

МАТЕМАТИКА

УДК 51.621.391

Э. М. Погосян

О нижних оценках длин минимальных тестов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалянцем 11/XI 1969)

Рассматриваются нижние оценки длин тестов, предназначенных для различения n -мерных булевых векторов, принадлежащих двум заданным множествам M_0, M_1 . Строится система определенных численных характеристик заданных множеств M_0, M_1 , — так называемые характеристические последовательности, и затем дается алгоритм вычисления нижней оценки длины теста для всех пар множеств, обладающих заданной характеристической последовательностью. С этой целью дается алгоритм построения по заданной характеристической последовательности пар множеств, обладающих самым коротким тестом среди всех других пар множеств с этой же характеристической последовательностью. Для получения этих фактов потребуются предварительно некоторые комбинаторные рассуждения.

В дальнейшем изложении мощность множества M будем обозначать через $\mu(M)$. *Набором* будем называть всякое конечное множество элементов, рассматриваемых вместе с некоторым определенным на нем отношением линейной упорядоченности. *Поднабором* набора A мы будем называть всякое конечное множество, составленное из элементов A , рассматриваемое вместе с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью A . Всякий поднабор A отличный от A , будем называть *собственным поднабором* A . Число элементов набора A , будем называть *длиной* A . Через I_n обозначим набор $\{1, 2, \dots, n\}$, а через R_n — множество всех поднаборов I_n . Элементы R_n будем называть Δ_n -наборами; Δ_n -наборы длины k , $0 \leq k \leq n$, будем называть Δ_n^k -наборами. Для Δ_n -наборов мы введем действия сложения $\cup$, умножения $\cap$, вычитания $\setminus$, определяемые следующим образом: если A и B суть Δ_n -наборы, P и Q — множества их элементов, то $A \cup B$ (соответственно, $A \cap B$, $A \setminus B$) мы определяем как множество $P \cup Q$ (соответственно, $P \cap Q$, $P \setminus Q$), рассматриваемые совместно с отношением упорядоченности, индуцированным упорядоченностью в наборе I_n .

Пусть $0 \leq k \leq n$. Последовательность $\Gamma_n^k(1), \Gamma_n^k(2), \dots, \Gamma_n^k(m)$,

составленную из Δ_n^k -наборов, определим посредством следующего алгоритма:

1. При $k = 0$, $\Gamma_n^0(1)$ есть пустой набор.
2. При $k > 0$, полагаем $\Gamma_n^k(1) = \{1, 2, \dots, k\}$.
3. Если Δ_n^k -набор $\Gamma_n^k(i) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ уже получен, то: а) если $\Gamma_n^k(i) \neq \{n-k+1, n-k+2, \dots, n\}$ и q — наибольшее число от 1 до k такое, что $a_q \neq n-k+q$, то $\Gamma_n^k(i+1) = \{a_1, \dots, a_{q-1}, a_q+1, a_q+2, \dots, a_q+n-q+1\}$; б) если $\Gamma_n^k(i) = \{n-k+1, n-k+2, \dots, n\}$, то построение последовательности закончено.

Определим также для каждого l , $0 \leq l \leq n$, последовательность $L_n^l(1), L_n^l(2), \dots, L_n^l(m)$ таким образом, что при всяком j от 1 до m , $L_n^l(j) = I_n \setminus \Gamma_n^{n-l}(j)$ и количества членов в последовательностях L_n^l и Γ_n^{n-l} совпадают.

Теорема 1. (об экономии чисел в наборах): Каково бы ни было i , $1 \leq i \leq n-1$, в последовательности L_n^i всякий Δ_n^i -набор A , в котором не встречается ни одно из чисел $1, 2, \dots, i$ предшествует всякому набору B , в котором встречается число i .

Теорема 2. (о минимальном числе поднаборов). Число всех различных Δ_n^i -поднаборов, построенных из Δ_n^i -наборов множества $\{L_n^i(1), \dots, L_n^i(m)\}$, где $0 \leq i \leq l \leq n$, $1 \leq m \leq C_n^l$, не больше числа всех различных Δ_n^l -поднаборов, построенных из Δ_n^l -наборов произвольного множества, состоящего из m различных Δ_n^l -наборов.

Обозначим через W_n множество всех непустых непересекающихся пар множеств (M_0, M_1) n -мерных булевых векторов, через X_n — n -мерное булево пространство с булевыми переменными $x_1, \dots, x_n$. Каждому Δ_n^k — поднабору $\{a_1, \dots, a_k\}$ набора I_n , $0 \leq k \leq n$, поставим в соответствие k -мерное подпространство X_k с компонентами $x_{a_1}, \dots, x_{a_k}$. Δ_n^k -набор $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, $0 \leq k \leq n$, назовем *тестом* для пары $(M_0, M_1) \in W_n$, если проекции множеств (M_0, M_1) на k -мерное пространство $x_{a_1}, \dots, x_{a_k}$ не пересекаются. В противном случае набор A назовем *недопустимым набором* для (M_0, M_1) . Произвольный недопустимый для (M_0, M_1) набор A назовем *максимально недопустимым набором* (м. н. н.) для (M_0, M_1) , если каждый Δ_n -набор B , для которого A является собственным поднабором, является тестом для (M_0, M_1) . Δ_n -набор A назовем *минимальным тестом* (м. т.) для $(M_0, M_1) \in W_n$, если A является тестом наименьшей длины из множества всех тестов для (M_0, M_1) .

Обозначим через U_n множество всех множеств попарно несравнимых Δ_n -наборов, а через V_n — множество всех множеств всех м. н. н. соответствующих элементам из W_n . Заметим, что для каждого элемента из $U_n \setminus \{I_n\}$ можно построить класс множеств, принадлежащих W_n .

Теорема 3. Множества V_n и $U_n \setminus \{I_n\}$ совпадают.

Пусть $S \in V_n$, $S = \{S_1, \dots, S_m\}$ и $p = \mu(\bigcup_{j=1}^m S_j)$. Разобьем множество S на непустые подмножества $P_1, \dots, P_k$, где $k \geq 1$, каждое P_i состоит из наборов некоторой фиксированной длины l_i и $l_i \neq l_j$, при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Не нарушая общности можно считать $l_1 > l_2 > \dots > l_k$. Числа $\mu(P_1), \dots, \mu(P_k)$ будем обозначать через $m_1, \dots, m_k$. Последовательность чисел $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, полученных указанным способом, назовем *характеристической последовательностью* (х. п.) множества м. н. н. S . X . п. χ назовем х. п. пары множеств $(M_0, M_1) \in W_n$, если χ является х. п. множества м. н. н. S для (M_0, M_1) . Числовую последовательность $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ будем называть х. п., если:

1. $n \geq p \geq l_1 > \dots > l_k > 0$;
2. $m_i \neq 0$, при $i = 1, \dots, k$.

Пусть $N_i(S)$, где $S \in V_n$, равно числу всех различных Δ_n^i — поднаборов, построенных из Δ_n -наборов множества S , а $\eta(i, l, s, s')$ — равно $N_i(L_n^l(s), L_n^l(s+1), \dots, L_n^l(s'))$, где $0 \leq i \leq l \leq n$, $1 \leq s \leq s' \leq C_n^l$. Для произвольной х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ введем следующие обозначения. $t_1 = m_1$; $t_i = \eta(l_i, l_{i-1}, 1, t_{i-1}) + m_i$, где $i = 2, 3, \dots, k$.

Множество Δ_n -наборов $L_\chi = \{L_n^{l_1}(1), \dots, L_n^{l_1}(t_1), L_n^{l_2}(\eta(l_2, l_1, 1, t_1) + 1), \dots, L_n^{l_2}(t_2), \dots, L_n^{l_k}(\eta(l_k, l_{k-1}, 1, t_{k-1}) + 1), \dots, L_n^{l_k}(t_k)\}$ назовем *уплотненным множеством для х. п. χ* . Если χ является х. п. L_χ , то L_χ назовем *уплотненным множеством с х. п. χ* .

Теорема 4. Для произвольной х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, $\chi \neq (n, n, n, 1)$, уплотненное множество L_χ с х. п. χ можно построить тогда и только тогда, когда выполняется условие $C_{p-1}^{l_k} \leq t_k \leq C_p^{l_k}$.

Через Ω_n обозначим множество всех х. п., соответствующих элементам из V_n .

Теорема 5. Для каждой х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, $\chi \in \Omega_n$, можно построить уплотненное множество L_χ для χ . При этом х. п. L_χ есть $\chi' = (n, p', l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ и $N_i(L_\chi) \leq N_i(S_\chi)$, где $p' \leq p$, $0 \leq i \leq n$, S_χ — произвольный элемент V_n с х. п. χ .

Следствие 1. Произвольная х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$ принадлежит Ω_n тогда и только тогда, когда можно указать натуральное число p' такое, что $p' \leq p$, $C_{p'-1}^{l_k} \leq t_k \leq C_{p'}^{l_k}$ и

$$p \leq \sum_{j=1}^k m_j l_j.$$

Следствие 2. Если D подмножество $U_n \setminus \{I_n\}$, элементы которого имеют х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, отличающиеся друг от друга разве что второй компонентой, то

$$N_i(L_i) = \min_{x \in D_i} \sum_{t=1}^n (-1)^{t-1} \sum_{\substack{s_{p_1}, \dots, s_{p_i} \in \{0, 1\} \\ s_{p_1} + \dots + s_{p_i} = i}} C_n^{(s_{p_1}, \dots, s_{p_i}, 1, \dots, 1, s_{p_{i+1}}, \dots, s_{p_n})}$$

где $0 \leq i \leq n$, $m = \sum_{j=1}^k m_j$, L_i — уплотненное множество для χ .

Следствие 3 Для произвольной пары множеств (M_0, M_1) из W_n с х. п. $\chi = (n, p, l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_k)$, если $N_{i_{n-1}}(L_i) < C_n^{i_{n-1}}$ и $N_{i_n}(L_i) > C_n^{i_n}$, где L_i — уплотненное множество для χ , то длина m т. (M_0, M_1) больше или равна i_n .

Следствие 3 позволяет сформулировать сравнительно простой алгоритм получения точной нижней оценки i_n длины м. т. для произвольной пары $(M_0, M_1) \in W_n$ с х. п. χ .

1. Находим $\Gamma_n^{n-l_k}(t_1) = |a_1, \dots, a_k|$. Для этого: а) последовательно определяем $\Gamma_n^{n-l_k}(1), \dots, \Gamma_n^{n-l_k}(t_1) = |a_1^1, \dots, a_{n-l_k}^1|$; б) пусть $\Gamma_n^{n-l_j}(t_j) = |a_1^j, \dots, a_{n-l_j}^j|$, $j = 1, \dots, n - l_{k-1}$ уже получен. Можно показать, что $\Gamma_n^{n-l_{j-1}-1}(b(l_{j-1}, l_j, 1, t_j)) = |a_1^j, \dots, a_{n-l_j}^j, s+1+l_{j+1}, \dots, n|$, где $0 \leq s \leq n - l_j$ и $a_s \leq s + l_{j+1}$, $a_{s+1} > s + 1 + l_{j+1}$. Последовательно находим наборы $\Gamma_n^{n-l_{j-1}-1}(b(l_{j+1}, l_j, 1, t_j) + 1), \dots, \Gamma_n^{n-l_{j-1}-1}(t_{j+1}) = |a_1^{j+1}, \dots, a_{n-l_{j+1}}^{j+1}|$.

2. Можно показать, что

$$N_i(L_i) = C_n^i - \sum_{j=1}^{n-l_k} C_{n-a_j}^{n-i-l_j+1}.$$

Сравнивая C_n^i с $N_i(L_i)$, при $0 \leq i \leq l_k$, определяем i_n ; для этого потребуется не более $|\log l_k| + 1$ сравнений.

Можно предложить два уровня описания классов пар множеств (M_0, M_1) из W_n . Это уровни м. н. н. и х. п..

Каждому элементу S из V_n соответствует класс K_S элементов из W_n с х. п. χ , а множество всех классов K_S составляют разбиение W_n . При этом существуют алгоритмы существенно использующие полный перебор, которые по произвольному $S \in V_n$ доставляют множество всех тестов каждой пары $(M_0, M_1) \in K_S$. В то же время каждой х. п. $\chi \in 2_n$ соответствует класс $\{S_1, \dots, S_n\}$ — элементов из V_n и класс $K_\chi = \bigcup_{j=1}^r K_{S_j}$ — элементов из W_n с х. п. χ . Множество всех классов K_χ также составляет разбиение W_n . На основе только х. п. χ в общем случае невозможно определить даже длину м. т. для пар множеств из K_χ . Однако по х. п. χ можно сразу определить верхнюю оценку длины м. т. и сравнительно простым способом вычислить точную нижнюю оценку длины м. т. для любых пар множеств из K_χ .

Заметим, что для каждой пары (M_0, M_1) такой, что $\mu(M_0) = m'$, $\mu(M_1) = m''$, оба типа описаний (M_0, M_1) получаются посредством порядка $m' \cdot m''$ сравнений векторов, принадлежащих (M_0, M_1) .

В заключение автор приносит глубокую благодарность Н. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Ստուգիչների միևնույն երկառուրյունների ներքին գնահատականների մասին

Հաջորդում գիտարկում են n -շախտի վեկտորների շատագույն բազմությունների առարկաները առարկերի ու համար հատկացված ստուգիչների ներքին գնահատականները:

Նշված բազմությունների համար սահմանվում են բնութագրող հարգականություններ և արվում է արդարիտ, որը հաջվում է ներքին գնահատականը բոլոր բազմությունների դուրսի համար տվյալ բնութագրող հարգականությամբ: