

Հ.Ս. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

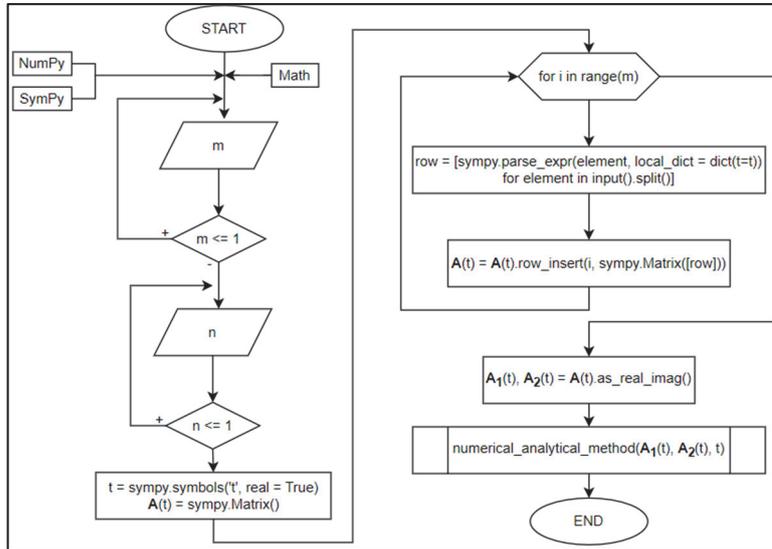
ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒՋԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ
ՀԱԿԱՐԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԾՐԱԳՐԱՅԻՆ ԻՐԱԿԱՆԱՑՈՒՄԸ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԱՓՈՒՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՄԱՍԲ (I)

Ներկայացված է Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն թվա-անալիտիկ եղանակի ծրագրային իրականացումը: Անալիտիկ եղանակները հիմնվել են Մուր-Պենրոուզի 3-րդ պայմանի վրա: Թվա-անալիտիկ մեթոդները հիմնվել են ստացված անալիտիկ հարաբերակցությունների և Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Հաշվողական եղանակներն իրականացվել են տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներով, մասնավորապես՝ ծրագրավորման Python լեզվով, NumPy և SymPy գրադարաններով: Ծրագրային իրականացումը փորձարկվել է ուղղանկյուն մատրիցով մոդելային օրինակի վրա:

Առանցքային բառեր. Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրից, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծում, ծրագրավորման Python լեզու, NumPy գրադարան, SymPy գրադարան:

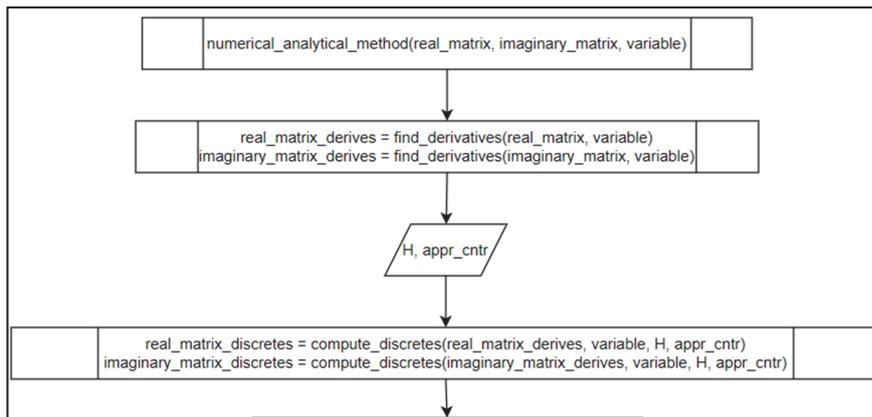
Ներածություն: [1] աշխատանքում առաջարկվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցների [2] որոշման մեթոդներ՝ $A(t)_{m \times n}$ ուղղանկյուն մատրիցների դեպքում: Այդ մեթոդներում օգտագործվել են Մուր-Պենրոուզի 1-ին, 2-րդ և 3-րդ պայմանները: Սույն աշխատանքում ներկայացվում են թվա-անալիտիկ մեթոդների ծրագրային իրականացումների ալգորիթմների բլոկ-սխեմաները և Python լեզվով գրված ծրագրերը [3]:

Ենթադրենք՝ տրված է $A(t)_{m \times n}$ մատրիցը, որտեղ $A(t) \in C^{m \times n}$: Մատրիցի չափերը [4] մուտքագրելուց հետո անհրաժեշտ է մուտքագրել մատրիցի տարրերը՝ տող առ տող և իրարից առանձնացված բացատներով (նկ. 1): Այնուհետև արդեն հնարավոր է առանձնացնել մատրիցի տարրերի իրական և կեղծ մասերը [5]:



Նկ. 1. Մատրիցի չափերի և տարրերի մուտքագրման բլոկ-սխեման

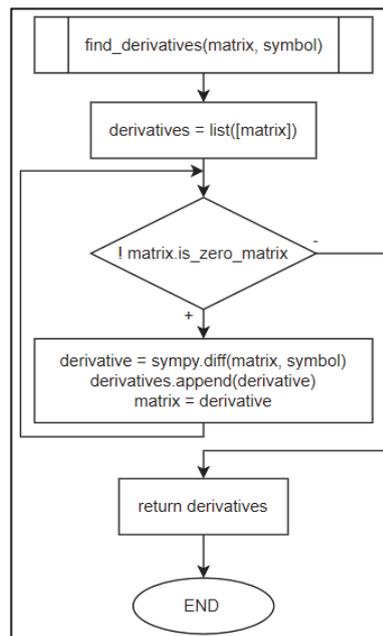
Թվա-անալիտիկ մեթոդի ծրագրային իրականացումը [6]: $A(t)$ մատրիցի տարրերի $A_1(t)$ իրական և $A_2(t)$ կեղծ մասերի մատրիցները որոշելուց հետո անհրաժեշտ է որոշել դրանց տարրերի ածանցյալները՝ մինչև պահանջվող ճշտության ստացումը: Այնուհետև պետք է մուտքագրել մասշտաբային գործակցի (H) ու մոտարկման կենտրոնի ($appr_cntr$) արժեքները և հաշվել $A_1(t)$ ու $A_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները (նկ. 2): Այստեղ *real_matrix*, *imaginary_matrix* և *variable* պարամետրերը ներկայացնում են համապատասխանաբար $A_1(t)$, $A_2(t)$ մատրիցները և t պարամետրը:



Նկ. 2. Մատրիցների տարրերի ածանցյալների և մատրիցային դիսկրետների որոշման ալգորիթմի բլոկ-սխեման

$A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցների տարրերի ածանցյալները որոշվում են առանձին ֆունկցիայի միջոցով (նկ. 3), որը`

- ❖ մուտքում ստանում է այն մատրիցը, որի տարրերի ածանցյալները պետք է որոշել, ինչպես նաև այն փոփոխականը, ըստ որի պետք է կատարվի ածանցումը,
- ❖ ելքում վերադարձնում է մուտքային մատրիցի տարրերի ածանցյալներից կազմված մատրիցների զանգվածը:

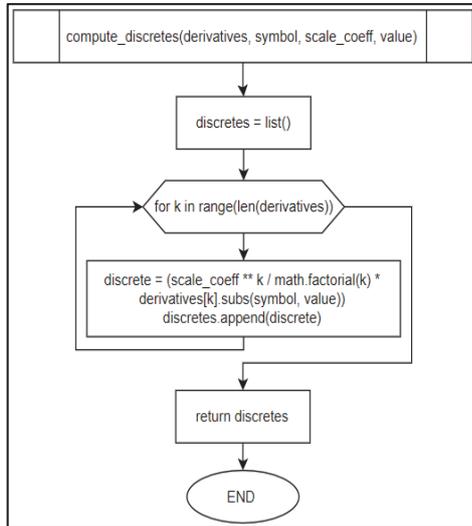


Նկ. 3. Մատրիցի տարրերի ածանցյալները որոշող ալգորիթմի բլոկ-սխեման

Ելքային զանգվածի 1-ին տարրը մուտքային մատրիցն է, 2-րդ տարրը` մուտքային մատրիցի տարրերի 1-ին կարգի ածանցյալներից կազմված մատրիցը, 3-րդ տարրը` մատրիցի տարրերի 2-րդ կարգի ածանցյալներից կազմված մատրիցը, և այդպես շարունակ` մինչև պահանջվող ճշտության ստացումը:

$A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները [7] հաշվվում են առանձին ֆունկցիայի միջոցով (նկ. 4), որը`

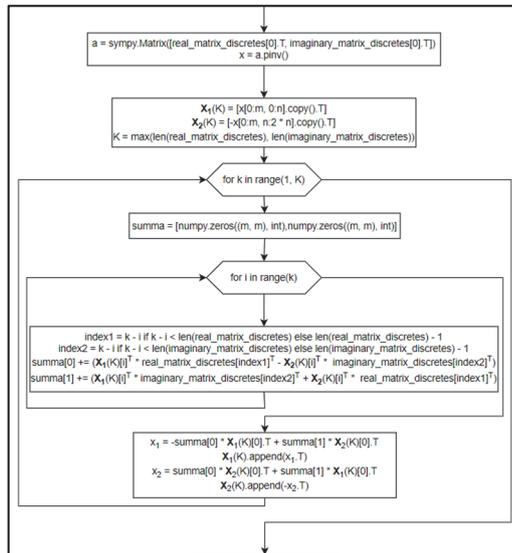
- ❖ մուտքում ստանում է մատրիցի տարրերի ածանցյալներից կազմված մատրիցների զանգվածը, ինչպես նաև այն փոփոխականը, ըստ որի կատարվել է ածանցումը, և մասշտաբային գործակցի ու մոտարկման կենտրոնի արժեքները,
- ❖ ելքում վերադարձնում է մատրիցային դիսկրետների զանգվածը:



Նկ. 4. Մատրիցային դիսկրետները հաշվող ալգորիթմի բլոկ-սխեման

Ելքային զանգվածի 1-ին տարրը մուտքային մատրիցի 0-րդ կարգի դիսկրետն է, 2-րդ տարրը՝ մատրիցի 1-ին կարգի դիսկրետը, և այդպես շարունակ:

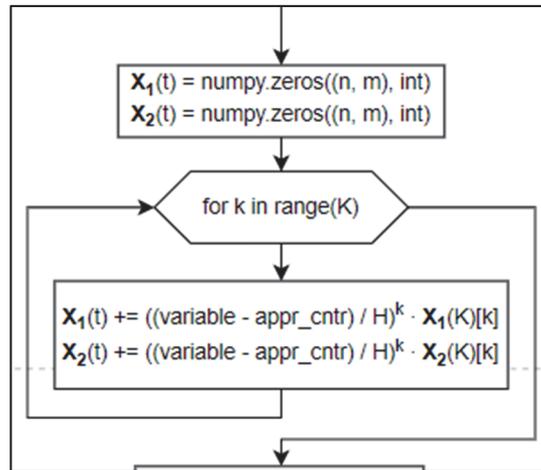
$A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցների տարրերի ածանցյալները որոշելուց և մատրիցային դիսկրետները հաշվելուց հետո (նկ. 5) անհրաժեշտ է հաշվել $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցների դիսկրետները [1, բանաձև (20)–(23)]՝ մինչև պահանջվող ճշտության ստացումը:



Նկ. 5. $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցների դիսկրետների հաշվարկի բլոկ-սխեման

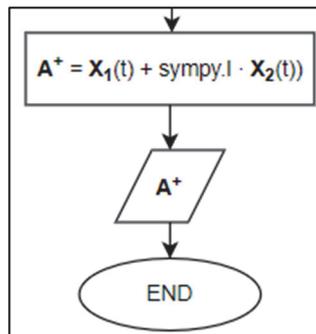
Քանի որ ընդհանուր դեպքում $A_1(t)$ և $A_2(t)$ մատրիցները կարող են ունենալ տարբեր քանակի դիսկրետներ, պետք է իրականացնել ինդեքսների ճշտում (եթե ինդեքսը մեծ է կամ հավասար մատրիցային դիսկրետների զանգվածի տարրերի քանակին, այսինքն՝ զանգվածում այդ ինդեքսով տարր գոյություն չունի, ապա այդ դիսկրետը փոխարինվում է զրոյական մատրիցով):

$X_1(K)$ և $X_2(K)$ մատրիցային դիսկրետները հաշվելուց հետո (նկ. 6) արդեն հնարավոր է վերականգնել $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցները [1, բանաձև (17)]:



Նկ. 6. $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցների վերականգնման բլոկ-սխեման

Այսպիսով, ունենալով $X_1(t)$ և $X_2(t)$ մատրիցները (նկ. 7), կարելի է որոշել նաև $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցը [1, բանաձև (5)]:



Նկ. 7. $A^+(t)_{n \times m}$ մատրիցի որոշման բլոկ-սխեման

Մոդելային օրինակ: Ենթադրենք՝ տրված է հետևյալ մատրիցը.

$$A(t) = \begin{bmatrix} ((-1 + t) + j \cdot (1 + t^2)) & t^2 & (-5t + j \cdot (-2 + 3t)) \\ jt & ((1 + t) + 5j) & 2jt \end{bmatrix}.$$

Դիֆերենցիալ ձևափոխությունների համապատասխան և հաշվի առնելով, որ մակլորենյան մոտարկման կենտրոնի արժեքը $t_\gamma = 0$, ինչպես նաև ընտրելով մասշտաբային գործակցի $H = 1$ արժեքը, թվա-անալիտիկ մեթոդի իրականացման արդյունքը ցույց է տրված նկ. 8-ում:

```

Enter mxn matrix sizes
m = 2
n = 3
Matrix sizes are: m = 2, n = 3
Enter elements of A(t) matrix:
-1+t+I*(1+t**2) t**2 -5*t+I*(-2+3*t)
I*t 1+t+5*I 2*I*t
A1(t) = Matrix([[t - 1, t**2, -5*t], [0, t + 1, 0]])
A2(t) = Matrix([[t**2 + 1, 0, 3*t - 2], [t, 5, 2*t]])
NUMERICAL-ANALYTICAL METHOD
Enter scaling coefficient: H = 1
Enter approximation center's value: 0
X1(K) = [Matrix([
[-0.167, 0],
[ 0, 0.0385],
[ 0, 0]], Matrix([
[ 0.111, 0],
[0.0513, 0.0355],
[-0.611, 0]]), Matrix([
[ 1.1, 0.0385],
[ 0.24, -0.00421],
[-1.48, -0.0641]]), Matrix([
[ 2.07, 0.0953],
[ 0.278, 0.0142],
[-0.397, -0.0463]])]

```

```

X2(K) = [Matrix([
[-0.167, 0],
[ 0, -0.192],
[ 0.333, 0]], Matrix([
[ -0.5, 0],
[-0.0897, 0.0148],
[ 0.389, 0]]), Matrix([
[ -0.38, -0.0256],
[0.00263, 0.00626],
[ -0.722, -0.0128]]), Matrix([
[ 1.67, 0.049],
[0.468, 0.0123],
[-3.74, -0.144]])]
X1(t) = [Matrix([
[2.07*t**3 + 1.1*t**2 + 0.111*t - 0.167, 0.0953*t**3 + 0.0385*t**2],
[ 0.278*t**3 + 0.24*t**2 + 0.0513*t, 0.0142*t**3 - 0.00421*t**2 + 0.0355*t + 0.0385],
[ -0.397*t**3 - 1.48*t**2 - 0.611*t, -0.0463*t**3 - 0.0641*t**2]])]
X2(t) = [Matrix([
[ 1.67*t**3 - 0.38*t**2 - 0.5*t - 0.167, 0.049*t**3 - 0.0256*t**2],
[ 0.468*t**3 + 0.00263*t**2 - 0.0897*t, 0.0123*t**3 + 0.00626*t**2 + 0.0148*t - 0.192],
[-3.74*t**3 - 0.722*t**2 + 0.389*t + 0.333, -0.144*t**3 - 0.0128*t**2]])]
A*(t) = [Matrix([
[2.1*t**3 + 1.1*t**2 + 0.11*t + I*(1.7*t**3 - 0.38*t**2 - 0.5*t - 0.17) - 0.17, 0.095*t**3 + 0.038*t**2 + I*(0.049*t**3 - 0.026*t**2)],
[ 0.28*t**3 + 0.24*t**2 + 0.051*t + I*(0.47*t**3 + 0.0026*t**2 - 0.09*t), 0.014*t**3 - 0.0042*t**2 + 0.036*t + I*(0.012*t**3 + 0.0063*t**2 + 0.015*t - 0.19) + 0.038],
[ -0.4*t**3 - 1.5*t**2 - 0.61*t + I*(-3.7*t**3 - 0.72*t**2 + 0.39*t + 0.33), -0.046*t**3 - 0.064*t**2 + I*(-0.14*t**3 - 0.013*t**2)]])]

```

Նկ. 8. Թվա-անալիտիկ մեթոդի ծրագրային իրականացման արդյունքը դիտարկված օրինակի վրա

Եզրակացություն: Ներկայացվել է Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման թվա-անալիտիկ հաշվողական եղանակի ծրագրային իրականացումը՝ տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներով: Անալիտիկ եղանակները հիմնվել են Մուր-Պենրոուզի 3-րդ պայմանի վրա: Թվա-անալիտիկ մեթոդները հիմնվել են ստացված անալիտիկ հարաբերակցությունների և Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա՝ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ: Հաշվարկման գործընթացը պարզ դարձնելու համար ներկայացվել են ալգորիթմների բոլոր սխեմաները, իսկ Python լեզվով գրված ծրագրային կոդերը տրամադրվել են որպես բաց կոդով GitHub հղում: Ալգորիթմների արդյունավետությունը փորձարկվել է մոդելային օրինակի վրա:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Simonyan S.H., Avetisyan A.G., Abgaryan H.S.** Definition of Complex One-Parameter Generalized Moore-Penrose Inverses Using Differential Transformations // Computational and Mathematical Methods. – 2025. - № 1. <https://doi.org/10.1155/cmm4/8895138>
2. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц: Монография.- LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2017. - 222 с.
3. HovhannesAbgaryan/MoorePenrose_III: Software implementation of decomposition methods for determining complex 1-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (III)
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц.- М.: Физматлит, 2010.- 560 с.
5. **Ланкастер П.** Теория матриц.- М.: Наука, 1978.- 280 с.
6. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984.-419 с.
7. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография.- Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 361 с.

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան: Նյութը ներկայացվել է խմբագրություն 24.02.2025:

О.С. АБГАРЯН

**ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА-
ПЕНРОУЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (I)**

Представлена программная реализация численно-аналитического декомпозиционного метода определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Аналитические методы основаны на 3-ем условии Мура-Пенроуза. Численно-аналитические методы основаны на полученных аналитических соотношениях и дифференциальных преобразованиях Пухова. Вычислительные методы реализованы средствами современных информационных технологий, в частности языка программирования Python, библиотеками NumPy и SymPy. Программная реализация протестирована на модельном примере с прямоугольной матрицей.

Ключевые слова: комплексная однопараметрическая обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, численно-аналитическое решение, язык программирования Python, библиотека NumPy, библиотека SymPy.

H.S. ABGARYAN

**SOFTWARE IMPLEMENTATION OF DETERMINING COMPLEX ONE-
PARAMETER GENERALIZED INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES
USING DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS (I)**

Software implementation of numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices are presented. Analytical methods are based on the 3rd Moore-Penrose condition. Numerical-analytical methods are based on the obtained analytical relations and differential Pukhov transformations. Computational methods are implemented using modern information technologies, in particular Python programming language, NumPy and SymPy libraries. The software implementation is tested on a model example with a rectangular matrix.

Keywords: complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrix, analytical solution, differential transformations, numerical-analytical solution, Python programming language, NumPy library, SymPy library.