$a_{\alpha\beta} n^\alpha \mu_i^\beta y_k^i = 0; \quad a_{\alpha\beta} n^\alpha \mu^\beta = 1, \quad a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0 \tag{2.8}$$

однозначно, инвариантным образом определяют вектор оснащения в случае просто-регулярных изотропных гиперповерхностей.

3. *Алгоритм инвариантного оснащения*. Приводится доказательство инвариантности скаляров ρ и σ, заранее не оснащая изотропную гиперповерхность.

Пусть в V_n задано V_{n-1}^1 с метрическим тензором g_{ij} ранга $(n-2)$. Вектор нормали этого V_{n-1}^1 определяется с точностью до скалярного множителя

$$\text{а)}\ \mu^i g_{ij} = 0 \quad \text{б)}\ \mu^\alpha = \mu^i y_i^\alpha; \quad a_{\alpha\beta}\mu^\alpha y_i^\beta = a_{\alpha\beta}\mu^\alpha \mu^\beta = 0. \tag{3.1}$$

Легко заметить, что величины

$$b_{ij} = p^l T_{l,ij}, \tag{3.2}$$

где $T_{l,ij}$ — символы Христофеля, составленные из g_{ij}, являются компонентами тензора. В силу (3.1 а)

$$p^l b_{ij} = p^l p^l T_{l,ij} = 0. \tag{3.3}$$

Составим скаляр $\sigma = g^{ij} b_{ij}$, где g^{ij} — некоторое решение уравнения ([2] стр. 34).

$$g_{ik} g^{kl} g_{lj} = g_{ij} \tag{3.4}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.1: *При любом решении уравнений (3.4) скаляр σ одна и та же.*

Для доказательства теоремы достаточно установить зависимость между любыми двумя решениями g^{ij}_1 и g^{ij}_2 этих уравнений. Оказывается, что

$$g^{ij}_1 = g^{ij}_2 + \mu^i p^j + \mu^j p^i + t p^i p^j \tag{3.5}$$

где t — скаляр, p^i — произвольный вектор.

Из этой теоремы в случае $\sigma \neq 0$ следует

Теорема 3.2: *Каждому вектору μ^i сопоставляется взаимно однозначно скаляр σ и вектор $1/\sigma\mu^i$ определяется однозначно, независимо от выбора вектора μ^i.*

Построим скаляр $\rho = b^{ij} g_{ij}$, где b^{ij} в случае

а) просто-регулярных поверхностей является решением уравнения

$$b_{ik} b^{ks} b_{sj} = b_{ij}; \tag{3.6}$$

б) просто-нерегулярных поверхностей является решением уравнения

$$b_{ik} b^{ks} b_{sj} = b_{ij}; \quad b^{ks} v_s = 0 \tag{3.7}$$

Зависимость между любыми двумя решениями уравнений (3.6) и (3.7) выражается в виде

$$b^{ij}_1 = b^{ij}_2 + q^i \mu^j + q^j \mu^i + \nu \mu^i \mu^j, \tag{3.8}$$

где ν — скаляр, q^i — вектор, который в случае (б) удовлетворяет условию $q^i v_i = 0$. Это доказывает теорема 3.3

Теорема 3.3: *Скаляр ρ является инвариантом. С помощью ρ осуществляется инвариантное оснащение.*

Результаты этой статьи были доложены на 4-ой Всесоюзной конференции по геометрии.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову.

Ереванский государственный
университет

Բզոտարոպ ճիպնեմախնեուսյբճնեի իճվարիանտ նատեցմառ մառիճ

Հնդիճախի նախորդ նոտվատճնեյոում ($^{1-6}$) ատաղոտվում է p Δ n տիպոլյատիների իճվարիանտուսյուճը պարզ-ռեգուլյար իզոտրոպ ճիպնեմատիրնուսյուճների փնպդում, ատաղոտրնեյով հիմնական ռենզորների ճնոփոխման օրինքը.

Այս նոտվառում նոգտվում է ատաղոտվնեյ այդ տիպոլյատիների իճվարիանտուսյուճը պարզ-ռեգուլյար փնպդ նառար, նյու նորմոյ վնճոտրի նանկրնա բնորուսյան մերոդ և ճատարել իճվարիանտ նատեցում.

Երրորդ պարագրաֆում այդ խնդիրները լուծված են, առանց նախորդ նատեցման, որը ճնոտվորուսյուն է տանդում անցնել իզոտրոպ տարածուսյուններից տարմանման.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. А. Шмелев*, ДАН СССР, 98, 701–704, 15 (1954). [2] *Ф. Р. Гантмахер*, Теория матриц, „Наука", М., 1967. [3] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм ССР, т. XLV, № 3 (1967). [4] *Н. Г. Галстян*, Сб. „Гравитация и теория относительности", вып. 4–5, изд. КГУ, 1968. [5] *Н. Г. Галстян*, ДАН Арм ССР, т. XLIX, 4 (1969). [6] *Н. Г. Галстян*, Тезисы 5-ой международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1968. [7] *А. Е. Либер*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 13, 407–446, М., 1968.