

УДК 513.7

Н. Г. Галстян

О геометрии изотропных гиперповерхностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 9/VI 1969)

Данная работа является продолжением работ ⁽¹⁻³⁾. В работе для поднятия и опускания индексов вводится версор, с помощью которого проще получается тензор кривизны (см. ⁽³⁾), устанавливаются законы преобразований основных величин при преобразовании оснащения, указывается метод для конкретного выбора вектора нормали и строятся инварианты.

В дальнейшем изложении понадобятся ссылки на формулы из работ ⁽¹⁻³⁾. Они будут приведены с сохранением нумерации формул соответственно в виде (2. 1. 5), (3. 2. 6), (1. 0. 9.) и т. д.

1. Введение. В V_n рассмотрим изотропную гиперповерхность V_{n-1}^1

$$y^a = y^a(x^1; x^2; \dots; x^{n-1})^{1)}; \text{ ранг } (y_i^a) = (n-1); y_i^a \equiv \frac{dy^a}{dy^i} \quad (1.1)$$

с метрическим тензором

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta; \text{ ранг } (g_{ij}) = (n-2)^{2)}. \quad (1.2)$$

Существует вектор μ^i , который определяет в V_n изотропный вектор μ^a — нормальный к этой гиперповерхности

$$\mu^i g_{ij} = 0; \mu^a = \mu^i y_i^a; a_{\alpha\beta} \mu^\alpha \mu^\beta = 0. \quad (1.3)$$

Возьмем произвольный вектор λ_i , удовлетворяющий условию

$$\mu^i \lambda_i = 1 \quad (1.4)$$

с помощью которого однозначно определяется изотропный вектор n^a , не лежащий на V_{n-1}^1

$$\lambda_i = a_{\alpha\beta} n^\alpha y_i^\beta; a_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = 0; a_{\alpha\beta} n^\alpha \mu^\beta = 1. \quad (1.5)$$

С помощью вектора n^a производится оснащение V_{n-1}^1 , определяются коэффициенты аффинной связности и другие величины, связанные с этой гиперповерхностью (см. ⁽¹⁻³⁾).

2. Версор. Составим тензор, который в силу (1.4) является невырожденным (см. ⁽³⁾).

¹ Предполагается, что $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \nu, \sigma = 1, 2, \dots, n; i, j, k, l, h, m = 1, 2, \dots, (n-1)$.

² Ранг (g_{ij}) не может быть меньше $(n-2)$.

$$C_{ij} = g_{ij} + \lambda_i \lambda_j; \text{Det}(C_{ij}) \neq 0 \quad (2.1)$$

Взаимный тензор C^{ij} определяется из уравнений $C^{ij} C_{ik} = \delta_k^j$.
Отметим, что в силу (1.3) и (1.4)

$$c_{ij} \mu^i = \lambda_j; c^{hj} \lambda_j = \mu^h; c_{ij} \mu^i \mu^j = c^{ij} \lambda_i \lambda_j = 1. \quad (2.2)$$

Определим тензор

$$g^{ij} = c^{ij} - \mu^i \mu^j, \quad (2.3)$$

который будет удовлетворять условиям

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i - \mu^i \lambda_k; g^{ij} \lambda_j = 0. \quad (2.4)$$

Доказывается, что ранг $(g^{ij}) = (n - 2)$.

При поднятии и опускании индексов с помощью c^{ij} и c_{ij} сохраняется длина вектора

$$g^{ij} P_i P_j = g_{ij} P^i P^j; P_i = c_{ij} P^j. \quad (2.5)$$

Имеют место соотношения

$$c^{ij} y_i^a y_j^b = a^{ab} + \mu^a \mu^b - n^a \mu^b - n^b \mu^a, \quad (2.6)$$

$$g^{ij} y_i^a y_j^b = a^{ab} - n^a \mu^b - n^b \mu^a. \quad (2.7)$$

С помощью этих выражений из (2. 2. 5), (4. 0. 8) и (3. 3. 10) получаются выражения тензора кривизны и тензора Риччи

$$R_{ijk}^h = (\mu^h n^3 + g^{hl} y_l^3) R_{3pvs} y_i^p y_j^s y_k^v + 2g^{hl} \lambda_{[l} b_{k]h}, \quad (2.8)$$

$$R_{ik} \equiv R_{ihh}^h = (R_{33} - n^3 \mu^3 R_{3pvs}) y_i^p y_k^s + 2g^{hl} \lambda_{[l} b_{k]h}. \quad (2.9)$$

3. Преобразование оснащения. Пусть исходное оснащение определено вектором n^a , удовлетворяющим условиям (1.5), а новое оснащение вектором $\bar{n}^a$

$$\bar{n}^a = P n^a + P^i y_i^a; \bar{\lambda}_i = P \lambda_i + g_{ih} P^h; \bar{\mu}^i = \frac{1}{P} \mu^i, \quad (3.1)$$

удовлетворяющим условиям

$$a_{ab} \bar{n}^a \bar{\mu}^b = 1; a_{ab} \bar{n}^a \bar{n}^b = 2P \lambda_i P^i + g_{ij} P^i P^j = 0. \quad (3.2)$$

Из (1. 1. 12) и (3. 0. 7) находим

$$\bar{b}_{ij} = \frac{1}{P} b_{ij}. \quad (3.3)$$

Свертыванием уравнений (2. 1. 5)

$$d_k y_i^a - y_i^a \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ps}^a y_i^p y_k^s = \bar{b}_{ik} \bar{n}^a \quad (3.4)$$

с y_n (векторы репера, взаимного с (n^a, y_e^a)), получим

$$\bar{\Gamma}_{ik}^l = \Gamma_{ik}^l - \frac{1}{P} P^h b_{ik}^h. \quad (3.5)$$

Законы преобразования тензоров g^{ij} и C^{ij} имеют вид:

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{1}{P} (\mu^i P^j + \mu^j P^i), \quad (3.6)$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \frac{1}{P} (\mu^i P^j + \mu^j P^i) + \mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Если воспользоваться единичным вектором оснащения, то условия (3.2) заменяются условиями

$$a_{\alpha\beta} \bar{\mu}^\alpha \bar{\mu}^\beta = 1; a_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = P^2 + 2P \lambda_e P^l + g_{eh} P^l P^h = 1 \quad (3.8)$$

и

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \frac{1}{P} (\mu^i P^j + \mu^j P^i) + \mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1 \right). \quad (3.9)$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \frac{1}{P} (\mu^i P_j + \mu_j P^i) + 2\mu^i \mu^j \left(\frac{1}{P^2} - 1 \right). \quad (3.10)$$

Законы преобразования в случае $P = 1$ одинаковы для изотропного и единичного векторов оснащения:

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} - \mu^i P^j + \mu^j P^i, \quad (3.11)$$

$$\bar{C}^{ij} = C^{ij} - \mu^i P^j + \mu_j P^i. \quad (3.12)$$

4. Регулярные гиперповерхности. Изотропную гиперповерхность будем называть регулярной, если $\text{rang}(b_{ij}) = (n-2)$ и нерегулярной, если $\text{rang}(b_{ij}) = n-2-k$, $k > 0$, см. (1.5). В этой статье рассмотрим регулярные V_{n-1}^1 . Введем невырожденный тензор

$$\gamma_{ij} = b_{ij} + \lambda_i \lambda_j; \text{Det}(\gamma_{ij}) \neq 0 \quad (4.1)$$

Взаимный тензор γ^{ij} определяется из уравнений $\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta_k^i$. Определим тензор

$$b^{ij} = \gamma^{ij} - \mu^i \mu^j, \quad (4.2)$$

удовлетворяющий условиям

$$b^{ij} b_{jk} = \delta_k^i - \mu^i \lambda_k; b^{ij} \lambda_i = 0. \quad (4.3)$$

Закон преобразования b^{ij} , при преобразовании оснащения, запишется в виде

$$\bar{b}^{ij} = P b^{ij} - (\mu^i b^{jh} + \mu^j b^{ih}) P + \delta \mu^i \mu^j, \quad (4.4)$$

где $P_h = C_{hi} P^i$; $\delta = -b^{hi} P_h P_i$.

Закон преобразования b^{ij} одинаков, независимо от того пользуемся мы изотропным или единичным вектором оснащения.

5. Выбор вектора μ^α . Определим скаляры

$$\sigma = g^{ij} b_{ij}; \rho = g_{ij} b^{ij}. \quad (5.1)$$

При преобразовании оснащения

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{P} \sigma; \bar{\rho} = P \rho. \quad (5.2)$$

Если $\sigma \neq 0$, то такую гиперповерхность V_{n-1}^1 будем называть просто-регулярной.

Первое соотношение подсказывает нам в (3.1) взять $P = \sigma$, тогда

$$\bar{\sigma} = \bar{g}^{ij} \bar{b}_{ij} = 1; \quad \bar{\mu}^a = \frac{1}{\sigma} \mu^a. \quad (5.3)$$

Докажем, что условие (5.3) определяет вектор μ^a (точнее, скалярный множитель при μ^a), однозначно, т. е. вектор μ^a получается один и тот же, независимо от того, отправляемся мы от вектора μ_1^a или от вектора μ_2^a . Обозначаем через σ_1 и σ_2 скаляры, которые получаются при выборе векторов μ_1^a и μ_2^a соответственно. Отправляясь от вектора μ_1^a , получим вектор $\bar{\mu}^a = \frac{1}{\sigma_1} \mu_1^a$, а отправляясь от вектора μ_2^a , получим вектор $\bar{\mu}^a = \frac{1}{\sigma_2} \mu_2^a$. Поскольку векторы μ_1^a и μ_2^a отличаются один от

другого скалярным множителем $\mu_1^a = \frac{1}{q} \mu_2^a$, то $\sigma_1 = \frac{1}{q} \sigma_2$. В силу этих соотношений

$$\bar{\mu}^a = \frac{1}{\sigma_1} \mu_1^a = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{1}{q} \mu_2^a = \frac{1}{\sigma_2} \mu_2^a = \bar{\mu}^a. \quad (5.4)$$

Следовательно, для просто-регулярных гиперповерхностей всегда будем выбирать так, чтобы имело место первое условие (5.3).

При конкретном выборе μ^a из первого уравнения (3.2) следует, что $P = 1$. А при таких преобразованиях из (5.2), следует, что ρ является инвариантом. Из (3.3.10) следует, что

$$g_{ij} \bar{\mu}^h \bar{R}_{hjk}^i = g_{ij} \mu^h R_{hjk}^i. \quad (5.5)$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. З. Петрову.

Ереванский государственный
университет

Ն. Դ. ԴԱՍՏԱՆ

Իզոտրոպ մակերևույթների երկրաչափության մասին

Այս հոդվածը հանդիսանում է (1—3) հոդվածների շարունակությունը, ի տարկվում է V_n տարածության իզոտրոպ հիպերմակերևույթները, շոդվածում ներմուծվում է վերսոր, որի օգնությամբ հեշտությամբ ստացվում են կորություն և Ռիչի տենզորները, Ստացված են հիմնական հատկությունների ձևափոխության օրենքները հագեցման վեկտորի ձևափոխության դեպքում, Տրված է նորմալի վեկտորի կոնկրետ քննարման մեթոդ և կառուցված են ինվարիանտները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Ո Ս Ո Ւ Մ Ե Ր Ն

1 Н. Г. Галстян, ДАН Арм. ССР т. 45, № 3 (1967). 2 Н. Г. Галстян, сб. «Гравитация и теория относительности», вып. 4—5, изд. КГУ, 1968. 3 Н. Г. Галстян, «Тезисы 5-4 международной конференции по гравитации и теории относительности», Тбилиси, 1968. 4 В. А. Атанасян, ДАН СССР, 98, 15 701—704, (1954). 5 А. Е. Либер, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 13, М., 407—446, 1968.