ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

L 1970 2

МАТЕМАТИКА

УДК 513.731

Л. П. Сафарян

О некоторых классах многообразий конусов второго порядка в P_n

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 17/IX 1969)

1. В настоящей работе изучается геометрия n-параметрических многообразий (k) конусов второго порядка в проективном пространстве P_n. В отличие от работ ([1,2]), посвященных изучению таких многообразий в трехмерном пространстве, в этой работе изучение многообразий конусов ведется инвариантными методами ([1-3]). При этом строится инвариантное оснащение многообразия конусов, и дается инвариантная характеристика некоторых частных классов таких многообразий.

2. В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим n-параметрическое многообразие (k) невырожденных конусов второго порядка. Предположим, что вершина A конуса многообразия (k) описывает n-мерную область D пространства P_n. Поместим точку A_0 подвижного репера $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ в вершину A конуса. Тогда уравнение этого конуса принимает вид

$$a_{ij}x^i x^j = 0, \tag{1}$$

где $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Здесь и в дальнейшем все латинские индексы принимают значения $1, 2, \cdots n$, а греческие индексы $0, 1, \cdots, n$.

Уравнения инфинитезимальных перемещений репера A_α записываются в виде

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{2}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \tag{3}$$

Формы $\omega_0^i = \omega^i$ являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов главных параметров. Назовем эты формы базисными формами. Тогда если точка A_0 неподвижна, то $\omega^i = 0$ и стационарная подгруппа точки A_0 определяется уравнениями

$$\delta A_0 = \pi_0^0 A_0, \quad \delta A_i = \pi_i^0 A_0 + \pi_i^j A_j, \tag{4}$$

где через δ обозначено дифференцирование по параметрам стационарной подгруппы, а $\pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha(\delta)$. Считая кроме того, что репер нормирован условием $(A_0, A_1 \cdots A_n) = 1$, мы получим

$$\omega_\alpha^\alpha = \pi_\alpha^\alpha = 0. \tag{5}$$

3. Найдем условия неподвижности точки $M = x^0 A_0 + x^i A_i$ при преобразованиях подвижного репера, определяемого уравнениями (2). Если точка M неподвижна, то $dM = \theta M$. Отсюда следует, что

$$dx^\alpha = \theta x^\alpha - x^\beta \omega_\beta^\alpha. \tag{6}$$

При $\omega^i = 0$ эти уравнения принимают вид

$$\delta x^i = \theta x^i - x^j \pi_j^i, \quad \delta x^0 = \theta x^0 - x^i \pi_i^0 - x^0 \pi_0^0. \tag{7}$$

Эта система является условием инвариантности точки M при преобразованиях стационарной подгруппы.

Условия инвариантности гиперплоскости, базисными точками которой являются точки

$$M_i = x_i A_0 + A_i \tag{8}$$

записываются в виде $\delta M_i = \theta_i^j M_j$. Отсюда находим

$$\nabla_\delta x_i = -x_i \pi_0^0 - \pi_i^0, \tag{9}$$

где через ∇_δ обозначен оператор ковариантного дифференцирования по параметрам стационарной подгруппы, такой, что

$$\nabla_\delta x_i = \delta x_i - x_j \pi_i^j.$$

Условия инвариантности конуса (1) по отношению к преобразованиям стационарной подгруппы находим из соотношения $\delta(a_{ij} x^i x^j) = \theta a_{ij} x^i x^j$. Учитывая (7), получим

$$\nabla_\delta a_{ij} \equiv \delta a_{ij} - a_{ik}\pi_j^k - a_{kj}\pi_i^k = \theta a_{ij}.$$

Это означает, что коэффициенты a_{ij} уравнения конуса (1) образуют относительный тензор. Нормируем коэффициенты уравнения конуса условием $a = det\,(a_{ij}) = 1$. Тогда $\delta a = a^{ij}\delta a_{ij} = 0$. После подстановки значений a_{ij} из условий инвариантности конуса, получим $2\pi_i^i + n\theta = 0$. Учитывая уравнение (5), находим $\theta = \frac{2}{n}\pi_0^0$.

Таким образом условие инвариантности конуса (1) записывается в виде:

$$\nabla_\delta a_{ij} = \frac{2}{n} a_{ij} \pi_0^0. \tag{10}$$

4. Найдем основные геометрические объекты и тензоры многообразия конусов (k). Из соотношений (10) следует, что

$$\nabla a_{ij} = \frac{2}{n} a_{ij}\omega_0^0 + \lambda_{ijk}\omega^k, \tag{11}$$

где через ∇ обозначен оператор ковариантного дифференцирования по всем параметрам проективной группы преобразований. Из (11), мы получим $\lambda_{ijk} = \lambda_{jik}$, а из условия $det(a_{ij}) = 1$ — соотношение

$$a^{ij}\lambda_{ijk} = 0. \tag{12}$$

Далее, дифференцируя (11) внешним образом и применяя лемму Картана, находим

$$\nabla\lambda_{ijk} = -\frac{n-2}{n}\lambda_{ijk}\omega_0^0 - a_{jk}\omega_i^0 - a_{ik}\omega_j^0 + \frac{2}{n}a_{ij}\omega_k^0 + \lambda_{ijke}\omega^e. \tag{13}$$

Таким образом, величины λ_{ijk} вместе с тензором a_{ij} образуют геометрический объект—фундаментальный объект первого порядка. Величины λ_{ijke} симметричны по двум первым и двум последним индексам.

Введем тензор a^{ij}, обратный тензору a_{ij}, такой что $a^{ik}a_{ke} = \delta^i_e$. Дифференцируя это соотношение, находим $da^{ij} = -a^{ik}a^{ej}da_{ke}$, откуда

$$\nabla a^{ij} = -\frac{2}{n}a^{ij}\omega_0^0 - a^{ik}a^{ej}\lambda_{kem}\omega^m. \tag{14}$$

Обозначив

$$\lambda_i = -\frac{n}{(n-1)(n+2)}a^{jk}\lambda_{ijk}, \tag{15}$$

находим

$$\nabla\lambda_i = -\lambda_i\omega_0^0 + \omega_i^0 + \lambda_{ij}\omega^j. \tag{16}$$

Эти уравнения показывают, что величины λ_i образуют геометрический объект.

Далее, обозначив

$$a_{ijk} = \lambda_{ijk} + a_{ik}\lambda_j + a_{jk}\lambda_i - \frac{2}{n}a_{ij}\lambda_k, \tag{17}$$

получим

$$\nabla a_{ijk} = -\frac{n-2}{n}a_{ijk}\omega_0^0 + t_{ijke}\omega^e, \tag{18}$$

откуда следует, что a_{ijk} является относительным тензором. Этот тензор, симметричный по первым двум индексам, относится к окрестности первого порядка. Он удовлетворяет условиям

$$a^{ij}a_{ijk} = 0, \quad a^{jk}a_{ijk} = 0, \tag{19}$$

первое из которых следует из соотношения (12), а второе из (15) и (17). Дифференцируя (16) внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\nabla\lambda_{ij} = -2\lambda_{ij}\omega_0^0 - \lambda_i\omega_j^0 - \lambda_j\omega_i^0 + \mu_{ijk}\omega^k. \tag{20}$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Обозначив

$$b_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_i \lambda_j \tag{21}$$

находим

$$\nabla b_{ij} = -2b_{ij}\pi_0^0 + t_{ijk}\omega^k.$$

Эти уравнения означают, что b_{ij} является относительным тензором. Этот тензор определяется окрестностью второго порядка многообразия (k).

5. Область D проективного пространства P_n называется оснащенной, если к каждой ее точке A присоединена гиперплоскость π, не проходящая через точку A (4). Многообразие конусов (k) позволяет построить инвариантное оснащение области D, описываемой вершиной конуса. В самом деле, уравнения (16) при $\omega^i = 0$ принимают вид:

$$\nabla_\delta \lambda_i = -\lambda_i \pi_0^0 + \pi_i^0. \tag{22}$$

Сравнивая эти уравнения с условием инвариантности гиперплоскости (9), заключаем, что если взять $x_i = -\mu_i$, то точки (8) будут определять инвариантную гиперплоскость. Базисными точками этой гиперплоскости будут точки

$$M_i = A_i - \lambda_i A_0. \tag{8'}$$

Уравнение этой гиперплоскости можно записать в виде:

$$\lambda_i x^i + x^0 = 0. \tag{23}$$

Таким образом, каждому конусу многообразия (k) мы поставили в соответствие гиперплоскость (23), внутренним образом связанную с этим многообразием и следовательно определили инвариантное оснащение области D.

Теперь можно выяснить геометрический смысл тензора b_{ij}. Дифференцируя соотношения (8) и учитывая (16) и (21), получим:

$$dM_i = -b_{ij}\omega^j A_0 + (\omega_i^j - \lambda_i \omega_0^j) M_j. \tag{24}$$

Отсюда видно, что тензор b_{ij} определяет перемещение инвариантной гиперплоскости (23). В частности, при $b_{ij} = 0$ гиперплоскость (23) будет неподвижной.

6. Определение. *Многообразие конусов второго порядка называется конквадричным, если оно огибает некоторую неподвижную гиперквадрику.*

Если конус (1) описан около некоторой гиперквадрики, то ее уравнение имеет вид:

$$Q \equiv s a_{ij} x^i x^j + (\xi_i x^i + x^0)^2 = 0, \tag{25}$$

где $\xi_i x^i + x^0 = 0$ есть полярная гиперплоскость вершины конуса относительно этой гиперквадрики. С другой стороны, уравнение (25) при переменном s, будет определять пучок гиперквадрик, касающихся конуса (1). Следовательно, если известно, что многообразие конусов конквадрично, то в пучке гиперквадрик (25) есть неподвижная гиперквадрика.

Теорема 1. *Для того, чтобы многообразие конусов (k) было конквадричным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{ijk} = 0. \tag{26}$$

Необходимость. Пусть гиперквадрика (25) для некоторого значения s неподвижна. Тогда $dQ = 2\Omega \cdot Q$. Дифференцируя (25) с учетом уравнений (6) и приравнивая соответствующие коэффициенты левой и правой части полученного соотношения, находим:

$$\nabla (sa_{ij} + l_i l_j) - l_i \omega^0_j - l_j \omega^0_i = 2(\Omega - \theta)(sa_{ij} + l_i l_j), \tag{27}$$

$$\nabla l_i - l_i \omega^0_0 - \omega^0_i - (sa_{ij} + l_i l_j)\omega^j = 2(\Omega - \theta) l_i, \tag{28}$$

$$-2\omega^0_0 - 2l_k \omega^k = 2(\Omega - \theta). \tag{29}$$

Из уравнений (28) и (29) получается, что

$$\nabla l_i = -l_i \omega^0_0 + \omega^0_i + (sa_{ij} - l_i l_j)\omega^j. \tag{28'}$$

Из (27) с учетом уравнений (29) и (28'), получим:

$$a_{ij} ds + \frac{2(n+1)}{n} s a_{ij} \omega^0_0 + s(\lambda_{ijk} + a_{ik} l_j + a_{jk} l_i + 2a_{ij} l_k)\omega^k = 0.$$

Свертывая это соотношение с a^{ij}, находим $ds = -\frac{2(n+1)}{n} s(\omega^0_0 + l_k \omega^k)$. Подставляя значение ds, получим:

$$\lambda_{ijk} + a_{ik} l_j + a_{jk} l_i - \frac{2}{n} a_{ij} l_k = 0.$$

Свертывая это соотношение с тензором a^{ij}, находим $l_j = \lambda_j$. Следовательно, $a_{ijk} = 0$. Одновременно равенство $l_i = \lambda_i$ показывает, инвариантная гиперплоскость (23), в этом случае совпадает с полярной гиперплоскостью точки A_0 относительно неподвижной гиперквадрики.

Достаточность. Пусть $a_{ijk} = 0$. Тогда

$$\lambda_{ijk} = -a_{ik}\lambda_j - a_{jk}\lambda_i + \frac{2}{n} a_{ij}\lambda_k. \tag{26'}$$

Подставляя эти значения λ_{ijk} в (13) и учитывая, что $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijlk}$, найдем

$$a_{ik} b_{jl} - a_{il} b_{jk} - a_{jk} b_{il} + a_{jl} b_{ik} + \frac{2}{n} a_{ij} (b_{kl} - b_{lk}) = 0.$$

Свертывая это соотношение с a^{il} и обозначая $\beta = \frac{1}{n} a^{ij} b_{ij}$, получим: $nb_{jk} + \frac{2}{n}(b_{kj} - b_{jk}) = n\beta a_{jk}$. Отсюда при $n > 2$ следует, что $b_{ij} = \beta a_{ij}$.

или $\lambda_{ij} = \beta a_{ij} - \lambda_i\lambda_j$. Подставляя эти значения λ_{ij} в (16) и (20) и учитывая, что $\mu_{ijk} = \mu_{kij}$, получим:

$$-2\omega_0^0 - 2l_k\omega^k = \frac{n}{n+1} d \ln \beta,$$

$$\nabla\lambda_i - \lambda_i\omega_0^0 - \omega_i^0 - (\beta a_{ij} + \lambda_i\lambda_j)\omega^j = \frac{n}{n+1} d \ln \beta. \quad \lambda_i.$$

Наконец из (26′), найдем

$$\nabla(\beta a_{ij} + \lambda_i\lambda_j) - \lambda_i\omega_i^0 - \lambda_j\omega_i^0 = \frac{n}{n+1} d \ln \beta. \quad (\beta a_{ij} + \lambda_i\lambda_j).$$

Но последние уравнения являются условием неподвижности гиперквадрики $\beta a_{ij}x^i x^j + (\lambda_i x^i + x^0) = 0$, т. е. рассматриваемое многообразие конусов конквадрично.

7. Рассмотрим невырожденную квадрику размерности $n-2$, определяемую системой уравнений

$$a_{ij}x^i x^j = 0, \quad \xi_i x^i + x^0 = 0. \tag{30}$$

Конус (1) многообразия (k) проходит через эту квадрику. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Для того, чтобы все конусы многообразия* (k) *проходили через неподвижную, невырожденную квадрику размерности* $(n-2)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{ijk} = 0, \quad b_{ij} = 0. \tag{31}$$

Необходимость. Пусть квадрика (30) неподвижна. Тогда неподвижна и гиперплоскость, определяемая вторым уравнением (30). Условие ее неподвижности имеет вид:

$$\nabla\xi_i = -\xi_i\omega_0^0 + \omega_i^0 - \xi_i\xi_j\omega^j. \tag{32}$$

Далее, условие неподвижности $(n-2)$ — квадрики (30), лежащий в этой плоскости запишется в виде

$$d(a_{ij}x^i x^j) \equiv 2\Omega a_{ij}x^i x^j \quad mod\, \xi_i x^i + x^0 = 0.$$

Отсюда, используя уравнения (6), получим:

$$\frac{2}{n} a_{ij}\omega_0^0 + (b_{ijk} + a_{ik}\xi_j + a_{jk}\xi_i)\omega^k = 2(\Omega - \theta)a_{ij}.$$

Свертывая это соотношение сначала с a^{ij}, а потом с a^{jk}, найдем

$$\Omega - \theta = \frac{1}{n}(\omega_0^0 + \xi_k\omega^k), \quad \xi_i = \lambda_i,$$

в силу чего $a_{ijk} = 0$, $b_{ij} = 0$. Так как $\xi_i = \lambda_i$, то неподвижная гиперплоскость $\xi_i x^i + x^0 = 0$ совпадает с плоскостью π инвариантно присоединенную к конусу многообразия (k).

Достаточность. Пусть $a_{ijk} = 0$ и $b_{ij} = 0$. Второе из этих условий означает, что гиперплоскость (23) неподвижна. Рассмотрим теперь $n-2$-квадрику, высекаемую на этой гиперплоскости конусом (1). Из первого условия теоремы следует, что

$$d\,(a_{ij}x^i x^j) = 2\Omega a_{ij}x^i x^j \quad mod\; \lambda_i x^i + x^0 = 0,$$

в силу чего $n-2$-квадрика, по которой конус (1) пересекается с гиперплоскостью (23) будет неподвижной.

8. Свяжем с многообразием (k) многообразие интегральных кривых уравнения Монжа

$$a_{ij}\omega^i\omega^j = 0. \tag{33}$$

Определение. Асимптотической линией многообразия (k) называется интегральная кривая уравнения (33), соприкасающаяся плоскость которой касается конуса многообразия. Уравнение касательной гиперплоскости конуса для образующей, определяемой формами ω^i, имеет вид:

$$a_{ij}\omega^i x^j = 0. \tag{34}$$

Если линия асимптотическая, то точки A_0, dA_0 и d^2A_0 должны находиться на касательной гиперплоскости (34). Отсюда, так как $d^2A_0 = (\cdots)A_0 + (\nabla\omega^i + \omega_0^0\omega^i)A_i$, находим $a_{ij}\omega^i\nabla\omega^j = 0$. Следовательно уравнение асимптотических линий имеет вид $a_{ij}\omega^i\omega^j = 0$ и $a_{ij}\omega^i\nabla\omega^j = 0$ Дифференцируя (33) и учитывая последнюю систему, получим:

$$a_{ij}\omega^i\omega^j = 0, \quad a_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0. \tag{35}$$

Таким образом, асимптотические направления на конусе многообразия (k) высекаются конусом третьего порядка, определяемым вторым уравнением (35). При $n=3$ на каждом конусе многообразия имеется шесть асимптотических направлений. Так как тензор a_{ijk} удовлетворяет соотношением (19), то нетрудно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Для того, чтобы все интегральные линии уравнения* (33) *были асимптотическими, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_{(ijk)} = 0.$$

Кироваканский педагогический
институт

Լ. Գ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Կոնական բազմաձևությունների մի քանի դասերի մասին

Հաղորդման մեջ ուսումնասիրված է երկրորդ կարգի կոների n-պարամետրանի բազմաձևությունները պրոեկտիվ տարածության մեջ։ Կառուցված է ինվարիանտ տեսությունը (оснащение) *և տրված է ինվարիանտ խարակտերիստիկան նման բազմաձևությունների մի քանի մասնավոր դասերի համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Gheorghiev*, An. st. Univ. Jasi, s. I, t. VIII (1962) p. 353–367. [2] *D. Rimer*, An. st. Univ. Jasi, s. I, a, t. XIV (1968) p. 137–147. [3] *Г. Ф. Лаптев*. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды матем. об-ва., т. 2, М., 1953. [4] *А. П. Норден*. Пространства аффинной связности, М., 1950. [5] *В. С. Малаховский*. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборник, вып. 3. Изд. Томского ун-та, Томск, 1963, стр. 28–43.