ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
L. 1970 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.30

Р. С. Минасян

К решению задачи косого изгиба парой сил составного призматического бруса в квадратичной теории упругости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 28/XI 1969)

Задача чистого косого изгиба однородного призматического бруса при квадратичных физических и геометрических зависимостях была решена А. Н. Пожалостиным и П. М. Ризом ([1]), а при линейных физических и квадратичных геометрических зависимостях Р. С. Минасяном и Н. Н. Мустафаевой ([2]).

Та же задача при квадратичных физических и геометрических зависимостях для составного бруса решена автором ([3]).

Представляет интерес решение рассматриваемой задачи для составного бруса при линейных физических и квадратичных геометрических зависимостях, что однако невозможно получить из упомянутого решения ([3]).

В настоящей статье ставится задача — дать такое решение задачи чистого косого изгиба составного бруса в квадратичной теории упругости из которого можно было бы получить:

а) решение при линейных физических и квадратичных геометрических зависимостях;

б) решение при квадратичных, как физических так и геометрических зависимостях.

Заметим при этом, из нижеизложенного решения, решение в постановке „б" получается значительно проще опубликованного автором в упомянутой выше статье ([3]).

Предположим, что имеем призматический брус, состоящий из m не касающихся друг друга параллельных стержней различных материалов (с упругими постоянными λ_j, μ_j, E_j, σ_j), окруженных упругой средой (с упругими постоянными λ_0, μ_0, E_0, σ_0). Образующие боковых поверхностей составляющих стержней и упругой среды параллельны.

Поперечное сечение такого составного бруса состоит из S_j односвязных областей с границами L_j ($j = 1, 2, \cdots, m$), соответствующих стержням и области S_0, соответствующей окружающему материалу с границей $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_{m+1}$.

Следуя Н. И. Мусхелишвили ([4]) и А. К. Рухадзе ([5]), примем начало координат в обобщенном центре инерции закрепленного основания, оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по его обобщенным главным осям, а ось $O\zeta$ — параллельно образующим боковых поверхностей F_j.

Положим, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность свободна от внешних напряжений, а заданные действующие внешние силы на свободном основании эквивалентны двум парам сил с моментами M_η и M_ξ, расположенными соответственно в плоскостях $\xi O\zeta$ и $\eta O\zeta$.

Задачу решаем с учетом деформированного состояния бруса, используя при этом соотношения, установленные А. К. Рухадзе ([5]).

Примем:

$$u = -\frac{1}{2}\beta_1\left[\zeta^2 + \sigma_j(\xi^2 - \eta^2)\right] - \beta_1 u^{(2)} - \beta_2(\sigma_j\xi\eta + u^{(3)}) + \beta_1^2 u_1 + \beta_2^2 u_2 + \beta_1\beta_2 u',$$

$$v = -\beta_1(\sigma_j\xi\eta + v^{(2)}) - \frac{1}{2}\beta_2\left[\zeta^2 + \sigma_j(\eta^2 - \xi^2)\right] -$$

$$- \beta_2 v^{(3)} + \beta_1^2 v_1 + \beta_2^2 v_2 + \beta_1\beta_2 v',$$

$$w = (\beta_1\xi + \beta_2\eta)\zeta + \beta_1^2 w_1 + \beta_2^2 w_2 + \beta_1\beta_2 w', \tag{1}$$

где

$$\beta_1 = J_{22}^{-1}M_\eta, \quad \beta_2 = -J_{11}^{-1}M_\xi,$$

$$J_{11} = \sum_j \iint_{S_j} E_j^{(1)}\xi\, d\xi\, d\eta, \quad J_{22} = \sum_j \iint_{S_j} E_j^{(2)}\eta\, d\xi\, d\eta,$$

$$E_j^{(1)} = E_j\xi - \lambda_j\theta^{(2)}, \quad E_j^{(2)} = E_j\eta - \lambda_j\theta^{(3)}, \quad \theta^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}; \tag{2}$$

u_1, v_1, а также u_2, v_2 — известные функции (вторичные эффекты при чистом изгибе — первые парой M_η, вторые — M_ξ), $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ и $u^{(3)}$, $v^{(3)}$ — решение в смещениях второй и третьей вспомогательных задач о плоском деформированном состоянии ([4, 5]), u', v', w' — искомые функции, ξ, η, ζ — координаты точки до деформации.

В соответствии с поставленной задачей, во всех последующих вычислениях будем сохранять лишь члены с коэффициентами β_1, β_2 и $\beta_1\beta_2$ (последние выражают взаимовлияние двух чистых изгибов).

Зависимость между компонентами напряжений и деформаций примем в квадратичной форме, предложенной Ф. Д. Мурнаханом с постоянными, определенными по гипотезе Н. В. Зволинского и П. М. Риза ([6]), то есть в виде:

$$\sigma_{11} = \lambda_j(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_j\varepsilon_{11} + k\left[\frac{3}{2}(\lambda_j + 2\mu_j)\varepsilon_{11}^{2} + \frac{\lambda_j}{2}(\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) - \right.$$

$$-(\lambda_j+2\mu_j)(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\varepsilon_{11}^2-2\lambda_j\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}+(3\lambda_j+5\mu_j)(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{13}^2)+3\lambda_j\varepsilon_{23}^2\Big|_1^3\cdots \tag{3}$$

Постоянная k введена автором. При $k=0$ получаем закон Гука, а при $k=1$ квадратичную зависимость между компонентами напряжений и деформаций.

Следуя последовательности вычислений, изложенной в работе [1], вычисляем компоненты напряжений по формулам (3):

$$\tau_{11}=\beta_1\tau_{11}^{(2)}+\beta_2\tau_{11}^{(1)}+\beta_1\beta_2(\tau_{11}^{(12)}+\tau_{11}'),$$

$$\tau_{12}=\beta_1\tau_{12}^{(2)}+\beta_2\tau_{12}^{(1)}+\beta_1\beta_2(T^2+\tau_{12}^{(12)}+\tau_{12}'),$$

$$\tau_{22}=\beta_1E_j^{(2)}+\beta_2E_j^{(1)}+\beta_1\beta_2(\tau_{22}^{(12)}+\tau_{22}'),$$

$$\tau_{13}=\beta_1\beta_2\left[-\mu_j\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\eta}+\eta\right)\xi+\tau_{13}'\right], \tag{4}$$

где

$$\tau_{11}^{(2)}=-\lambda_j\alpha_j\xi\eta+\mu_j(X_x^{(2)}+X_x^{(1)}+X_x^{(12)})+2(k-1)\lambda^*\xi\eta,$$

$$\tau_{12}^{(12)}=\mu_j(X_y^{(1)}+X_y^{(1)}+X_y^{(12)}),$$

$$\tau_{22}^{(12)}=(4E_j-2\lambda_j\alpha_j)\alpha_j\xi\eta+2(k-1)E_j^*\xi\eta+\mu_j(Z_z^{(2)}+Z_z^{(1)}+Z_z^{(12)}), \tag{5}$$

причем

$$X_x^{(2)}\equiv X_x^{(l)}=(1-\alpha_j)\eta\tau_{11}^{(l)}+\lambda_j\alpha_j\xi U^{(l)}-2\mu_j\alpha_j\xi\frac{\partial v^{(l)}}{\partial\xi}+(k-1)\alpha_j^*\eta\tau_{11}^{(l)},$$

$$Y_y^{(2)}\equiv Y_y^{(l)}=(1-\alpha_j)\eta\theta^{(l)}+\lambda_j\alpha_j\xi U^{(l)}+2\mu_j\alpha_j\xi\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\eta}+(k-1)\alpha_j^*\eta\tau_{22}^{(l)},$$

$$Z_z^{(2)}\equiv Z_z^{(l)}=(E_j-2\lambda_j\alpha_j)\eta\theta^{(l)}+\lambda_j\alpha_j\xi U^{(l)}+(k-1)(E_j+\lambda_j\alpha_j)\eta\theta^{(l)},$$

$$X_y^{(2)}\equiv X_y^{(l)}=(1-\alpha_j)\eta\tau_{12}^{(l)}-\mu_j\alpha_j\xi V^{(l)}+(k-1)\alpha_j^*\eta\tau_{12}^{(l)},$$

$$X_x^{(12)}\equiv X_x^{(ln)}=\tau_{12}^{(l)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\eta}+\tau_{12}^{(n)}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\eta}-\tau_{11}^{(l)}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}-\tau_{11}^{(n)}\frac{\partial v^{(l)}}{\partial\eta}+$$

$$\frac{\lambda_j+\mu_j}{2}U^{(l)}U^{(n)}+(k-1)\left[\frac{3\lambda_j+5\mu_j}{2}\mu_j^{-2}\tau_{12}^{(l)}\tau_{12}^{(n)}+\right.$$

$$\left.+3(\lambda_j+2\mu_j)\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\xi}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\eta}+3\lambda_j\frac{\partial v^{(l)}}{\partial\eta}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}-\frac{\partial v^{(l)}}{\partial\eta}\tau_{11}^{(n)}-\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}\tau_{11}^{(l)}\right], \tag{6}$$

$$Z_z^{(12)}\equiv Z_z^{(ln)}=\lambda_j\left(\frac{1}{2}U^{(l)}U^{(n)}-2\theta^{(l)}\theta^{(n)}\right)+(k-1)\lambda_j\left[\theta^{(l)}\theta^{(n)}-\right.$$

$$\left.-3\left(\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}+\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(l)}}{\partial\eta}\right)+3\mu_j^{-2}\tau_{12}^{(l)}\tau_{12}^{(n)}\right],$$

$$X_y^{(12)}\equiv X_y^{(ln)}=\frac{\lambda_j+\mu_j}{2}T^{(ln)}-\mu_j\left(\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\xi}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\eta}+\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\xi}\frac{\partial u^{(l)}}{\partial\eta}+\right.$$

$$+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}\Big)+\frac{\lambda_j^{**}}{2}(k-1)\,T^{(in)},$$

$$T^{(in)}=\theta^{(i)}\tau_{12}^{(n)}+\theta^{(n)}\tau_{12}^{(i)},\quad i=2,\ n=3,\quad U^{(i)}=\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}-\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi},$$

$$\lambda_j^{*}=1{,}5\,\lambda_j(1-\sigma_j),\quad \sigma_j^{*}=1+2\sigma_j,\quad E_j^{*}=2\lambda_j^{*}\sigma_j+(1{,}5+2\sigma_j)E_j,$$

$$\lambda_j^{**}=0{,}5\,(\lambda_j+3\mu_j)$$

$X_x^{(3)}$, $Y_y^{(3)}$, $X_y^{(3)}$, $Z_z^{(3)}$, τ_{22}, τ_{23} получаются соответственно из $Y_y^{(2)}$, $X_x^{(2)}$, $X_y^{(2)}$, $Z_z^{(2)}$, τ_{11}, τ_{13} перестановкой ξ и η, заменой $u^{(2)}$ на $v^{(3)}$, $v^{(2)}$ на $u^{(3)}$, нижнего индекса „1" на „2".

Уравнения равновесия, отнесенные к деформированному состоянию, соответствующие напряжениям (4), после ряда преобразований, представятся так:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{11}'}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{12}'}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{13}'}{\partial\zeta}+\mu_j\frac{\partial V_\xi}{\partial\xi}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{21}'}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{22}'}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{23}'}{\partial\zeta}+\mu_j\frac{\partial V_\eta}{\partial\eta}=0,\\
&\frac{\partial\tau_{31}'}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{32}'}{\partial\eta}+\frac{\partial\tau_{33}'}{\partial\zeta}-\mu_j N\zeta=0,
\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$V_\xi=-(1+\lambda_j\mu_j^{-1}\sigma_j)\,\xi\eta+2(k-1)\Big(\lambda_j^{*}\mu_j^{-1}\xi\eta+\frac{\mu_j+2\lambda_j}{\mu_j}\int^{\xi}\theta^{(2)}d\xi\Big)+$$

$$+H^{(2)}+H^{(3)}+V_\xi^{(23)},$$

$$\mu V_\xi^{(23)}\equiv\mu V^{(in)}=\mu_j^{*}\Big(2\frac{\lambda_j^{**}}{\mu_j^{**}}U^{(i)}U^{(n)}-\mu_j^{-1}\mu_j^{**}\theta^{(i)}\theta^{(n)}\Big)+$$

$$+(k-1)\Big[\lambda_j\Big(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\xi}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}\Big)-\mu_j^{**}\Big(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(n)}}{\partial\eta}+$$

$$+\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\xi}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}\Big)+\frac{3\lambda_j+5\mu_j}{2\mu_j^2}\tau_{12}^{(i)}\tau_{12}^{(n)}+\lambda_j^{**}\Big(2\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial\xi}+$$

$$+\frac{1}{2}\int^{\xi}\frac{\partial T^{(in)}}{\partial\eta}d\xi\Big)\Big],$$

$$\mu_j\frac{\partial H^{(i)}}{\partial\xi}=\mu_j\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\lambda_j^{**}}{\mu_j^{**}}\xi\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\xi}-(1-k)\,\sigma_j^{*}\tau_{12}^{(i)},$$

$$N=(1+\lambda_j\cdot\mu_j^{-1})\Big(\frac{\partial\theta^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\theta^{(n)}}{\partial\eta}\Big),\tag{8}$$

$$\mu_j\frac{\partial H^{(i)}}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\tau_{22}^{(i)}+\frac{\lambda_j}{2}\frac{\lambda_j^{**}}{\mu_j^{**}}\xi\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\eta}+(1-k)\,\sigma_j^{*}\tau_{11}^{(i)},\quad i=2,\ n=3.$$

$$\mu_j^* = \frac{\lambda_j + \mu_j}{2}, \quad \mu_j^{**} = \lambda_j + 2\mu_j$$

$H^{(3)}$ и $V_\eta^{(n)}$, получаются соответственно из $H^{(2)}$ и $V_\xi^{(n)}$ вышеуказанной перестановкой.

Учитывая, что зависимость между $\tau_{11}, \tau_{22}, \cdots$ и соответствующими компонентами деформаций линейная, нетрудно составить условия совместности в напряжениях, соответствующие уравнениям равновесия (7).

Граничные условия, отнесенные к деформированному состоянию, представятся так:

$$\left\{X_n' + X_n^* + \left| \zeta^2 + \frac{\lambda_j}{2}(\xi\theta^{(2)} - \eta\theta^{(1)}) + \mu B^{(23)} \right| \cos\widehat{n\eta}\right\}_j = \{\cdots\}_0, \tag{9}$$

$$\left\{Y_n' + Y_n^* + \left| \zeta^2 + \frac{\lambda}{2}(\eta\theta^{(1)} - \xi\theta^{(2)}) + \mu C^{(23)} \right| \cos\widehat{n\xi}\right\} = \{\cdots\}_0, \quad (Z_n' + Z_n^*)_j = (\cdots)_j$$

$$X_n^* = \frac{\lambda_j}{2}(\xi U^{(2)} - \eta U^{(3)}) - \lambda_j \sigma_j \xi\eta + 2(k-1)[\lambda^* \xi\eta \cos\widehat{n\xi} +$$

$$\sigma_j(\xi X_n^{(3)} + \eta X_n^{(2)})] + \mu_j A_j^{(23)},$$

$$Z_n^* = \mu_j \left| \frac{du^{(3)}}{dn} + \frac{dv^{(2)}}{dn} + (1 + 2\sigma_j)(\eta\cos\widehat{n\xi} + \xi\cos\widehat{n\eta}) \right|,$$

$$X_n^{(l)} = \tau_{11}^{(l)} \cos\widehat{n\xi} + \tau_{12}^{(l)} \cos\widehat{n\eta}, \cdots$$

$$\mu_j A_j^{(23)} = \mu_j A_j^{(ln)} = \tau_{11}^{(l)} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \eta} + \tau_{11}^{(n)} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial \eta} - \tau_{12}^{(l)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta} - \tau_{12}^{(n)} \frac{\partial u^{(l)}}{\partial \eta} + X_z^{(ln)},$$

$$\mu_j B_j^{(23)} = \mu_j B_j^{(ln)} = \tau_{12}^{(l)} \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi} + \tau_{12}^{(n)} \frac{\partial u^{(l)}}{\partial \xi} - \tau_{11}^{(l)} \frac{\partial v^{(n)}}{\partial \xi} - \tau_{11}^{(n)} \frac{\partial v^{(l)}}{\partial \xi} + X_z^{(ln)}, \tag{10}$$

Y_n^*, $C^{(23)}$, получим соответственно из X_n^* и $B^{(23)}$, вышеуказанной перестановкой.

Итак, требуется найти $\tau_{11}, \tau_{22} \cdots$, которые удовлетворяли бы уравнениям равновесия (7), условиям совместности и граничным условиям (9). Задачу решаем полуобратным методом Сен-Венана.

Зададимся видом искомых компонентов напряжений и составим некоторый произвол, за счет которого удовлетворим всем необходимым условиям. Примем:

$$\tau_{11}' = \tau_{11}^{(0)} + \sigma_{11}^{(0)}, \quad \tau_{22}' = \tau_{22}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)}, \quad \tau_{13}' = -\mu_j \omega_\xi' \zeta + \mu_j(c_\xi' + \tau^* l)(\varphi_\xi' - \eta),$$

$$\tau_{33}' = \tau_{33}^{(0)} + \alpha^* E_j^{(1)} + \beta_1^* E_j^{(2)} + \beta_2^* E_j^{(3)}, \quad \tau_{23}' = -\mu_j \omega_\eta' \zeta + \mu_j(c_\eta' + \tau^* l)(\varphi_\eta' + \xi),$$

$$\tau_{12}' = -\mu_j \left| \zeta^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\xi \partial\eta} + \frac{c}{2}(\xi^2 - \eta^2) \right| + \tau_{12}^0, \tag{11}$$

где

$$\tau_{11}^{(0)} = \mu_j\left(\omega - V_\xi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - c\varphi\right), \qquad \sigma_{ij}^{(0)} = \alpha^*\tau_{ij}^{(1)} + \beta_1^*\tau_{ij}^{(2)} + \beta_2^*\tau_{ij}^{(3)},$$

$$\tau_{22}^{(0)} = \mu_j\left(\omega - V_\eta + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} - c\varphi\right), \qquad \omega = u^{(3)} + v^{(2)} + (1 + 2\sigma_j)\,\xi\eta \tag{12}$$

$$\tau_{33}^{(0)} = \mu_j\left[-2\omega + \mu_j^{-1}E_j\xi\eta - \sigma_j(V_\xi + V_\eta) + \sigma_j\Delta\Phi + 2c\varphi\right],$$

l—длина бруса, φ—известная функция кручения (4).

Система напряжений (12) удовлетворяет уравнениям равновесия (7). Условия совместности и граничные условия (9) будут удовлетворены, если неизвестная функция Φ определена условиями:

$$\Delta\Delta\Phi = \frac{\partial^2 V_\xi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial\xi^2} + (1 - \sigma_j)^{-1}\left[N - \sigma_j\left(\frac{\partial^2 V_\xi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial\eta^2}\right)\right]$$

в областях S_j,

$$\mu_j\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_j - \mu_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)_0 = \int\limits_S\left\{\left[\mu A^* - \mu\frac{c}{2}(\xi^2 - \eta^2) + (k - 1)\,T^{(23)}\right]\cos\widehat{n\xi} + \right.$$

$$+ (\mu B^* + E\xi\eta)\cos\widehat{n\eta} + 2(k - 1)\,\sigma(\xi Y_n^{(3)} + \eta Y_n^{(2)}) -$$

$$\left. - (k - 1)\cos\widehat{n\eta}\int\limits^{\xi}\left[2(\mu + 2\lambda)\theta^{(2)} + \frac{\partial T^{(23)}}{\partial\xi}\right]d\eta\right\}_j ds - \int\limits_S\left[\cdots\right]ds$$

$$\mu_j\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_j - \mu_0\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)_0 = \int\limits_S\left\{(-E\xi\eta - \mu B^* + \mu c\varphi)\cos\widehat{n\xi} + \right.$$

$$\left[\mu A^* + \mu\frac{c}{2}(\xi^2 - \eta^2) - (k - 1)\,T^{(23)}\right]\cos\widehat{n\eta} + (k - 1)\cos\widehat{n\xi}\int\limits_S\left[2(\mu + 2\lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial T^{(23)}}{\partial\eta}\right]d\xi - 2\sigma(k - 1)(\xi X_n^{(3)} + \eta X_n^{(2)})\Big\}_j ds - \int\limits_S\{\cdots\}_0\, ds$$

на контурах L_j $(j = 1, 2, \cdots, m + 1,\ \mu_{m+1} \equiv 0)$, где

$$A_j^* = \frac{\lambda_j}{2}\mu_j^{-1}(\eta\theta^{(3)} - \xi\theta^{(2)}) + K^{(23)},$$

$$B_j^* = \frac{\lambda_j}{2}\mu_j^{-1}(\xi U^{(2)} - \eta U^{(3)}) - N^{(23)} - H^{(3)} - H^{(2)} + u^{(3)} + v^{(2)}, \tag{13}$$

$$K^{(23)} \equiv K^{(in)} = \mu_j^{-1}\mu_j^*(U^{(i)}\theta^{(n)} + U^{(n)}\theta^{(i)}), \quad N^{(23)} \equiv N^{(in)} =$$

$$= -\mu_j^{-1}\mu_j^*\left(\mu_j^{**}\theta^{(i)}\theta^{(n)} + \frac{1}{\mu_j^{**}}U^{(i)}U^{(n)}\right), \quad i = 1, \quad n = 2 \tag{13}$$

Используя формулу Грина доказывается, что $\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}$, $\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}$, $\mu\Phi$ однозначны при обходе контуров L_j при

$$c = D^{-1}\left\{J_{33} - J_{22} + \sum_j \iint_{S_j} \left[\mu K^{(3)} + \lambda\left(\eta f^{(3)} - \xi\theta^{(3)}\right)\right] d\xi\, d\eta\right\},$$

где D жесткость бруса при кручении.

Постоянные a^*, β_1^*, β_2^*, τ^* определяются из условия равенства усилий на торце $\zeta = l$ парам M_ξ и M_η.

Заменяя в формулах (4) τ_{11}, τ_{22}, $\cdots$ их значениями, получим окончательные выражения напряжений взаимовлияния двух чистых изгибов, которые при $k = 0$ соответствуют решению задачи в постановке „а", а при $k = 1$ в постановке „б".

Нетрудно установить из полной системы напряжений, что при чистом косом изгибе нейтральная ось не проходит через центр инерции сечения; в сечениях $\zeta = C$ имеют место также напряжения τ_{11} и τ_{22} (так как напряжения отнесены к деформированному состоянию).

Характерно при этом, что чистый косой изгиб сопровождается кручением, напряжения от которого пропорциональны $\tau^* = D^{-1}(J_{22} - J_{33})$.

Азербайджанский институт нефти и химии
им. М. Азизбекова

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Բաղադրյալ պրիզմատիկ ձողի ուժազույգով թեք ծռման խնդրի լուծման շուրջը առաձգականության քառակուսային տեսության մեջ

Փոքր պարամետրի ներմուծման մեթոդով հոդվածում դիտարկված է առաձգական միջավայրով շրջապատված մի շարք զուգահեռ առաձգական ձողերից կազմված բաղադրյալ պրիզմատիկ ձողի ուժազույգով թեք ծռման խնդիրը։

Ենթադրվում է, որ ձողի մի ծայրն ամրակցված է, իսկ մյուս ազատ ծայրում կիրառված աված բոլոր ուժերը բերվում են ձողի գլխավոր տարբեր հարթություններում գտնվող ուժազույգերի։

Խնդիրը բերվում է ձողի լայնական կտրվածքի բաղադրյալ տիրույթում բիհարմոնիկ ֆունկցիայի որոշման։

Ստացված ընդհանուր լուծումը իր մեջ ընդգրկում է հետևյալ երկու դեպքերը.

ա) խնդիրը ֆիզիկորեն գծային է, երկրաչափորեն քառակուսային,

բ) խնդիրը ինչպես ֆիզիկորեն, այնպես էլ երկրաչափորեն քառակուսային է։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Пожалостин* и *П. М. Риз*. Прик. мат. и мех., т. VI, 1942. [2] *Р. С. Минасян*, *Н. Н. Мустафаева*. Известия АН Азерб. ССР, № 4, 1968. [3] *Р. С. Минасян*. Труды Груз. Политех. института, № 2, 1955. [4] *Н. И. Мусхелишвили*. Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. третье. М.—Л., 1949. [5] *А. К. Рухадзе*. Труды Груз. Политехн. института, № 30, 1954. [6] *Н. В. Зволинский* и *П. М. Риз*. Изв. АН СССР, отд. тех. наук, № 8—9, 1938