

МЕХАНИКА

УДК 539.3

Э. В. Белубекян

Изгиб трансверсально изотропной прямоугольной пластинки
 с симметричной трещиной

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 29/IX 1969)

В настоящей работе рассматривается задача поперечного изгиба трансверсально изотропной свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки с симметричной относительно осей симметрии трещиной под действием равномерно распределенной нагрузки.

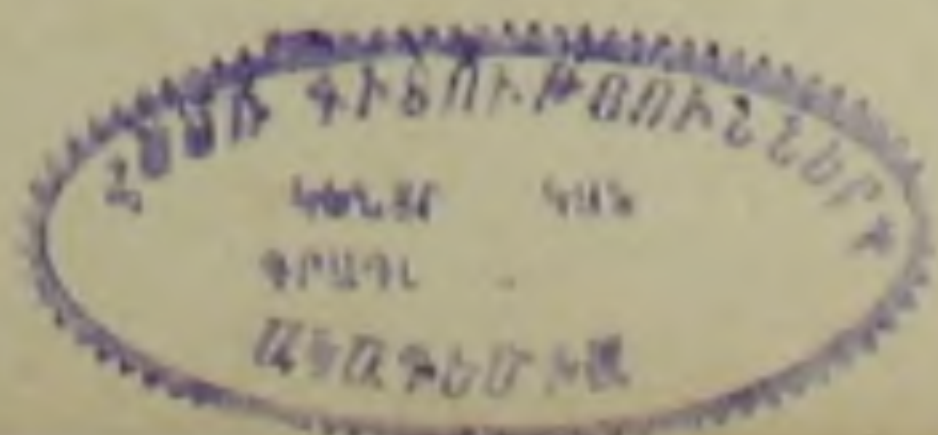
Решение этой задачи для изотропной пластинки на основе классической теории изгиба пластин рассматривалось в работе (1). Однако, как известно, классическая теория может дать существенные погрешности для трансверсально изотропных пластин при больших значениях приведенной относительной толщины пластинки (2) и, кроме того, не дает правильного представления о напряженном состоянии в окрестности трещины даже для изотропных пластин (3).

Целью данной работы является получение, на основе уточненной теории С. А. Амбарцумяна (2) поправки для трансверсально изотропных и изотропных пластин к основному напряженному состоянию в окрестности трещины, даваемой классической теорией (1).

На основе уточненных уравнений изгиба пластин, полученных в (2), задача сводится к решению "парных" рядов, которые в свою очередь приводятся к квазиполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Дается сравнение результатов данной задачи с результатами, полученными в работе (1) на основе классической теории. Решены численные примеры.

Задача о чистом изгибе изотропной бесконечной пластинки с бесконечной трещиной по уточненной теории Рейснера рассмотрена в работе (3).

1. Рассматривается симметричная относительно осей x и y трансверсально изотропная пластинка шириной $2b$, длиной $2a$, толщиной h с разрезом по оси y длины $2rb$ ($0 < r < 1$), симметричным относительно оси x , под действием равномерно распределенной нагрузки P (рис. 1).



Согласно ⁽²⁾ с учетом $p = \text{const}$ дифференциальные уравнения изгиба пластинки имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta \Delta w &= \frac{p}{D}, \\ \Delta \Phi - \frac{10}{h^2} \frac{G'}{G} \Phi &= 0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

где $w = w(x, y)$ — функция прогиба, $\Phi = \Phi(x, y)$ — функция, через которую выражаются функции сдвига φ и ψ . Функции φ и ψ , а также значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента H , поперечных сил N_x и N_y определяются по известным формулам уточненной теории для трансверсально изотропных пластин ⁽³⁾.

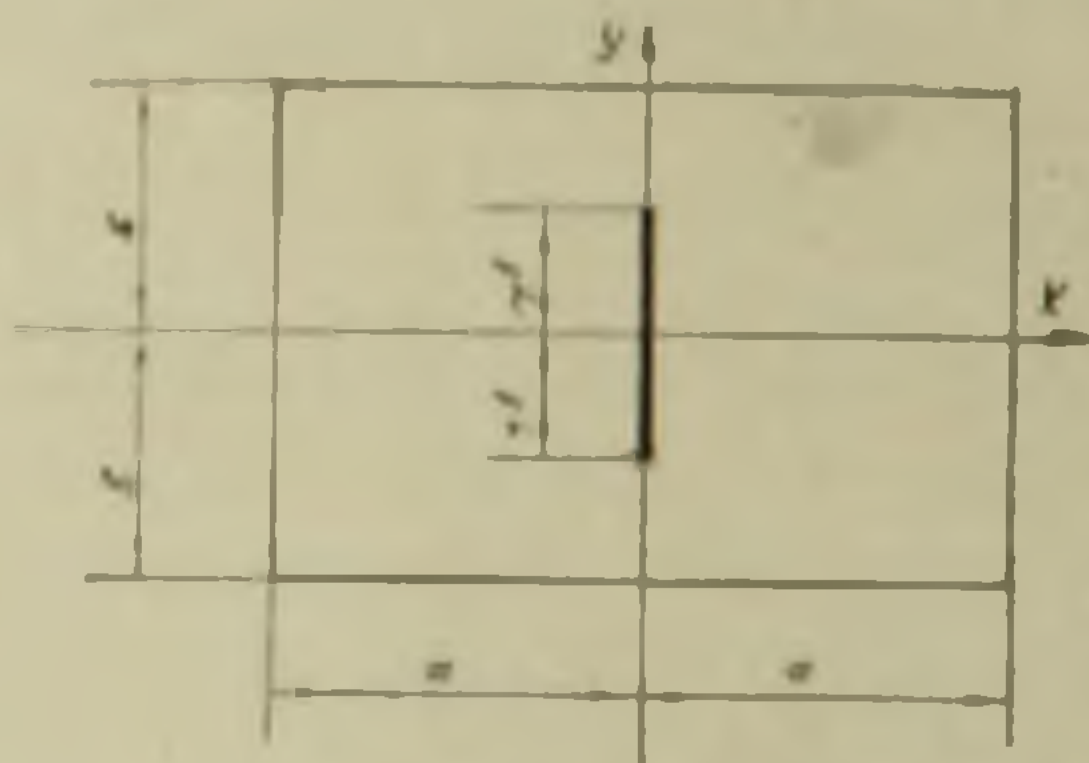


Рис. 1

Ввиду симметрии задачи относительно оси y , рассматривается только правая половина пластинки с условиями свободного опирания по трем сторонам $x = a$ и $y = \pm b$, свободного конца на отрезке $x = 0$, $- \mu b < y < \mu b$ и условиями симметрии на отрезке $x = 0$, $\pm \mu b < y < \pm b$. Следовательно, граничные условия запишутся в виде

$$w = 0, M_y = 0, \varphi = 0 \quad \text{при } y = \pm b, \quad (1.2)$$

$$w = 0, M_x = 0, \psi = 0 \quad \text{при } x = a, \quad (1.3)$$

$$M_x = 0, N_x = 0, H = 0 \quad \text{при } x = 0, 0 < y < \mu b, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, N_x = 0, H = 0, \quad \text{при } x = 0, \mu b < y < b. \quad (1.5)$$

Разлагая нагрузку p в ряд Фурье

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k y, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b p \cos \lambda_k y = \frac{4p(-1)^k}{\pi(2k+1)} \quad (1.6)$$

решения уравнений (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), принимаются в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k \operatorname{sh} \lambda_k x +$$

$$+ C_k x \operatorname{ch} \lambda_k x + D_k x \operatorname{sh} \lambda_k x | \cos \lambda_k y$$

$$\Phi = \sum_0^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \omega_k x + F_k \operatorname{sh} \omega_k x] \sin \lambda_k y, \quad (1.7)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2b}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_k = \lambda_k \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\lambda_k^2}}, \quad \delta^2 = \frac{10}{h^2} \frac{G'}{G} \quad (1.8)$$

$f(y)$ — частное решение первого из уравнений (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2)

$$f(y) = \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \cos \lambda_k y = \frac{P}{24D} (y^4 - 6y^2 b^2 + 5b^4), \quad (1.9)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.3) — (1.5), решение задачи сводим к решению следующих „парных“ уравнений:

$$\sum_0^{\infty} C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) (1 - N_k) \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi = \sum_0^{\infty} U_k \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi \quad (0 < \varphi < \beta)$$

$$\sum_0^{\infty} C_k \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi = 0 \quad (\beta < \varphi < \pi), \quad (1.10)$$

$$N_k = \frac{-2e^{-\omega_k a}}{(1+\nu) \operatorname{ch} \omega_k a} + \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{e^{-\lambda_k a}}{\operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\lambda_k a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a} -$$

$$- \frac{4}{\delta^2(1+\nu)} \lambda_k^2 (\operatorname{th} \lambda_k a - \operatorname{th} \omega_k a - Q_k \operatorname{th} \omega_k a), \quad (1.11)$$

$$Q_k = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\lambda_k^2}} - 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\lambda_k^2}, \quad (1.12)$$

$$U_k = - \frac{b}{\pi(1+\nu)} a_k \left\{ \frac{\nu}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k a} \left[\frac{a}{2} \lambda_k (1-\nu) \operatorname{th} \lambda_k a - \right. \right.$$

$$\left. - \nu \right] + \frac{1}{(1-\nu)\delta^2 \operatorname{ch} \lambda_k a} \left[2\nu - \nu' l + (2-\nu' l) \left(\frac{2\lambda_k^2}{\delta^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k a}{\delta^2 \operatorname{ch} \omega_k a} - \frac{\lambda_k a (1-\nu)}{2} \operatorname{th} \lambda_k a \right) \right] - \frac{2\nu - \nu' l}{\delta^2(1-\nu)} \left. \right\}, \quad (1.13)$$

$$\varphi = \frac{\pi y}{b}, \quad \beta = \mu\pi, \quad l = \frac{EG'}{E'G}. \quad (1.14)$$

„Парные“ ряды (1.10) методом, разработанным в работе (4), сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$C_n = \sum_0^{\infty} a_{kn} C_k + b_n, \quad (1.15)$$

где

$$a_{kn} = \left(k + \frac{1}{2} \right) N_k J_{kn}, \quad b_n = \sum_0^{\infty} U_k J_{kn},$$

$$J_{kn} = \int_0^{\pi} P_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (1.16)$$

$P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра.

В работе (1) показано, что система (1.15) квазирегулярна при N_k , имеющем порядок убывания не ниже $1/k$.

Здесь при больших значениях k для N_k нетрудно получить оценку $N_k = O(1/k^2)$.

Следовательно, задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. При этом для коэффициентов C_n получается оценка

$$C_n = O(n^{-1/2}).$$

2. После определения коэффициентов C_k значения прогибов, моментов и поперечных сил на линии $x = 0$ можно вычислить по следующим выражениям:

$$w = f(v) - \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k a} \left\{ \frac{1}{\lambda_k^3} + \frac{a}{2} \operatorname{th} \lambda_k a \left[\frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{2 - \nu' l}{\delta^2 (1 - \nu)} \right] \right\} \cos \lambda_k y - \frac{1}{D} \sum_0^{\infty} C_k \left(\frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a} + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{th} \lambda_k a \right) \cos \lambda_k y, \quad (2.1)$$

$$M_x = - \frac{\pi (1 + \nu)}{b} \sum_0^{\infty} U_k \cos \lambda_k y + \frac{\pi (1 + \nu)}{b} \sum_0^{\infty} C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) (1 - N_k) \cos \lambda_k y, \quad (2.2)$$

$$M_y = \sum_0^{\infty} Z_k \cos \lambda_k y - \frac{p (2 - \nu' l)}{\delta^2 (1 - \nu)} + \frac{\pi (1 + \nu)}{b} \sum_0^{\infty} C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) (1 - L_k) \cos \lambda_k y, \quad (2.3)$$

где

$$Z_k = a_k \left\{ \frac{1}{\lambda_k^2} - \frac{1}{\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k a} \left[1 + \frac{\lambda_k a}{2} (1 - \nu) \operatorname{th} \lambda_k a \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1-\nu)\delta^2 \operatorname{ch} i_k a} \left[2 - \nu \nu' l - (2 - \nu' l) \left(\frac{2i_k^2}{\delta^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2i_k^2 \operatorname{ch} i_k a}{\delta^2 \operatorname{ch} \omega_k a} - \frac{i_k a}{2} \operatorname{th} i_k a \right) \right] \Bigg\}, \\
L_k &= \frac{2}{1+\nu} \frac{e^{-\omega_k a}}{\operatorname{ch} \omega_k a} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{e^{-i_k a}}{\operatorname{ch} i_k a} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{i_k a}{\operatorname{ch}^2 i_k a} + \\
& + \frac{4i_k^2}{\delta^2 (1+\nu)} (\operatorname{th} i_k a - \operatorname{th} \omega_k a - Q_k \operatorname{th} \omega_k a) \\
H &= 0, \quad N_x = 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$N_y = \sum_0^\infty Y_k \sin i_k y + \delta^2 \sum_0^\infty C_k (1 - \rho_k) \sin i_k y, \tag{2.5}$$

$$Y_k = a_k \left\{ -\frac{1}{i_k} + \frac{1}{i_k \operatorname{ch} i_k a} + \frac{(2 - \nu' l)}{\delta^2 (1 - \nu)} \frac{i_k}{\operatorname{ch} i_k a} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} i_k a}{\operatorname{ch} \omega_k a} \right) \right\},$$

$$\rho_k = \frac{e^{-\omega_k a}}{\operatorname{ch} \omega_k a} + \frac{2i_k^2}{\delta^2} (\operatorname{th} i_k a - \operatorname{th} \omega_k a - Q_k \operatorname{th} \omega_k a).$$

В этих выражениях, если положить $G/G' = E/E' = 0$, получатся формулы для определения изгибающих моментов и поперечных сил на основе классической теории изгиба пластин. Если же положить $G/G' = E/E' = 1$, получим случай изотропной пластинки.

Из выражения (2.4) видно, что поперечная сила N_y непрерывна и ограничена на всей линии $x = 0$, что следует из непрерывности и ограниченности суммы ряда $\sum_0^\infty C_k \sin i_k y$.

В выражение же N_x , вычисленное на основе классической теории, входит ряд $\sum_0^\infty C_k i_k^2 \sin i_k y$, сумма которого у конца трещины имеет особенность порядка $(\cos \beta - \cos \varphi)^{-3/2}$.

Исследуем поведение изгибающих моментов M_x и M_y у конца трещины. В правые части выражений (2.1) и (2.2) входят ряды $\sum_0^\infty C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) \cos i_k y$. Подставив сюда значение C_k из (1.15) и выделив главную часть этого ряда на участке (β, π) , получим:

$$\begin{aligned}
\sum_0^\infty C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) \cos i_k y &= \sum_0^\infty C_k \left(k + \frac{1}{2} \right) \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi = \\
&= \frac{\sin \varphi R}{V \cos \beta - \cos \varphi} + \Omega(\varphi),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$R = -\frac{V\sqrt{2}}{2} \sum_0^\infty \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) N_k C_k + U_k \right] P_k(\cos \beta),$$

а ограниченная и непрерывная функция $\Omega(\varphi)$ определяется из выражения

$$\Omega(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} \sum_0^{\infty} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) N_k C_k + U_k \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \sum_0^{\infty} \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) N_k C_k + U_k \right] \int_0^{\cos \varphi} \frac{P_k(z) dz}{V z - \cos \varphi}.$$

Таким образом, M_x и M_y у края трещины имеют особенность порядка $(\cos \beta - \cos \varphi)^{-1/2}$, а коэффициент при особенности для обоих моментов равен $\frac{\pi(1+\nu)}{b} \sin \varphi R$. По классической теории M_x и M_y , согласно (1), имеют тот же порядок особенности, однако коэффициенты особенности равны:

$$\text{для } M_x \frac{(3+\nu)\pi}{b} \sin \varphi R, \quad \text{для } M_y \frac{(1-\nu)\pi}{b} \sin \varphi R.$$

Следовательно, по классической теории отношение особенностей M_y к M_x равно $-\frac{1-\nu}{3+\nu}$, в то время как по уточненной теории оно равно 1.

Следует отметить, что аналогичные поправки к классической теории по теории Рейснера были получены в работе (3) для случая чистого изгиба бесконечной изотропной пластинки с конечной трещиной.

3. В качестве примеров рассматриваются: изотропная и трансверсально изотропная квадратные пластинки ($a=b$) толщиной $h=b/10$ и $h=b/5$, с трещиной длины, равной половине ширины пластинки $\left(\mu = \frac{1}{2}\right)$ под действием равномерно распределенной нагрузки $p = \text{const}$. При этом принимается: для изотропной пластинки $\nu = \nu' = 0,25$, $G = G'$, для трансверсально изотропной пластинки $\nu = 0,25$, $\nu' = 0$, $G/G' = 5$.

Из системы уравнений (1.15) определяются значения коэффициентов C_n .

По формулам (2.1)–(2.3) определены значения прогибов w и изгибающих моментов M_x , M_y на линии $x=0$ для изотропной и трансверсально изотропной пластин. По полученным значениям построены эпюры w , M_x и M_y для $h=b/10$ (рис. 2) и $h=b/5$ (рис. 3).

Штрих-пунктирной линией показаны эпюры w , M_x и M_y , полученные по классической теории (1), пунктирной линией — полученные по уточненной теории для изотропной пластинки, сплошной линией — по уточненной теории для трансверсально-изотропной пластинки.

Из сравнения эпюр видно, что при толщине пластинки $h=b/10$ уточнения теория не дает существенных поправок для w и

M_x (до 10%), однако для M_y получаются большие расхождения на линии трещины и вблизи ее концов между результатами уточненной и классической теорий.

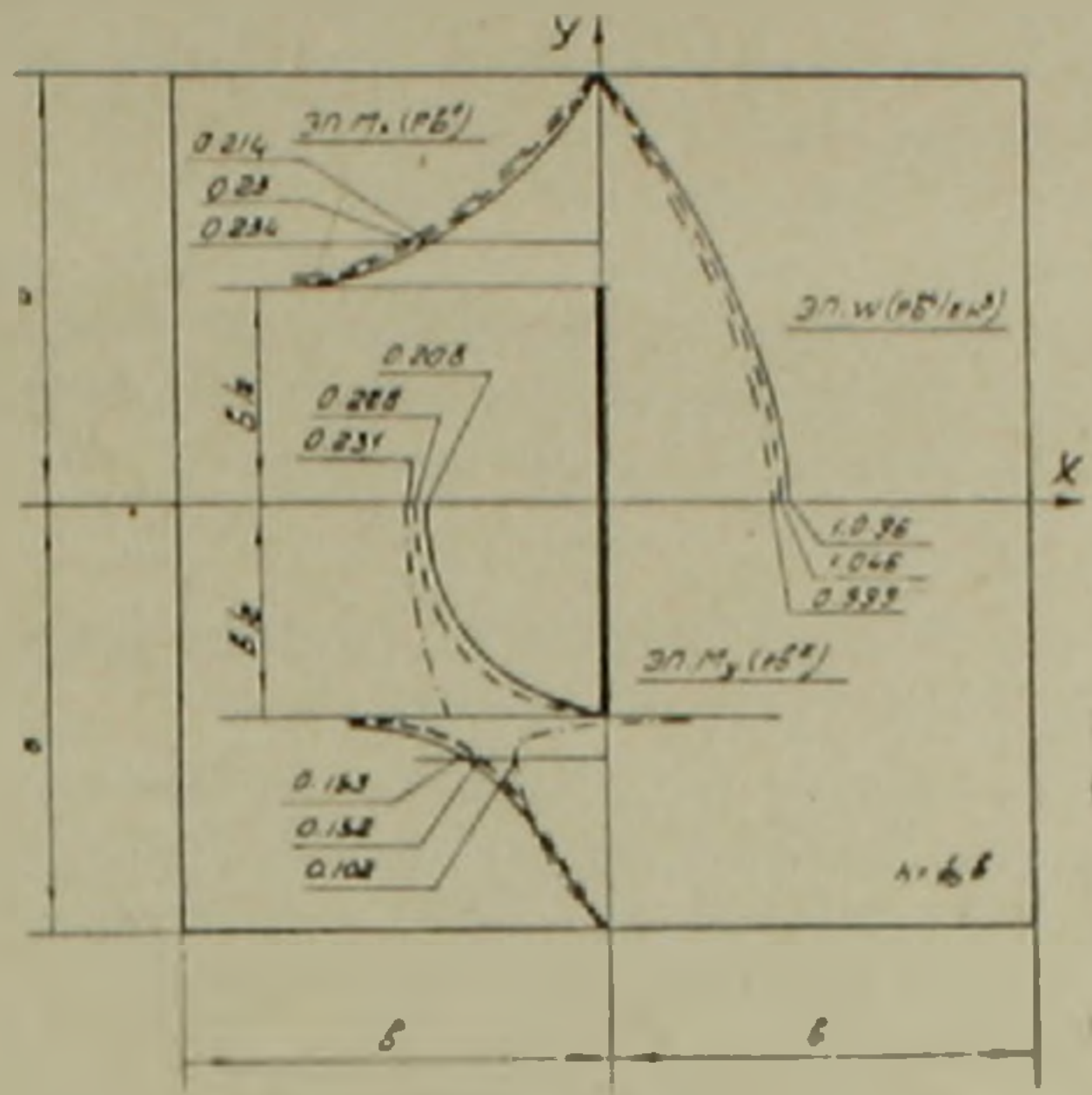


Рис. 2

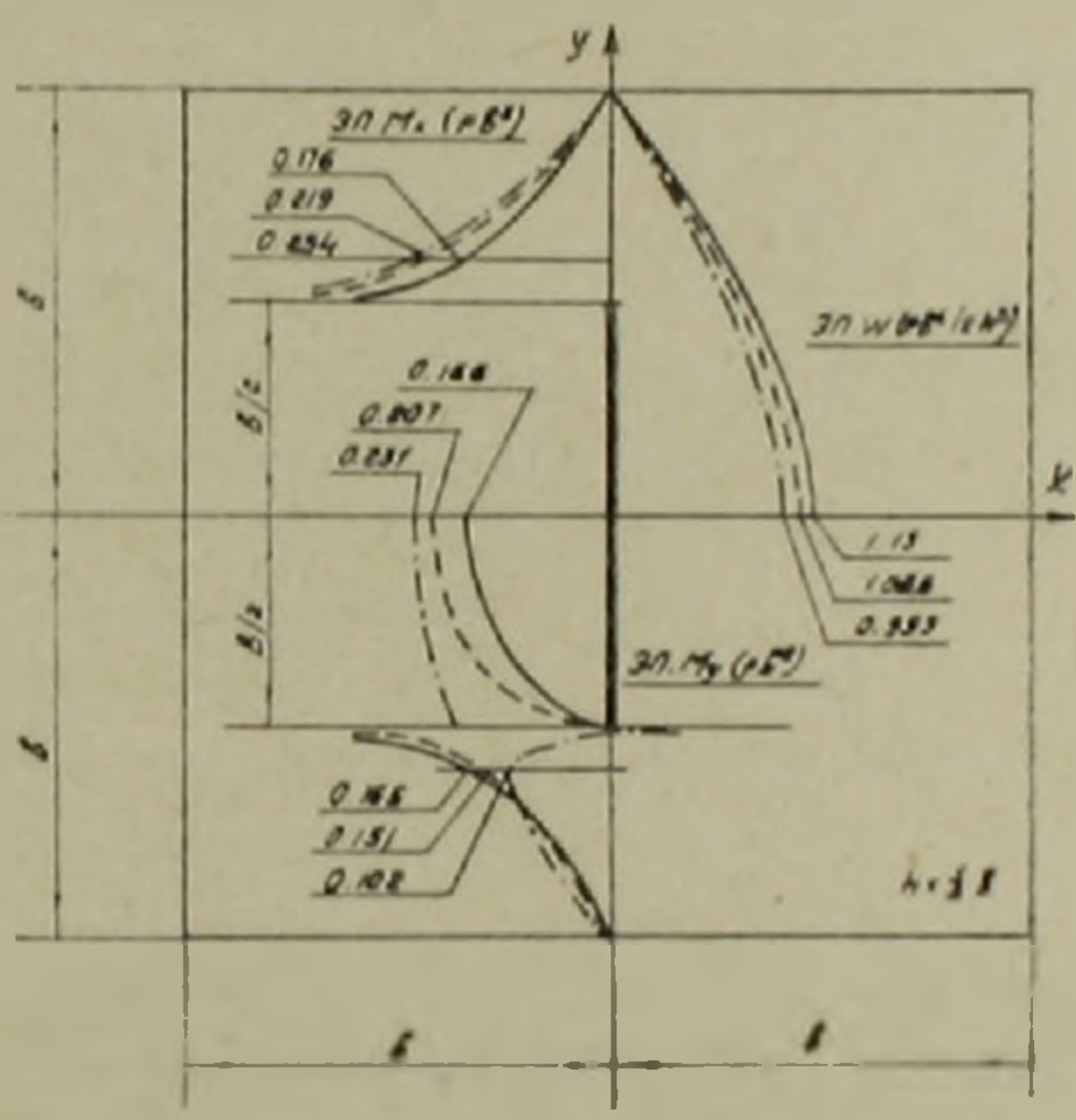


Рис. 3

При толщине плиты $h = b/5$ для трансверсально изотропной пластинки получаются существенные поправки к классической теории для σ_x — 15%, для M_x — 25%. Значение же M_y сильно отличается на линии трещины и вблизи ее концов от результатов классической теории не только для трансверсально изотропной пластинки, но и для изотропной.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Սիմետրիկ նեղում տրանսվերսալ իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ծուծը

Աշխատանքում դիտարկվում է հավասարաչափ բաշխված բևոի տակ դոնվող պարագծով ազատ հենված տրանսվերսալ իզոտրոպ ուղղանկյուն սալի ծուծան խնդիրը, երբ սալն ունի առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ ճեղք:

Խնդիրը լուծվում է Ս. Ա. Համբարձումյանի սալերի ծուծան ճշտված տեսության հիման վրա, բերելով այն «գույճ շարքերի», որոնք իրենց հերթին բերվում են հանրահաշվական գծային հավասարումների կիսգի լիովին ոեգուլյար անվերջ սիստեմի: Ստացվում են տրանսվերսալ իզոտրոպ և իզոտրոպ սալերի ճաքերի շրջակայքում կլասիկ տեսության հիմնական լարվածա-յին վիճակների ճգրտումները: Բերվում են թվային օրինակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Э. В. Белубекян, „Известия АН АрмССР“, Механика, т. XXI, № 2 (1968).
- ² С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных пластин, Издательство „Наука“, М., 1967.
- ³ J. K. Knowles, N. M. Wang J. Math. and Phys., vol 39, № 4 (1960). ⁴ А. А. Баб-
люн, ДАН АрмССР, т. 39, № 3 (1964).