

Ա.Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ռ.Ն. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԿՄԱԽՔԱՅԻՆ ԳՐԱՖԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹԱՄԻ ԽՈՇՈՐԱՀԱՏԻԿ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՑՈՒՄԸ

Տրված կետերի բազմության վրա որոշված մետրիկայով նույն գրաֆ կառուցելու խնդիրը, որը պարունակում է առնվազն մեկ նվազագույն կմախքային ծառ, կոչվում է կմախքային գրաֆի կառուցման խնդիր: Այս խնդիրը հիմք է հանդիսանում մի շարք ալգորիթմների համար, ինչպիսիք են ուղղանկյուն նվազագույն կմախքային ծառի կառուցումը, Մթայների ծառի արդյունավետ կառուցումը, խոչընդոտներից խուսափող Մթայների ծառի կառուցումը և այլն: Այս ալգորիթմները կիրառվում են համակարգչային գիտության բազմաթիվ ոլորտներում, հատկապես՝ ծրագրման ալգորիթմներում: Քանի որ այս խնդիրներից շատերը NP-լրիվ են, և դրանցից մի քանիսը օգտագործում են կմախքային գրաֆի կառուցման մոտեցումը, ապա այդ պրոցեսի զուգահեռացումը կարող է օպտիմալացնել նաև մյուս խնդիրները: Ներկայացվում է կմախքային գրաֆի կառուցման ալգորիթմի բարձր մակարդակի զուգահեռացման մոտեցումը: Առաջարկվող ալգորիթմը, համեմատած առկա հաջորդական տարբերակի հետ, ապահովում է միջինում մոտավորապես 40-60% արտադրողականության աճ:

Առանցքային բառեր. նվազագույն կմախքային ծառ, ուղղանկյուն հեռավորություն, զուգահեռացում, գերմեծ ինտեգրալ սխեմաների նախագծում, սահող գծի ալգորիթմ:

А.Г. АРУТЮНЯН, Р.Н. ХАЧАТРЯН

КРУПНОЗЕРНИСТАЯ ПАРАЛЛЕЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ КАРКАСНОГО ГРАФА

Задача построения каркасного графа заключается в создании разреженного графа на заданном множестве точек таким образом, чтобы граф содержал хотя бы одно минимальное остовное дерево в соответствии с заданной метрикой расстояния. Эта задача лежит в основе множества алгоритмов, таких как построение прямоугольного минимального остовного дерева, эффективное построение дерева Штайнера, построение дерева Штайнера с учетом препятствий и др. Эти алгоритмы применяются во многих областях информатики, особенно в алгоритмах трассировки в проектировании VLSI. Поскольку многие из этих задач являются NP-полными и некоторые из них используют подход построения каркасного графа, параллелизация этого этапа может также оптимизировать и другие задачи. В данной работе представлен подход к высокоуровневой параллелизации алгоритма построения каркасного графа. Предлагаемый алгоритм, по сравнению с существующим последовательным вариантом, обеспечивает в среднем около 40...60% прироста производительности.

Ключевые слова: минимальное остовное дерево, прямолинейное расстояние, распараллеливание, крупнозернистый параллелизм, проектирование сверхбольших интегральных схем, алгоритм скользящей линии.

Հ.Ս. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

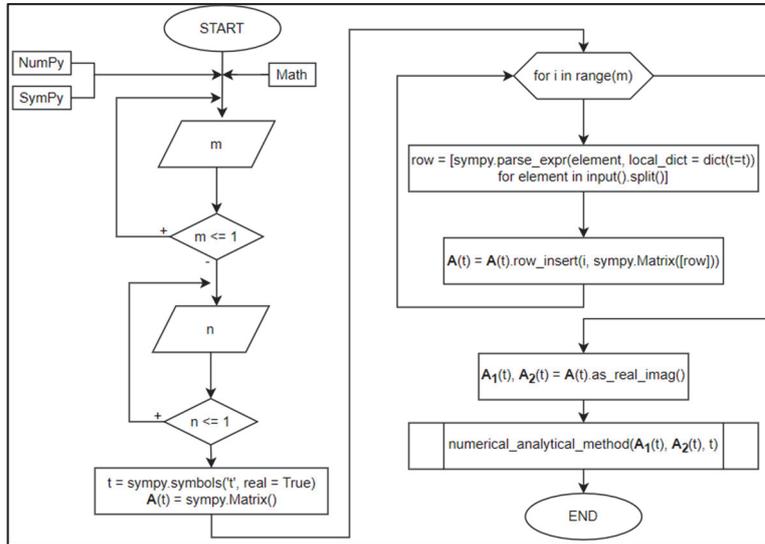
ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒՋԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ
ՀԱԿԱՂԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԻՐԱԿԱՆԱՑՈՒՄԸ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ (II)

Ներկայացված է Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն թվա-անալիտիկ եղանակի ծրագրային իրականացումը: Համապատասխան անալիտիկ եղանակները հիմնվել են Մուր-Պենրոուզի 4-րդ պայմանի, իսկ թվա-անալիտիկ մեթոդները՝ ստացված անալիտիկ առնչությունների վրա, ինչպես նաև Պուլտովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների, որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ: Հաշվողական եղանակներն իրականացվել են տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցների՝ ծրագրավորման Python լեզվի, ինչպես նաև NumPy և SymPy գրադարանների կիրառմամբ: Ծրագրային իրականացումը փորձարկվել է միապարամետրական որոշյալ մատրիցով մոդելային օրինակի միջոցով:

Առանցքային բառեր. Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրից, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծում, ծրագրավորման Python լեզու, NumPy գրադարան, SymPy գրադարան:

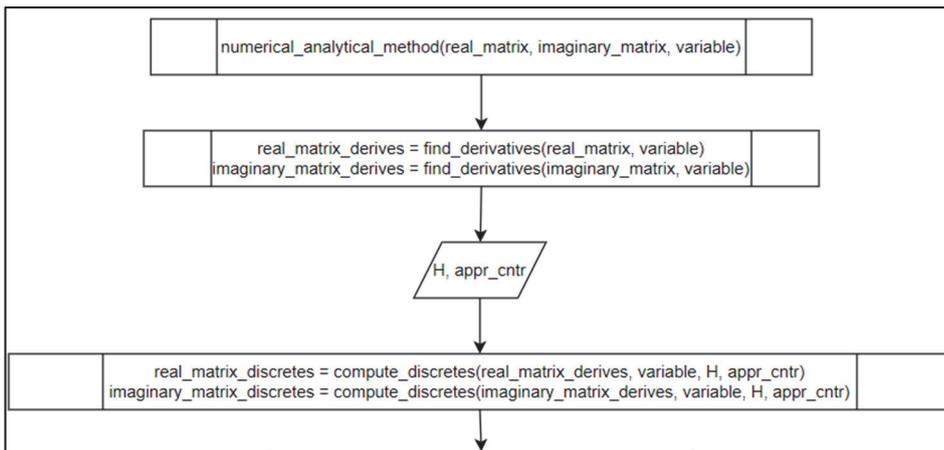
Ներածություն: [1] աշխատանքում առաջարկվել են կոմպլեքս միապարամետրական $A(t)_{m \times n}$ մատրիցի՝ Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձ $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցի [2] որոշման մեթոդներ, որոնցում օգտագործվել են Մուր-Պենրոուզի 1-ին, 2-րդ և 4-րդ պայմանները: Մույն աշխատանքում ներկայացվում են մշակված թվա-անալիտիկ մեթոդների ծրագրային իրականացումների ալգորիթմների բլոկ-սխեմաները և Python լեզվով գրված ծրագրային կոդերը [3]:

Ենթադրենք՝ տրված է $A(t) \in C^{m \times n}$ մատրիցը [4, 5]: Մատրիցի չափերը մուտքագրելուց հետո անհրաժեշտ է տող-վեկտորներով մուտքագրել մատրիցի տարրերը (նկ. 1), իսկ այնուհետև՝ առանձնացնել դրանց իրական ($A_1(t)$) և կեղծ ($A_2(t)$) մասերի մատրիցները:



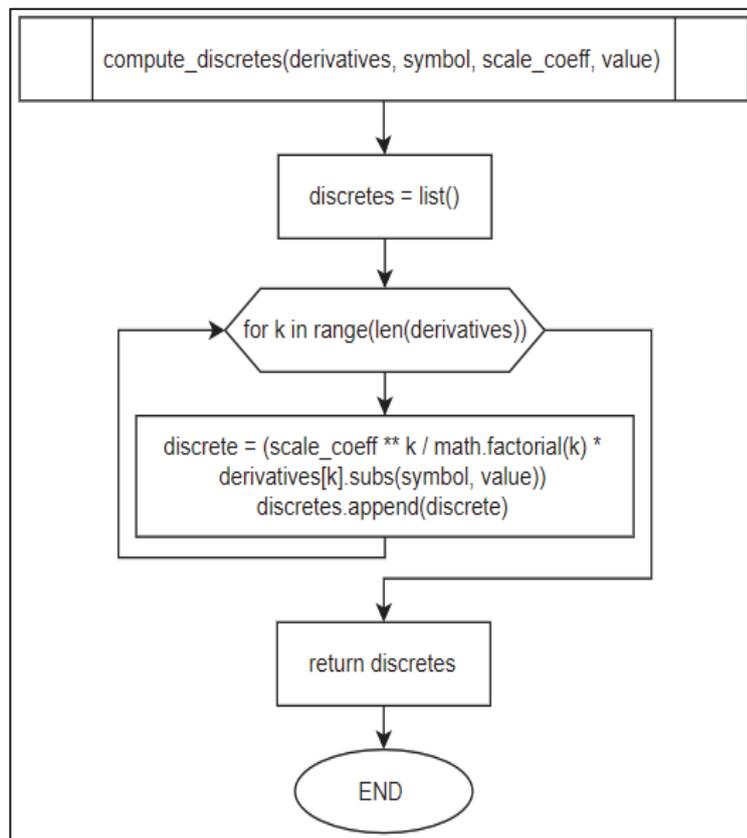
Նկ. 1. Մատրիցի չափերի և տարրերի մուտքագրման բլոկ-սխեման

Թվա-անալիտիկ մեթոդի ծրագրային իրականացումը: $A(t)$ մատրիցի իրական և կեղծ մասերը որոշելուց հետո հաշվվում են դրանց տարրերի ածանցյալները՝ մինչև պահանջվող ճշտության ստացումը [6]: Հաջորդիվ, H մասշտաբային գործակցի ու $appr_cntr$ մոտարկման կենտրոնի արժեքները մուտքագրելուց հետո, պետք է հաշվել $A_1(t)$ ու $A_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները: Նկ. 2-ում ներկայացված բլոկ-սխեմայում *real_matrix* և *imaginary_matrix* պարամետրերը համապատասխանում են $A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցներին, իսկ *variable* պարամետրը՝ t պարամետրին:



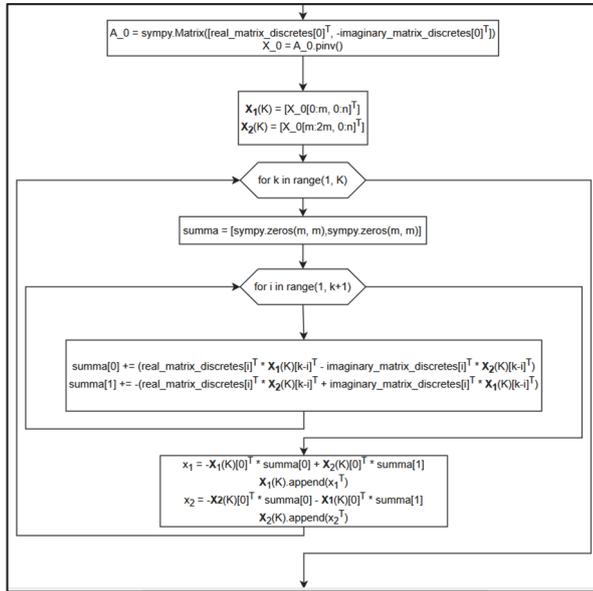
Նկ. 2. Մատրիցային դիսկրետների որոշման բլոկ-սխեման

$A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները հաշվվում են առանձին ֆունկցիայի միջոցով (նկ. 3), որի մուտքային պարամետրերն են մատրիցի տարրերի ածանցյալներից կազմված մատրիցների զանգվածը, այն փոփոխականը, ըստ որի կատարվել է ածանցումը, մասշտաբային գործակցի արժեքը, ինչպես նաև մոտարկման կենտրոնի արժեքը: Ֆունկցիան իր աշխատանքի արդյունքում վերադարձնում է մատրիցային դիսկրետների զանգվածը, որի 1-ին տարրը մուտքային մատրիցի 0-րդ կարգի դիսկրետն է, 2-րդ տարրը՝ մատրիցի 1-ին կարգի դիսկրետը և այլն:



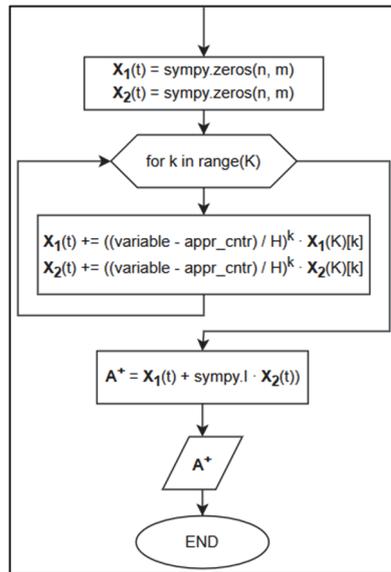
Նկ. 3. Մատրիցային դիսկրետները հաշվող ալգորիթմի բլոկ-սխեման

$A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցների մատրիցային դիսկրետները [7] հաշվելուց հետո որոշվում են $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները [1], բանաձևեր՝ [21–24]՝ մինչև պահանջվող ճշտության ստացումը (նկ. 4):



Նկ. 4. $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցների դիսկրետների հաշվարկի բլոկ-սխեման

$X_1(K)$ և $X_2(K)$ մատրիցային դիսկրետները հաշվելուց հետո արդեն հնարավոր է վերականգնել $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցները [1, բանաձև (18)], ինչից հետո կարելի է որոշել նաև (նկ. 5) Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձ $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցը [1, բանաձև (6)]:



Նկ. 5. $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցի որոշման բլոկ-սխեման

Մոդելային օրինակ: Ենթադրենք, տրված է հետևյալ կոմպլեքս միապարամետրական որոշյալ մատրիցը.

$$A(t) = \begin{bmatrix} (1 + jt) & jt \\ -jt & (1 - jt) \end{bmatrix}:$$

Թվա-անալիտիկ մեթոդի իրականացման արդյունքը ցույց է տրված նկ. 6-ում: Մակլորենյան մոտարկման կենտրոնի արժեքը՝ $t_0 = 0$, մասշտաբային գործակցի արժեքը՝ $H = 1$:

<pre>Enter mxn matrix sizes m = 2 n = 2 Matrix sizes are: m = 2, n = 2 Enter elements of A(t) matrix: 1+I*t I*t -I*t 1-I*t A1(t) = Matrix([[1, 0], [0, 1]]) A2(t) = Matrix([[t, t], [-t, -t]]) NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD Enter scaling coefficient: H = 1 Enter approximation center's value: 0 X1(K) = [Matrix([[1, 0], [0, 1]]), Matrix([[0, 0], [0, 0]]), Matrix([[0, 0], [0, 0]])] X2(K) = [Matrix([[0, 0], [0, 0]]), Matrix([[-1, -1], [1, 1]])], Matrix([[0, 0], [0, 0]])] X1(t) = Matrix([[1, 0], [0, 1]]) X2(t) = Matrix([[-t, -t], [t, t]]) A+(t) = Matrix([[-I*t + 1, -I*t], [I*t, I*t + 1]])</pre>	<pre>X2(K) = [Matrix([[0, 0], [0, 0]]), Matrix([[-1, -1], [1, 1]])], Matrix([[0, 0], [0, 0]])] X1(t) = Matrix([[1, 0], [0, 1]]) X2(t) = Matrix([[-t, -t], [t, t]]) A+(t) = Matrix([[-I*t + 1, -I*t], [I*t, I*t + 1]])</pre>
---	--

Նկ. 6. Թվա-անալիտիկ մեթոդի ծրագրային իրականացման արդյունքը

Եզրակացություն: Ներկայացվել է Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման թվա-անալիտիկ հաշվողական եղանակի ծրագրային իրականացումը՝ տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցների կիրառմամբ: Անալիտիկ եղանակները հիմնվել են Մուր-Պենրոուզի 4-րդ պայմանի վրա, իսկ համապատասխան թվա-անալիտիկ մեթոդները՝ ստացված անալիտիկ հարաբերակցությունների, ինչպես նաև Պուլստվի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Ներկայացվել են ալգորիթմների բովանդակները, իսկ Python լեզվով գրված ծրագրային կոդերը տրամադրվել են որպես բաց կոդով GitHub հղում: Ալգորիթմների արդյունավետությունը փորձարկվել է միապարամետրական որոշյալ մատրիցով մոդելային օրինակի միջոցով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ՑԱՆԿ

1. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Абгарян О.С.** К определению комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2025. - № 1. – С. 9 – 19. <https://doi.org/10.53297/18293336-2025.1-9>
2. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц: Монография.- LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2017. - 222 с.
3. HovhannesAbgaryan/MoorePenrose_IV: Software implementation of decomposition methods for determining complex 1-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (IV)
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Физматлит, 2010.- 560 с.
5. **Ланкастер П.** Теория матриц.- М.: Наука, 1978.- 280 с.
6. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984.-419 с.
7. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография.- Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 361 с.

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան: Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 10.09.2025:

Օ.Տ. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА- ПЕНРОУЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (II)

Представлена программная реализация численно-аналитического декомпозиционного метода определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Соответствующие аналитические методы основаны на 4-ом условии Мура-Пенроуза, а численно-аналитические методы - на полученных аналитических соотношениях и дифференциальных преобразованиях Пухова как основной математический аппарат. Вычислительные методы реализованы средствами современных информационных технологий с применением языка программирования Python, а также библиотек NumPy и SymPy. Программная реализация протестирована на модельном примере с однопараметрической определенной матрицей.

Ключевые слова: комплексная однопараметрическая обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, численно-аналитическое решение, язык программирования Python, библиотека NumPy, библиотека SymPy.

H.S. ABGARYAN

SOFTWARE IMPLEMENTATION OF DETERMINING COMPLEX ONE-PARAMETER GENERALIZED INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES USING DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS (II)

Software implementation of numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices are presented. The corresponding analytical methods are based on the 4th Moore-Penrose condition, and the numerical-analytical methods are based on the obtained analytical relations and differential Pukhov transformations as primary mathematical apparatus. Computational methods are implemented using modern information technologies: Python programming language, as well as NumPy and SymPy libraries. The software implementation is tested on a model example with a one-parameter determined matrix.

Keywords: complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrix, analytical solution, differential transformations, numerical-analytical solution, Python programming language, NumPy library, SymPy library.