ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

L 1970 2

МАТЕМАТИКА

УДК 512.972

М. А. Василян

Об инвариантном оснащении гиперполосы

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/VI 1969)

1. Пусть (A, α) — плоский элемент проективного пространства P_n, состоящий из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α. Гиперполосой H_r $(1 < r < n-1)$ называется r — параметрическое семейство плоских элементов (A, α), такое, что гиперплоскости α касаются поверхности V_r, описываемой точкой A. Гиперплоскости α огибают при этом гиперповерхность V'_{n-1} ранга r [1]. $(n-r-1)$ — мерные образующие которой проходят через соответствующие точки поверхности V_r. При $r = n-1$ гиперполоса становится гиперповерхностью.

Проективная теория гиперполос изучалась ранее А. В. Чакмазяном [2] и Ю. Н. Поповым [3]. В настоящей работе строится инвариантное оснащение гиперполосы ранга $r = n-2$, внутренним образом связанное с этой полосой. В работе использован метод исследования погруженных многообразий, развитый Г. Ф. Лаптевым в работе [4].

2. В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером A_ξ рассмотрим тангенциальный репер α^η $(\xi, \eta = 0, \cdots, n)$, элементы которых связаны условиями инцидентности $(A_\xi, \alpha^\eta) = \delta_\xi^\eta$. Уравнения инфинитезимальных перемещений этих реперов запишутся в виде:

$$dA_\xi = \omega_\xi^\eta A_\eta, \quad d\alpha^\xi = -\omega_\eta^\xi \alpha^\eta,$$

где ω_ξ^η — формы Пфаффа, определяющие проективную группу преобразований пространства P_n. Они удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\omega_\eta^\xi = \omega_\eta^\zeta \wedge \omega_\zeta^\xi,$$

где d — символ внешнего дифференцирования, а $\wedge$ — символ внешнего умножения.

Кроме того из условий нормировки $(A_0 A_1 \cdots A_n) = 1$ следует, что $\omega_\xi^\xi = 0$.

К элементу (A, α) гиперполосы H_{n-2} присоединим подвижной репер, полагая $A_0 = A$, $\alpha^n = \alpha$. Для гиперполосы H_{n-2} должны выполняться соотношения $(dA_0\alpha^n) = (A_0 d\alpha^n) = 0$, поэтому

$$\omega_0^n = 0. \qquad (1)$$

Элемент (A_0, α^n) гиперполосы H_{n-2} зависит от $n-2$ параметров $u^i (i = 1, \cdots, n-2)$, которые называются главными. При $u^i = c^i$ элемент (A_0, α^n) остается неподвижным, в силу чего

$$\omega_0^i = 0, \quad \omega_i^n = 0, \quad \omega_0^{n-1} = 0, \quad \omega_{n-1}^n = 0, \quad (i = 1, \cdots, n-2).$$

Параметры, определяющие перемещения репера при $du^i = 0$ называются вторичными. Эти параметры являются параметрами стационарной подгруппы элемента (A_0, α^n). Компоненты инфинитезимального перемещения репера стационарной подгруппы определяются формами Пфаффа $\Pi_\eta^\xi = \omega_\eta^\xi|_{du^i = 0}$. Дифференцирование по вторичным параметрам будем обозначать символом δ.

3. В гиперплоскости α^n гиперполосы H_{n-2} лежит $(n-2)$ — плоскость E_{n-2}, касательная к поверхности V_{n-2} и прямолинейная образующая E_1 гиперповерхности V_{n-1}^{n-2}. Если прямая E_1 и плоскость E_{n-2} находится в общем положении, то гиперполоса H_{n-2} называется неособой. Мы будем предполагать далее, что изучаемая нами гиперполоса H_{n-2} является неособой. Тогда специализируя репер мы получим:

$$\omega_0^{n-1} = 0\,(a), \quad \omega_{n-1}^n = 0\,(b).$$

Уравнение (1) и (2a) определяют поверхность V_{n-2}, описываемую точкой A_0. Уравнение (1) и (2b) определяют гиперповерхность V_{n-1}^{n-2}, огибаемую гиперплоскостями α^n. Формы $\omega^i = \omega_0^i (i = 1, \cdots, n-2)$ определяют перемещение точки A_0 по поверхности V_{n-2}. Поэтому они будут линейно независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^i. То же самое справедливо относительно форм ω_i^n, которые определяют перемещение гиперплоскости α^n.

Дифференцируя внешним образом уравнения (1) и (2) и применяя лемму Картана, находим

$$\omega_i^n = a_{ij}\omega^j, \qquad (3)$$

$$\omega_i^{n-1} = \lambda_{ij}^{n-1}\omega^j\,(a), \quad \omega_{n-1}^i = \lambda_{n-1}^{ij}\omega_j^n\,(b), \qquad (4)$$

где здесь и всюду в дальнейшем латинские индексы пробегают значения от 1 до $n-2$. Кроме того

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \lambda_{ij}^{n-1} = \lambda_{ji}^{n-1}, \quad \lambda_{n-1}^{ij} = \lambda_{n-1}^{ji}, \quad \det\|a_{ij}\| \neq 0.$$

Обозначим через a^{ij} элементы матрицы, обратной матрице $\|a_{ij}\|$.

Продолжение дифференциальных уравнений (3) и (4) показывает, что величины a_{ij} и a^{ij} являются относительными тензорами, а величины λ_{ij}^{n-1}, λ_{n-1}^{ij} вместе с тензорами a_{ij}, a^{ij} образуют фундаментальные объекты второго порядка гиперполосы H_{n-2}. Дальнейшее продолжение системы (3), (4) вводит геометрические объекты третьего и более высоких порядков, определяемые гиперполосой H_{n-2}. Полученная таким образом последовательность геометрических объектов называется фундаментальной последовательностью гиперполосы H_{n-2}.

4. Фундаментальная последовательность геометрических объектов дает возможность построить объекты, определяющие инвариантное оснащение гиперполосы, внутренним образом с ней связанное.

Положим:

$$\lambda_{n-1} = \frac{1}{n-2} a_{ij} \lambda^{ij}_{n-1}, \qquad \lambda^{n-1} = \frac{1}{n-2} a^{ij} \lambda^{n-1}_{ij}. \tag{5}$$

Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} d\lambda_{n-1} &= \lambda_{n-1}(\omega^{n-1}_{n-1} - \omega^0_0) + \omega^0_{n-1} + \lambda^i_{n-1}\omega^n_i \ (a), \\ d\lambda^{n-1} &= \lambda^{n-1}(\omega^n_n - \omega^{n-1}_{n-1}) - \omega^{n-1}_n - \lambda^{n-1}_i \omega^i \ (b), \end{aligned} \right| \tag{6}$$

которые показывают, что они являются геометрическими объектами. Легко проверить, что величины

$$b_{ij} = \lambda^{n-1}_{ij} - \lambda^{n-1} a_{ij}, \quad c^{ij} = \lambda^{ij}_{n-1} - \lambda_{n-1} a^{ij} \tag{7}$$

будут относительными тензорами. Эти тензоры удовлетворяют условиям аполярности

$$a^{ij} b_{ij} = 0\,(a), \quad a_{ij} c^{ij} = 0\,(b). \tag{8}$$

Тензоры a_{ij} и b_{ij} определяют сопряженную сеть на поверхности V_{n-2}, а тензоры a^{ij} и c^{ij} — фокальную сеть на гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

Рассмотрим точку $M_{n-1} = A_{n-1} - \lambda_{n-1} A_0$ и гиперплоскость $\mu^{n-1} = \alpha^{n-1} - \lambda^{n-1}\alpha^n$. Так как $\delta M_{n-1} = \Pi^{n-1}_{n-1} M_{n-1}$ и $\delta\mu^{n-1} = -\Pi^{n-1}_{n-1}\mu^{n-1}$, то эти образы будут инвариантными. Геометрический смысл точки M_{n-1} состоит в том, что она является гармоническим полюсом ([5]) точки A_0 относительно фокусов образующей E_1 гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}. Гиперплоскость μ^{n-1} будет гармонической полярой гиперплоскости α^n в пучке гиперплоскостей $[\alpha^{n-1}, \alpha^n]$ относительно фокусных гиперплоскостей ([1]) поверхности V_{n-2}.

Если тензор c^{ij} не вырождается, то точка M_{n-1} описывает поверхность $\bar{V}_{n-2}$ размерности $n-2$, пересекающую прямую E_1. Если $\operatorname{rang}\|c^{ij}\| = m\ (2 \leq m < n-2)$, то $n-m-2$ фокусов образующей E_1 совпадают с точкой M_{n-1}. В силу (8 в) ранг m не может быть равен единице. При $m = 0$ точка M_{n-1} будет неподвижной и гиперповерхность V^{n-2}_{n-1} становится гиперконусом с вершиной в точке M_{n-1}.

Аналогичное значение имеет тензор b_{ij} для гиперповерхности $\bar{V}^{n-2}_{n-1}$, огибаемой гиперплоскостью μ^{n-1}. В частности, при $b_{ij} = 0$ гиперплоскость μ^{n-1} будет неподвижной и поверхность V_{n-2} принадлежит этой гиперплоскости.

5. Дальнейшее построение проводится в предположении, что тен-

зоры b_{ij} и c^{ij} невырождены. Обозначим через b^{ij} и c_{ij} обратные им тензоры.

Величины

$$\lambda_i = c_{ij}\lambda^j_{n-1}, \quad \lambda^i = b^{ij}\lambda_j^{n-1} \tag{9}$$

оказываются геометрическими объектами, определяемыми окрестностью третьего порядка элемента гиперполосы. Точки $M_i = A_i - \lambda_i A_0$ определяют инвариантную плоскость E_{n-2}, которая является пересечением касательных плоскостей к поверхностям V_{n-2}, $\bar{V}_{n-2}$. Гиперплоскости $\mu^i = \sigma^i - \lambda^i\sigma^0$ пересекаются по плоскости E_2, содержащей прямолинейные образующие гиперповерхностей V^{n-2}_{n-1}, $\bar{V}^{n-2}_{n-1}$.

6. При ковариантном дифференцировании величин λ_i, λ^i вводятся величины λ^{ij}_n и λ^0_{ij}, симметричные по индексам i, j. Эти величины позволяют построить относительные тензоры:

$$h^{ij} = \lambda^{ij}_n - \lambda_n b^{ij}, \quad l_{ij} = \lambda^0_{ij} - \lambda^0 c_{ij}, \tag{10}$$

где

$$\lambda_n = \frac{1}{n-2}\lambda^{ij}_n b_{ij}, \quad \lambda^0 = \frac{1}{n-2}\lambda^0_{ij}c^{ij}. \tag{11}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям аполярности

$$h^{ij}b_{ij} = 0, \quad l_{ij}c^{ij} = 0.$$

Тензоры c_{ij} и l_{ij} являются основными тензорами поверхности $\bar{V}_{n-2}$, определяющими ее сопряженную сеть, а тензоры b^{ij} и h^{ij} — основными тензорами гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}, определяющими ее фокальную сеть.

Рассмотрим образующую $\bar{E}_1$ гиперповерхности $\bar{V}^{n-2}_{n-1}$. Она определяется точкой A_0 и точкой M, удовлетворяющей условиям $(M\mu^{n-1}) = (M\mu^i) = 0$. Отсюда следует, что разложение этой точки по базисным точкам имеет вид

$$M(x) = A_n + \lambda^{n-1}A_{n-1} + \lambda^i A_i + x A_0,$$

где x — пока произвольный параметр.

Плоскость $\bar{E}_{n-2}$, касательная к поверхности $\bar{V}_{n-2}$, является пересечением гиперплоскостей σ^n и μ, удовлетворяющей условиям $(\mu M_{n-1}) = (\mu M_i) = 0$. Поэтому разложение гиперплоскости μ по базисным гиперплоскостям имеет вид

$$\mu(\xi) = \sigma^0 + \lambda_i\sigma^i + \lambda_{n-1}\sigma^{n-1} + \xi\sigma^n,$$

где ξ — также произвольный параметр.

При $x = -\lambda_n$ точка M оказывается гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокусов образующей $\bar{E}_1$ гиперповерхности $\bar{V}^{n-2}_{n-1}$. Точно так же при $\xi = -\lambda^0$ гиперплоскость μ будет гармонической полярой гиперплоскости α^0 относительно фокусных гиперплоскостей поверхности $\bar{V}_{n-2}$.

Гиперплоскость $\alpha(-\lambda^0)$ пересечет прямую $\bar{E}_1$ в точке $M(\lambda^0 - \lambda_i\lambda^i - \lambda_{n-1}\lambda^{n-1})$ и точка $M(-\lambda_n)$ инцидента гиперплоскости $\alpha(\lambda_n - \lambda_i\lambda^i - \lambda_{n-1}\lambda^{n-1})$. Рассмотрим теперь точку $M(\bar{x})$ и гиперплоскость $\mu(\bar{\xi})$, где

$$\bar{x} = \frac{\sigma(-\lambda_n) + \tau(\lambda^0 - \lambda_i\lambda^i - \lambda_{n-1}\lambda^{n-1})}{\sigma + \tau},$$

$$\bar{\xi} = \frac{\sigma(\lambda_n - \lambda_i\lambda^i - \lambda_{n-1}\lambda^{n-1}) + \tau(-\lambda^0)}{\sigma + \tau},$$

а σ и τ — любые постоянные вещественные числа.

Точка $M(\bar{x})$ и гиперплоскость $\mu(\bar{\xi})$ будут инциденты и поэтому положим $M(\bar{x}) = M_n$, $\mu(\bar{\xi}) = \mu^0$.

7. Построенные точки $M_0 = A_0$, M_i, M_{n-1}, M_n и гиперплоскости μ^0, μ^i, μ^{n-1}, $\mu^n = \alpha^0$ удовлетворяют условиям инцидентности $(M_\eta \mu^\zeta) = \delta^\zeta_\eta$, $(\eta, \zeta = 0, \cdots, n)$, поэтому они могут быть приняты за элементы инвариантного репера, внутренним образом присоединенного к гиперполосе H_{n-2}. При этом элементы M_{n-1}, μ^{n-1} определяются окрестностью второго порядка, M_i и μ^i — окрестностью третьего порядка, M_n, μ^0 — окрестностью четвертого порядка плоского элемента (M_0, μ^n) гиперполосы H_{n-2}.

Плоскость E_{n-2}, определяемая точками M_i будет нормалью второго рода для поверхности V_{n-2} и $\bar{V}_{n-2}$ и нормалью первого рода для гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}. Плоскость E_2, определяемая гиперплоскостями μ^i будет нормалью первого рода для поверхности V_{n-2} и нормалью второго рода для гиперповерхностей V^{n-2}_{n-1} и $\bar{V}^{n-2}_{n-1}$. Эти нормали внутренним образом связаны с гиперполосой H_{n-2}. Таким образом, построенные плоскости E_{n-2} и E_2 определяют двойственную нормализацию гиперполосы H_{n-2}, внутренним образом связанную с нею.

Считаю своим долгом поблагодарить М. А. Акивису, под непосредственным руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный
университет

Մ. Ա. ՎԱՍԻԼՅԱՆ

Հիպերշերտի ինվարիանտ նորմալացման մասին

Համառոտում դիտարկված է P_n պրոյեկտիվ տարածության մեջ $n-2$ չափանի H_{n-2} հիպերշերտը.

ինվարիանտ համընկման կառուցմանը՝ կապակցված ներքին ձևով այդ հիպերշերտի հետ։ Այդպիսի համընկումը որոշվում է հիպերշերտի էլեմենտի չորրորդ կարգի շրջակայքով։

Այդ համընկումը որոշում է H_{n-2} հիպերշերտի երկակի նորմալացումը։ Բացատրվում է կառուցված համընկման էլեմենտների երկրաչափական իմաստը։

Ինվարիանտ համընկման կառուցման պրոցեսում ստացված են H^{n-2} հիպերշերտի հետ ներքին ձևով կապված մի շարք երկրաչափական օբյեկտներ և տենզորներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Акивис*. Изв. высш. уч. завед., № 1, 9—19, 1957. [2] *А. В. Чакмазян*. ДАН Арм. ССР т. 28, № 4 (1959). [3] *Ю. И. Попов*. IV всесоюзная межвузовская конференция по геометрии. Тезисы докладов. Тбилиси, 1969. [4] *Г. Ф. Лаптев*. Труды математического общества, т. 2, М., 1953. [5] *G. Casanova*, Rev. math. spéc, 65, № 6, 437—440, 1955.