ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
I. 1970 1

УДК 532.542

ГИДРОДИНАМИКА

С. М. Исаакян

О структуре ламинарного движения жидкости в цилиндрической трубе

(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Егиазаровым 14/II 1968)

В современном понимании ламинарное движение жидкости в цилиндрической трубе является прямолинейным, параллельноструйным, установившимся движением, математически описанным Пуазейлем. Однако наблюдения показывают, что как при турбулентном, так и при ламинарном режимах потока в цилиндрической трубе происходит поперечное вращение жидкости. Так, например, на рис. 1, *а*, *б* и 2, *а*, *б* приведе-

Рис. 1. Ламинарный поток в горизонтальной стеклянной трубе с диаметром 2,6 см, визуализированный марганцевокислым калием. *а* — вид окрашенной жидкости; *б* — ее тело

ны две фотографии из полученных автором многочисленных снимков, представляющие движение по стеклянной трубе воды, окрашенной марганцевокислым калием. Как видно по этим рисункам, движение воды в трубе носит явно выраженный винтовой характер. Оно складывается из двух скрученных вместе винтовых вихревых агрегатов, установившихся за пределами длины нерабочего участка в трубе после ввода краски. Рис. 1, *а*, *б* представляет движение по горизонтальной трубе, где *а* изображает лобовую часть окрашенной жидкости, *б* — тело таковой

Они очень напоминают рельеф пробочника. Почти ничем не отличается от приведенной рис. 2, *а, б*, изображающий движение окрашенной струи в вертикальной трубе. Чувствуется, однако, некоторая подавленность винтовых фигур по сравнению с рис. 1, *а, б*.

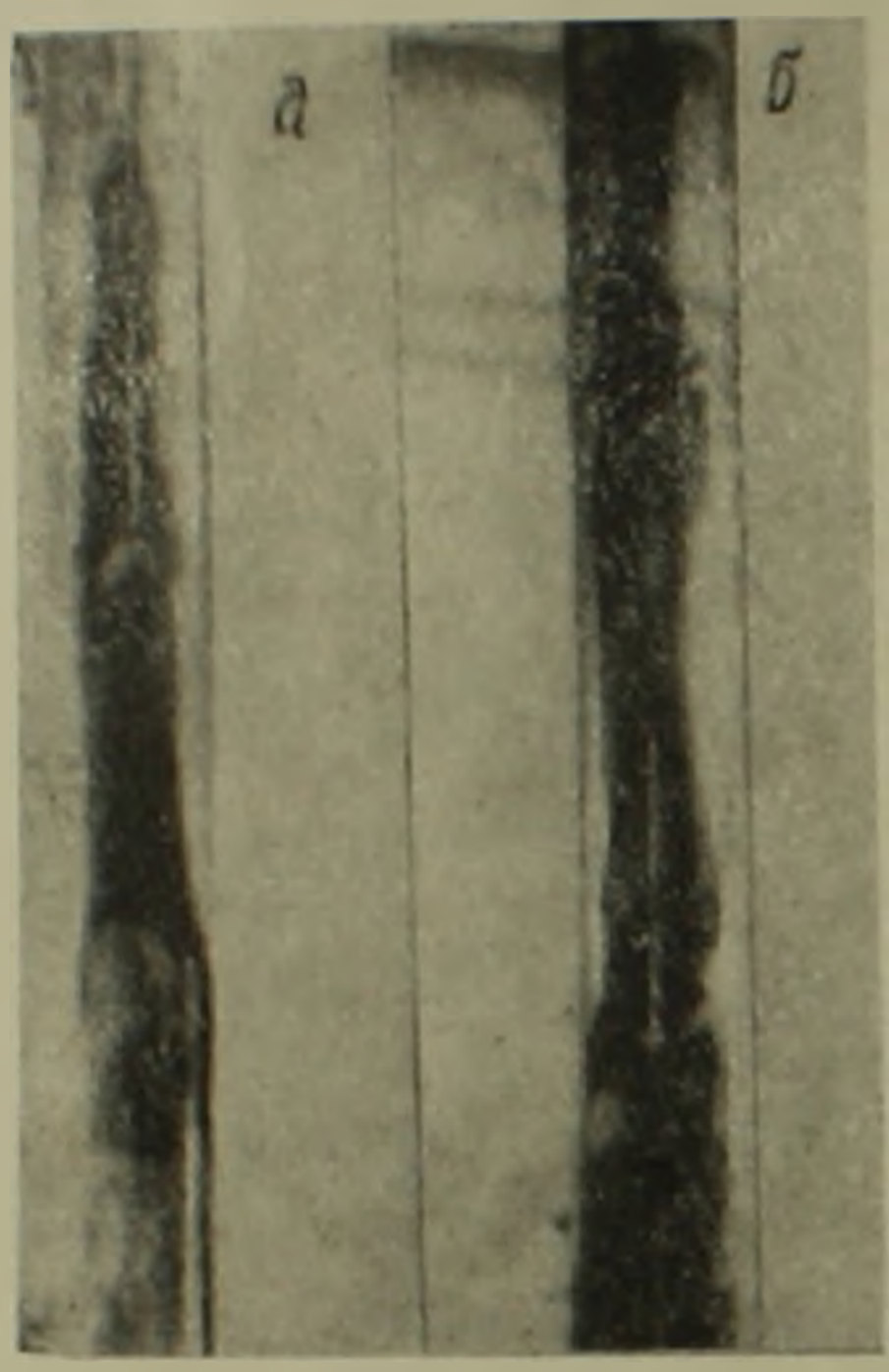


Рис. 2. Ламинарный поток воды в вертикальной стеклянной трубе с диаметром 2,6 *с.м. а* — лоб окрашенной жидкости; *б* — ее тело

Наблюдается скручивание окрашенной струйки, введенной эксцентрично в горизонтальную трубу при числе Рейнольда, равном, даже, единице.

Винтовое движение хорошо подчеркивается также при вводе струи воздуха в вертикальную трубу, заполненную водой, при вводе в вертикальный поток воды в трубе концентрата песка с водой и т. д.

Отметим, что во всех наблюдаемых случаях вращение винта при движении струи вниз идет по часовой стрелке, при движении вверх—против часовой стрелки, в горизонтальной трубе—соответственно.

В литературе описана поперечная циркуляция в цилиндрической трубе (1) и в горизонтальном призматическом канале (2) только в условиях турбулентного движения.

Попытка теоретического обоснования возможности поперечной циркуляции в прямолинейном водоводе сделана М. А. Великановым (2) с помощью анализа уравнений Навье-Стокса. В 1968 году В. И. Юдовичем (3) доказано существование периодических решений уравнений Навье-Стокса, которые, к сожалению, им не найдены.

В настоящей работе приводятся некоторые дополнительные сведения о структуре движения жидкости в цилиндрической трубе.

1. Силовое взаимодействие твердых тел и жидкости при их относительном движении Гельмгольцем выражено через образование в жидкости вихревых поверхностей или так называемых поверхностей разрыва. Применение этой точки зрения к решению задач гидродинамики Кирхгофом, Карманом, Жуковским, Чаплыгиным и многими нашими современниками привело к плодотворным результатам. Но, вместе с тем, было доказано, что не все системы вихрей, использованные многими авторами, имеют право на существование, ибо многие из них оказываются неустойчивыми. Так, плоские непрерывные вихревые поверхности неустойчивы ([4]), цилиндрическая вихревая поверхность, состоящая из одноосных поперечных вихревых колец — неустойчива ([5]). Шахматная система бесконечных прямолинейных вихрей — устойчива ([4]), винтовой вихрь в очень широком диапазоне геометрической характеристики — устойчив ([6]).

В решении Пуазейля вихри ламинарного движения в цилиндрической трубе составляют непрерывную цилиндрическую поверхность, состоящую из вихревых колец, неустойчивость которой известна из литературы ([5]).

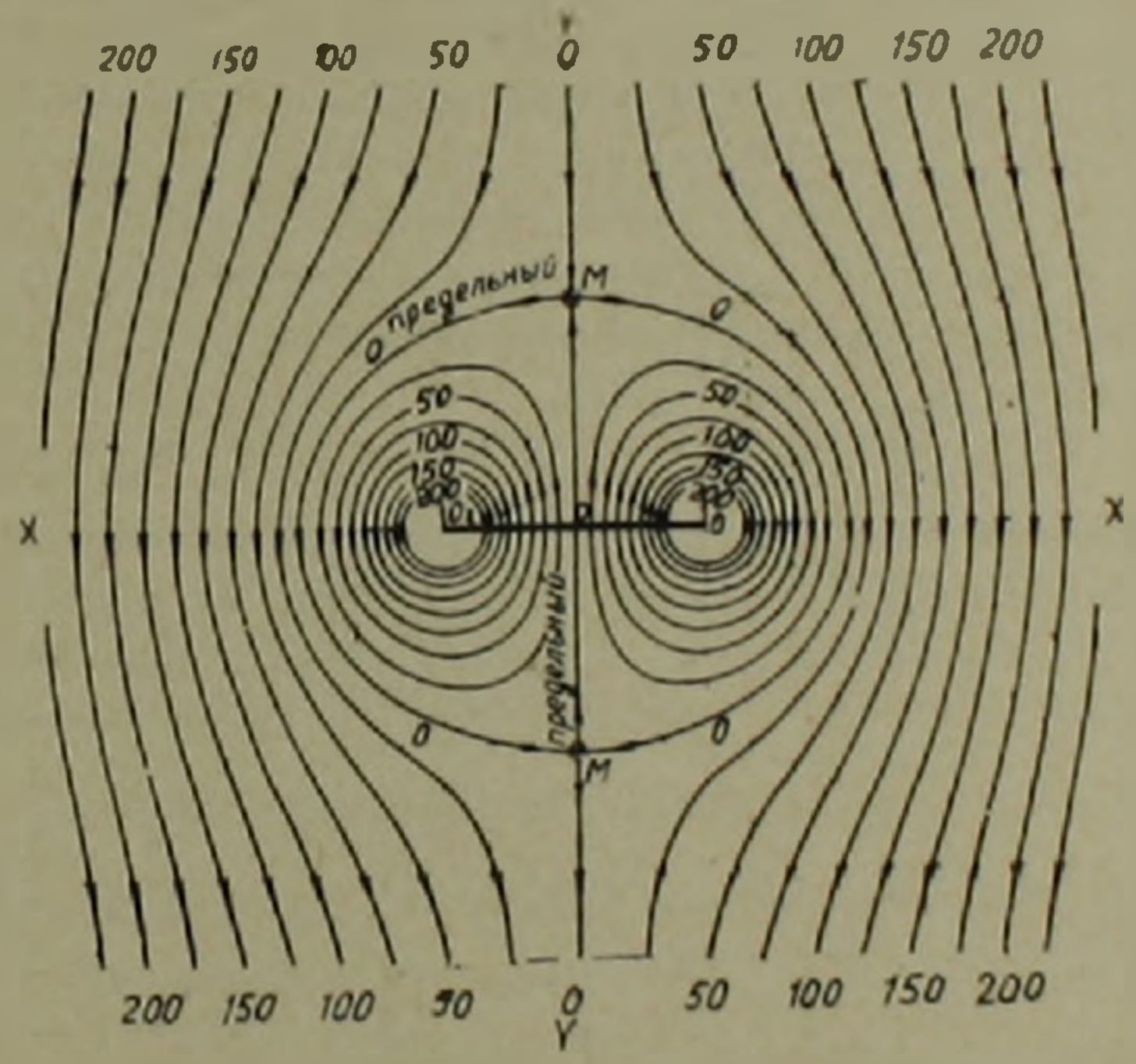


Рис. 3. Линии тока антисимметричных вихрей в поперечном сечении цилиндрической трубы

Для облегчения нахождения устойчивого решения рассматриваемой задачи считаем целесообразным пользоваться результатом теоремы, доказанной Н. Г. Четаевым ([7]) о том, что «постоянно действующие диссипативные силы не нарушают устойчивости равновесия». Тогда, без каких-либо допущений можем искать устойчивое решение задачи в идеальной жидкости для его применения к реальной жидкости.

Аналогично тому, как Т. Карман решает плоские задачи обтекания

приложением к полю соответствующих устойчивых вихрей, помещаем в трубу устойчивый винтовой вихрь, характеризующий трение жидкости со стенками. Затем, исходя из теоремы Стокса приходим к выводу об индуцировании винтовым вихрем антисимметричного вихря в сечении трубы. И, так как пара антисимметричных вихрей имеет скорость поступательного движения, то для фиксации их положения в поперечном сечении трубы приходится накладывать поле с обратным знаком скорости, равной по величине скорости передвижения вихревой пары. Тогда образовывается вихревой мешок (рис. 3), линии тока в котором не зависят от интенсивности вихрей ([8]). Полуоси этого эллипсообразного пространства определяются долями расстояния между центрами вихрей $2a$, которые составляют $2{,}09\,a$ и $1{,}73\,a$. Так как скорость на этой границе равна нулю, в первом приближении принимаем вихревую область за поперечное сечение трубы с радиусом $2{,}09\,a$, что еще логичнее, если учесть, что рассматриваемая пара вихрей имеет вращательную компоненту скорости относительно оси симметрии системы.

Интенсивность вихрей, или циркуляцию скорости, определяем из условий движения жидкости в трубе.

Представляя поток жидкости через поперечное сечение трубы плоскими дублетами, с общей обильностью, равной секундному расходу жидкости через трубу, и учитывая, что их действие равносильно действию вихревого кольца, охватывающего эту площадь ([9]), приравним количество движения этого вихревого кольца, $\rho\Gamma_0\pi a_0^2$, суммарному количеству движения дублетов, с обратным знаком, $-\rho\pi a_0^2 v_{ср}^2$, откуда получим

$$\Gamma_0 = -v_{ср}^2. \qquad (1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости; Γ_0 – циркуляция скорости кольцевого вихря; a_0 – радиус трубы; $v_{ср}$ – средняя скорость жидкости в трубе.

Согласно Н. Е. Жуковскому ([10]) действие винтового вихря равно действию кольцевого, радиус которого равен радиусу кривизны винтового вихря, $R_0 = \dfrac{a^2 + l^2}{a}$. Тогда, приравнивая количество движения кольцевого вихря с радиусом a_0: $\rho\Gamma_0\pi a_0^2$ количеству для кольцевого вихря с радиусом R_0: $\rho\Gamma\pi R_0^2$, получаем циркуляцию для винтового вихря

$$\Gamma = \frac{a^2 a_0^2}{(a^2+l^2)^2}\Gamma_0 = -\frac{a^2 a_0^2}{(a^2+l^2)^2} v_{ср}^2. \qquad (2)$$

По вычислениям Н. Е. Жуковского ([10]) средняя продольная скорость вызванная винтовым вихрем в поперечном сечении цилиндра, образованного осью винта $= \dfrac{\Gamma \lg \alpha}{\pi a}$, где $\lg \alpha = \dfrac{2\pi a}{l}$, l — шаг винта. Вне этого цилиндра она равна нулю.

Приписывая гидравлические потери в трубе к энергии, затраченной на образование вихрей, пишем уравнение количества движения в сле-

дующем виде. Количество движения, создаваемое двумя винтовыми вихрями вдоль трубы за единицу времени, $2 \cdot \rho \pi a^2 \left(\frac{\Gamma \operatorname{tg} \alpha}{\pi a} \right)^2$, приравниваем импульсу сил сопротивления на соответствующей длине трубы за 1 секунду: $\gamma \lambda \frac{\Gamma \operatorname{tg} \alpha}{\pi a \cdot 2 a_0} \cdot \frac{v^2}{2g} \pi a_0^2$, где $\lambda = \frac{64}{Re}$ для ламинарного движения, тогда из

$$2 \rho \pi a^2 \left(\frac{\Gamma \operatorname{tg} \alpha}{\pi a} \right)^2 = \gamma \frac{64}{Re} \frac{\Gamma \operatorname{tg} \alpha}{\pi a \cdot 2 a_0} \cdot \frac{v^2}{2g} \pi a_0^2,$$

с учетом (2) получаем:

$$Re = \frac{12}{\operatorname{tg} \alpha} \left| 1 + \left(\frac{l}{a} \right)^2 \right|^2. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) $\operatorname{tg} \alpha = 3{,}33$ ([4]), соответствующее точке перехода от устойчивости винтового вихря в неустойчивое состояние, получаем

$$Re_{кр} = 75. \qquad (4)$$

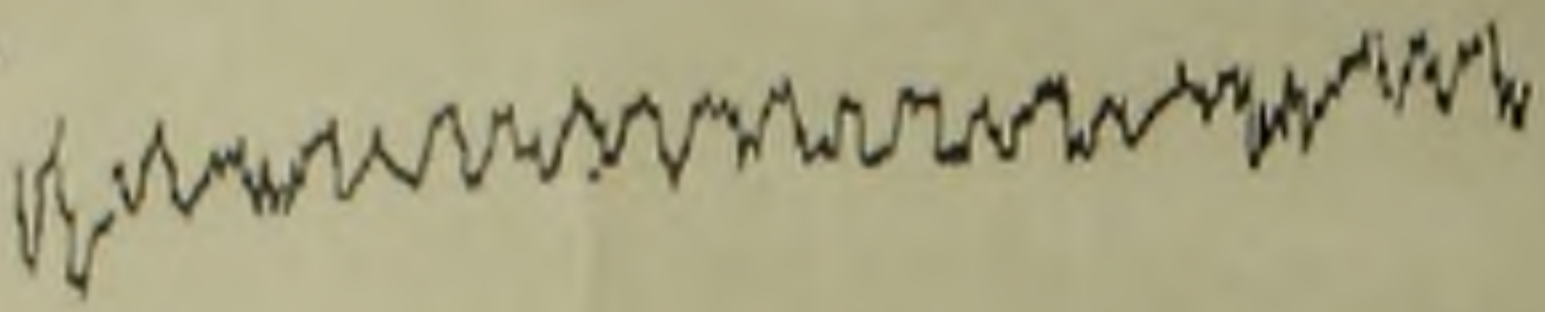
Т. е. начиная с $Re = 75$ винтовой вихрь уже имеет устойчивое поведение, следовательно, его действие в цилиндрической трубе должно быть закономерным начиная с самых глубоких ламинарных режимов движения жидкости, что и наблюдается нами в экспериментах. Но, по-видимому, если учесть приближения, допущенные при вышеприведенном вычислении $Re_{кр}$ (4), начало устойчивого винтового движения еще более приблизится с началу движения жидкости, ибо относительное движение жидкости в трубе не может возникнуть без преодоления гидродинамического сопротивления, а устойчивой формой механического выражения его, как сказано выше, является винтовой вихревой шнур, который обусловливает указанное движение в цилиндрической трубе.

2. Действие винтового вихря в цилиндрической трубе должно, по-видимому, вызвать и пульсацию жидкости в трубе, как следствие периодического поступления витков винтового вихря в рассматриваемое сечение трубы. Причем она должна иметь одинаковую частоту появления в разных точках поперечного сечения водовода, как и подтверждают многие исследователи турбулентных пульсаций потоков. Однако факт записи пульсации в ламинарной области режимов у Дель-Нунцио ([11]) единственный.

С целью экспериментальной проверки нашего заключения об ожидаемых пульсациях в ламинарном потоке на стенках труб из нержавеющей стали с диаметрами 0,6; 0,69; 1,21; 1,8 *см* вырубались окна 0,5×2,0 *см* так, чтобы резиновую мембрану, прилагаемую к отверстию, с внутренней стороны трубы достигнуть без дополнительных препятствий. Затем, создавая условия полного гашения всех колебаний экспериментальной установки вместе с подачей и сбросом воды, без усиления записывались на осциллографе импульсы, получаемые от потока с помощью очень чувствительного фонодатчика специального изготовления. Опыты, охваты-

вающие область режимов, характеризуемых числами Рейнольдса 100—25000 были повторены с записью пульсации с помощью пьезодатчика и кордиографа, работающего с усилением импульсов до 10 раз. Последние охватили потоки и в горизонтальной, и в вертикальной трубах, тогда как первые не имели возможности измерений в вертикальной трубе. Записи двумя методами см. на рис. 4 *а, б.*

а



б

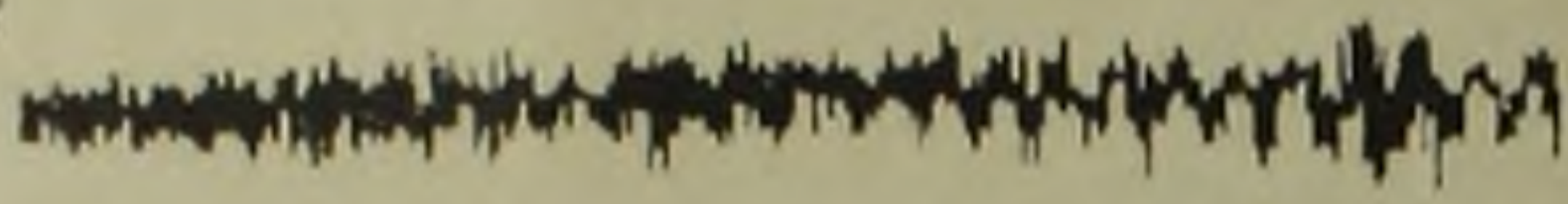


Рис. 4. *а* — осциллограмма пульсаций ламинарного потока в трубе, воспринятых фонодатчиком; *б* — чернильная запись кардиографом пульсаций, воспринятых пьезодатчиком

Обработка экспериментального материала привела к выводу о существовании пульсации жидкости при всех испытанных режимах ее движения в трубах; о сложности этих колебаний; о независимости частот колебания от режимов потока.

В табл. 1 приведены выделенные в экспериментах автора частоты разного порядка колебаний, а также вычисленные по формуле (5), приведенной в (12) для частоты колебания цилиндрического столба жидкости при действии поверхностного натяжения между водой и сталью $T=2{,}9$ *дин/см.*

$$N_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8n(n^2-1)T}{\rho D^3}}, \qquad (5)$$

где $n=2, 3, 4...$; D—диаметр трубы; ρ—плотность жидкости, T—поверхностное натяжение.

Сопоставление измеренных в эксперименте частот колебания потока с частотами упругих колебаний цилиндрического ствола жидкости показывает их полную согласованность. А это означает, что скорость вращения вихревой системы соответствует значению

$$\omega = 2\pi N \qquad (6)$$

и является постоянной для данной трубы с данной жидкостью. Наложение же постоянных скоростей на колеблющуюся систему не меняет характера колебания столба жидкости, как это следует из уравнения колебания ([12]).

Таким образом, ламинарное движение жидкости в цилиндрической трубе образуется винтовым вихрем, являющимся механическим отражением сопротивления стен трубы движению жидкости.

Таблица 1

Частота колебания потока по формуле (5) и по экспериментальным записям автора

D см	0,6		0,69		0,21		1,8	
Nn	теоретическое	экспериментальное	теоретическое	экспериментальное	теоретическое	экспериментальное	теоретическое	экспериментальное
N_2	5,30	5,34	3,25	3,18	1,42	1,56	0,78	0,73
N_3	10,55	10,30	6,46	5,67	2,83	2,32	1,55	1,64
N_4	16,70	16,80	10,20	10,15	4,47	4,66	2,46	2,47
N_5	23,60	24,00	14,45	13,90	6,35	6,40	3,48	—
N'_6	31,20	—	19,20	19,00	8,40	8,44	4,60	4,85
N_7	39,50	39,50	24,20	24,20	10,60	10,30	5,82	6,00
N_8	48,30	48,30	29,60	29,40	13,00	13,10	7,13	—
N'_9	57,80	—	35,40	—	15,50	15,50	8,50	—
N'_{10}	67,50	—	41,41	—	18,10	17,60	9,55	10,30
N'_{11}	—	—	—	—	21,00	21,20	11,50	11,60
N'_{12}	—	—	—	—	24,00	24,20	13,20	13,10
N'_{13}	—	—	—	—	27,00	26,60	14,80	14,90
N'_{14}	—	—	—	—	30,20	30,30	16,60	—
N_{15}	—	—	—	—	33,50	33,40	18,40	—
N'_{16}	—	—	—	—	36,80	35,70	20,30	—
N_{17}	—	—	—	—	40,50	—	22,20	22,20
N'_{18}	—	—	—	—	44,10	45,40	24,30	24,10
N'_{19}	—	—	—	—	47,70	—	26,20	26,20
N_{20}	—	—	—	—	51,50	—	28,30	27,30

Вследствие действия винтового вихря поток в трубе является безусловно периодическим, периоды которого определяются формулой упругих колебаний цилиндрического ствола жидкости. Они не зависят от режима потока жидкости в водоводе.

Считаю уместным выразить глубокую благодарность изготовителю чувствительного фонодатчика М. Г. Хачияну.

Институт органической химии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Խողովակում լամինար չարժման բնույթի մասին

Մինչ այժմ ուղղաչիք դիտված հեղուկի լամինար չարժումը խողովակում այստեղ վերաքայված է նրա հիդրոդինամիկական դիմադրության մորկային էության տեսակետից և Ն. Գ. Ջետաևի քնորհմից ելնելով իդեալական հեղուկում պոտոտակային մորկի կայունությունից բխեցրած է, որ իրական հեղուկի չարժումը խողովակում պոտոտակային է։

Այս եզրակացությունն ստուգված է հեզինակի բազմաքիվ և բազմերանգ փորձերով, որոնք վկայում են խողովակում հեղուկի չարժման միայն պոտոտակային բնույթի մասին՝ լամինարության տիրույթում, համենայն դեպս։

Շարժման պոտոտակայնությունից բխեցրած է նրա պերիոդիկ բնույթը, որը հեզինակի բազմաքիվ, միանգամայն օբյեկտիվ փորձերի միջոցով հաստատված է։

Ցույց է տրված նաևնպես, որ հեղուկի տատանումները խողովակում բարդ են, կազմված տարբեր կարգի տատանումներից, որոնց հաճախականությունները որոշվում են մակերևույթային լարվածությամբ բնորոշվող հեղուկի տատանումների տեսությամբ (12)։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. П. Калинушкин*, „Известия АН СССР", серия ОТН, № 3 (1952). [2] *М. А. Великанов*, Динамика русловых потоков, стр. 373, 1949. [3] *В. И. Юдович*, Тезисы докладов на 3-ем Всесоюзном съезде, посвященном теоретической и прикладной механике, М., 1968. [4] *Н. Е. Кочин* и др., Теоретическая гидромеханика, т. 1, 1948. [5] *H. Levy, A. G. Forsdyke*, Proc Royal Soc., A 114, pp. 594—601 (1927) [6] *H. Levy, A. G. Forsdyke* Proc Royal Soc., A 120, pp 670—690 (1928). [7] *Н. Г. Четаев*, Об устойчивости движения, стр 102 1946 [8] *Brillion*, Recherches resentes sur diverses guestions d'Hydrodynamiques 1891, стр 8. [9] *А. Я. Милович*, Теория динамического взаимодействия тел и жидкости, 1940. [10] *Н. Е. Жуковский*, Избранные сочинения, т. 2, стр. 199, 204, 1948. [11] *Б. Дель-Нунцио* Сб. Проблема турбулентности, стр. 186, 1936. [12] *Г. Ламб*, Гидродинамика, стр. 593 1947.