ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIX 1969 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

П. Х. Татоян

О соотношениях между средними значениями гармонически сопряженных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 27/VI 1969).

Через U и V мы обозначаем гармонически сопряженные функции в двумерной области. В заметке (1) мы указали области, где из интегрируемости $|U|^p$ $(p>1)$ по площади следует интегрируемость $|V|^p$. Такие области мы назвали областями класса H. Областью класса $H_{(p,\, p')}$ будем называть всякую область, где из интегрируемости $|U|^p$ $(p>1)$ следует интегрируемость $|V|^{p'}$ $(o<p'<p)$, а областью класса $H_{(C,\, p')}$ будем называть всякую область, где из $|U|<\mathrm{const}$ следует интегрируемость $|V|^{p'}$. Понятно, что требование интегрируемости $|V|^{p'}$ равносильно требованию интегрируемости $|f|^{p'}$, где $f=U+iV$.

Цель настоящей работы—отыскание областей классов $H_{(C,\, p')}$ и $H_{(p,\, p')}$.

§ 1. *Области класса* $H_{(C,\, p')}$. 1°. Сначала рассмотрим секто (см. заметку (1)). Возьмем, для простоты, сектор AOB (рис. 1), гд уравнениями дуг AO и BO являются

$$y=\pm\varphi(x),$$

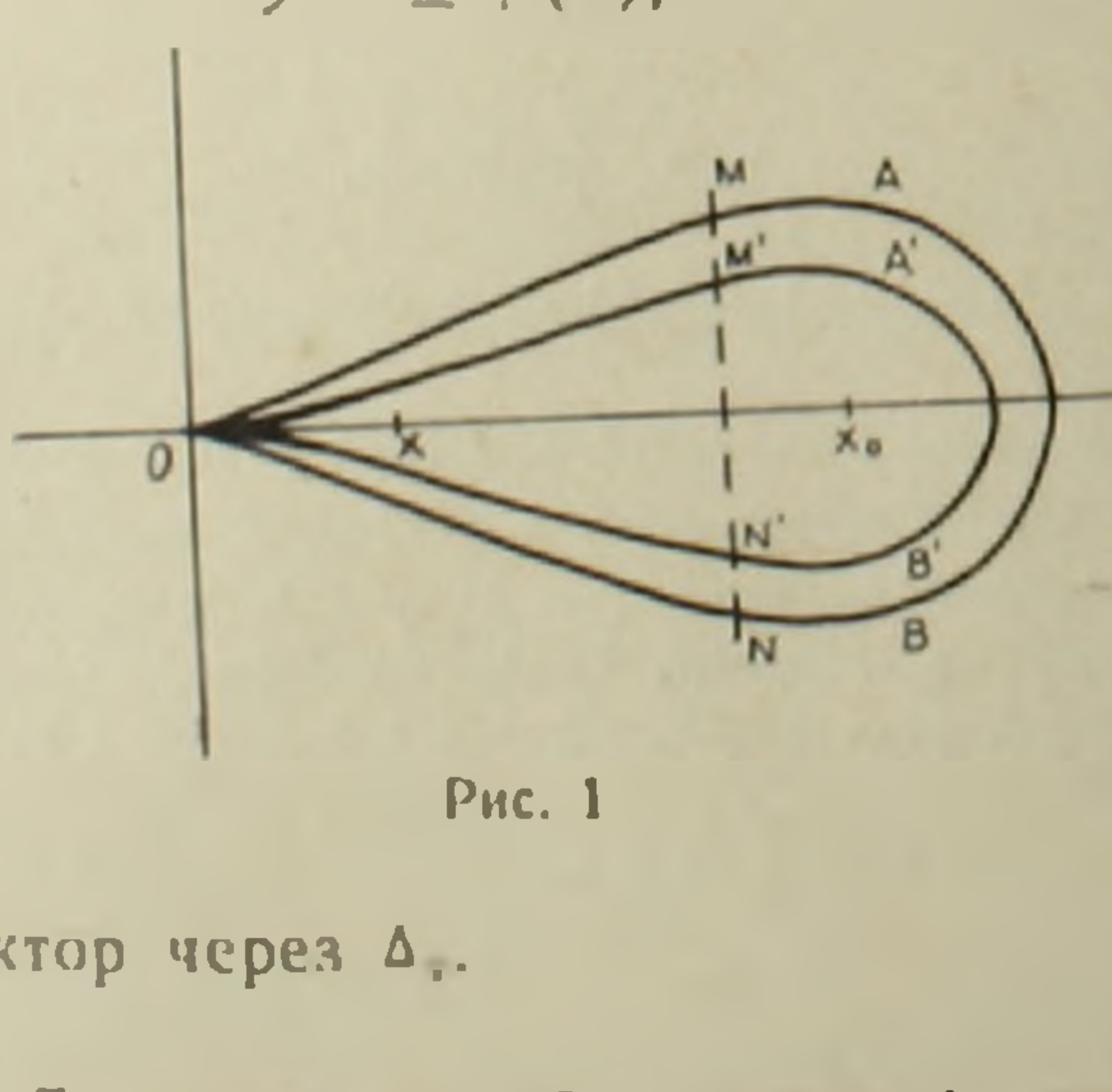

Рис. 1

Обозначим этот сектор через Δ_φ.

Имеет место

Теорема I. *Для того, чтобы сектор* Δ_φ *принадлежал кла су* $H_{(C,\, p')}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Delta_\varphi}\left(\int\limits_{x}^{x_0}\frac{dt}{\varphi(t)}\right)^{p'} dx\,dy<\infty, \tag{1}$$

где (x_0, o) *фиксированная точка внутри* Δ_φ.

Условию (1) можно придать другой вид, а именно

$$\iint\limits_{\Delta_0} |\log\rho|^{p'}\,|\psi'(\rho,\alpha)|^2\rho\, d\rho\, d\alpha<\infty, \tag{1'}$$

где Δ_0 обыкновенный сектор в плоскости (ρ, α), а $\psi(\rho, \alpha)$—функция отображающая Δ_φ на Δ_0.

Для доказательства достаточности этой теоремы мы воспользовались теоремой 1 из ([1]), и нам было достаточно доказать, что, при условии (1), $|V|^{p'}$ интегрируема в одном подобном подсекторе* A'OB' (рис. 1). Беря в частности

$$\varphi(x)=O(x^s), \ (s>1),$$

получаем

$$p'<\frac{s+1}{s-1}. \tag{2}$$

Это неравенство можно переписать и так

$$s<\frac{p'+1}{p'-1} \tag{2'}$$

(которое, для данного p', дает значения s, при которых имеет место (1), (или (1')).

2°. Для получения новых областей $H_{(C,\,p')}$ мы следуем тому же пути, что и при построении областей H ([1]).

Из теоремы 1 следует, что область принадлежит классу $H_{(C,\,p')}$, если ее граница состоит из некоторых дуг, которые пересекаются или касаются так, что функции φ, выражающие порядки касаний, удовлетворяют условию (1).

Построив на границе последней области новые сектора (в бесконечном числе) так, чтобы интегралы вида (1), составленные для этих секторов, были равномерно ограничены, мы получим новую область**, на границе которой опять построим такие же сектора, и этот процесс продолжим произвольное конечное число раз. Полученные таким образом односвязные области обозначим через $P_{(C,\,p')}$. И здесь можно рассмотреть m-связную область ($m\geqslant 1$), которую будем обозначать через $P^{(m)}_{(C,\,p')}$.

* См. ([1]).

** Точки вида $(x_0, 0)$ можно (для нашей цели) выбрать по-разному. Их можно, например, надлежащим образом взять на вычеркнутом участке границы исходной области. Вспомним, далее, что стороны всех секторов—это дуги достаточно гладкой линии (например, линии ограниченной кривизны).

(легко понять, что при этом будут представлять функции φ).

Всякая область $P^{(m)}_{(C,\,p')}$ *принадлежит классу* $H_{(C,\,p')}$. Область перестает принадлежать классу $H_{(C,\,p')}$, если интегралы вида (1) (о которых только что мы упоминали) равномерно не ограничены.

3°. Здесь укажем неограниченные области класса $H_{(C,\,p')}$.

Пусть Δ_φ полоса, ограниченная, для больших x, линиями

$$y = \pm\varphi(x),$$

которых соединяет слева такая же дуга AB, какую мы брали в 1° (рис. 1). Будем предполагать, что Δ_φ имеет конечную площадь.

Теорема II. *Для того, чтобы* Δ_φ *принадлежала классу* $H_{(C,\,p')}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{\Delta_\varphi}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{\varphi(t)}\right)^{p'} dx\,dy < \infty,$$

где $(x_0, 0)$ *фиксированная точка внутри* Δ_φ.

В частном случае, когда

$$\varphi(x) = O\left(\frac{1}{x^s}\right),\ (s > 1),$$

получим

$$p' < \frac{s-1}{s+1}, \quad \text{или} \quad s > \frac{1+p'}{1-p'}.$$

(Здесь, как видно, всегда $p' < 1$).

По уже известному способу построения секторов, получим новые неограниченные области, которые опять будем обозначать через $P_{(C,\,p')}$ а m-связанные $(m \geqslant 1)$ — через $P^{(m)}_{(C,\,p')}$.

Всякая область $P^{(m)}_{(C,\,p')}$ *(ограниченная или нет) принадлежит классу* $H_{(C,\,p')}$.

Следствие. *Пусть* $f_n(z) = U_n(z) + iV_n(z)$ $(z = x + iy)$ *последовательность аналитических в* $P^{(m)}_{(C,\,p')}$ *функций. Если*

1) $|U_n| < C$, *где* C *не зависит от* n,

2) $f_n(z)$ *сходится в одной точке области* $P^{(m)}_{(C,\,p')}$,

то

$$\iint\limits_{P^{(m)}_{(C,\,p')}} |f_n(z) - f_0(z)|^{p'}\,dx\,dy \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

где $f_0(z)$ *предельная функция последовательности* $f_n(z)$ (которая существует по известному следствию формулы Шварца).

§ 2. *Области класса* $H_{(p,\,p')}$. 1°. Пусть, опять, Δ_φ будет сектор определенный линиями

$$y = \pm\varphi(x).$$

Дано, что интеграл от $|U|^p$ $(p > 1)$ конечен в Δ_φ. Мы укажем условие, которому должна удовлетворить функция $\varphi(x)$, чтобы интеграл от $|V|^{p'}$ $(0 < p' < p)$ был бы конечен в Δ_φ.

Пусть $(x_0, 0)$ фиксированная точка внутри Δ_φ, а x находится между 0 и x_0 (рис. 1). Разобъем промежуток $[x, x_0]$ на части точками

$$x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n = x$$

так, чтобы

$$x_{k-1} - x_k = a\varphi(x_{k-1}) \text{ при } k = 1, 2, \cdots, n-1$$

и

$$x_{n-1} - x_n \leqslant a\varphi(x_{n-1}),$$

где a постоянное и $0 < a < 1$.

Теорема III. *Сектор Δ_φ принадлежит классу $H_{(p, p')}$, если*

$$\iint\limits_{\Delta_\varphi} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{x_k}^{x_{k-1}} \frac{dt}{\varphi^{1+\frac{2}{p}}(t)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right\}^{\frac{p'(p-1)}{p}} dx\,dy < \infty. \tag{3}$$

По теореме 1 заметки ([1]), было достаточно доказать, что при условии (3), $|V|^{p'}$ интегрируема в одном подобном Δ_φ подсекторе.

В частном случае, когда

$$\varphi(x) = (x^s), \ (s > 1),$$

получается

$$p' < \frac{p\dfrac{s+1}{s-1}}{p + \dfrac{s+1}{s-1}} \tag{4}$$

или

$$s < \frac{p + pp' - p'}{p' + pp' - p}. \tag{4'}$$

Заметим, что правая часть (4) стремится к $\dfrac{s+1}{s-1}$ при $p \to \infty$ (ср. с (2), §1).

Знак равенства исключается в (4) (или в (4')). В этом можно убедиться рассмотрев функцию*

$$\frac{1}{z^{\frac{s+1}{p}+s-1}\left(\log\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\omega}}},$$

где через ω обозначена правая часть (4'). p-я степень модуля мнимой части этой функции интегрируема в рассмотренном секторе, а p'-я степень модуля действительной части—нет.

* При отыскании этой функции мы воспользовались примерами из ([1]) (см. стр. 4 неравенства (2)).

Замечание. Уже этот результат показывает, что трудно улучшить условие (3). Мы думаем, что, более того, оно является и необходимым (для принадлежности сектора классу $H_{(p,\,p')}$).

2°. Способ построения областей $H_{(C,\,p')}$ (§ 1, 2°) можно дословно повторить здесь, только интегралы вида (1) надо будет заменить интегралами вида (3). Полученные таким образом m-связанные ($m > 1$) области обозначим через $P^{(m)}_{(p,\,p')}$.

Всякая область $P^{(m)}_{(p,\,p')}$ принадлежит классу $H_{(p,\,p')}$.

Следствие. *Пусть $f_n(z) = U_n(z) + iV_n(z)$ последовательность аналитических в области $P^{(m)}_{(p,\,p')}$ функций. Если*

$$1)\qquad \iint\limits_{P^{(m)}_{(p,\,p')}} |U_n(z) - U_0(z)|^p\,dx\,dy \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где $U_0(z)$ гармоническая в $P^{(m)}_{(p,\,p')}$ функция,

2) $f_n(z)$ сходится в одной точке области $P^{(m)}_{(p,\,p')}$, то

$$\iint\limits_{P^{(m)}_{(p,\,p')}} |f_n(z) - f_0(z)|^{p'}\,dx\,dy \to 0,$$

где $U_0 = R\text{éel}\,\{f\}$.

Ереванский государственный
университет

Պ. Խ. ԹԱԹՈՅԱՆ

Հարմոնիկ համալուծ ֆունկցիաների միջին արժեքների միջև եղած առնչությունների մասին

U-ով և V-ով նշանակենք երկչափ տիրույթում հարմոնիկ համալուծ ֆունկցիաներ։ Ասում ենք, որ տիրույթը պատկանում է $H(p, p')$ դասին, եթե $|U|^p$-ի այդ տիրույթի վրա տարածված ինտեգրալի վերջավորությունից հետևում է $|V|^{p'}$-ի ինտեգրալի վերջավորությունը ($p > 1$, $0 < p' < p$), իսկ տիրույթը պատկանում է $H(C, p')$ դասին, եթե $|U| <$ const պայմանից հետևում է $|V|^{p'}$-ի ինտեգրալի վերջավորությունը։

Հոդվածում բերված են $H(p, p')$ և $H(C, p')$ դասերին պատկանող տիրույթներ։ Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ ավելի ընդհանուր տիրույթներ ստանալու հնարավորությունները խիստ սահմանափակ են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. Х. Татоян*, ДАН Арм ССР, т. 49, № 1, (1969)