ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIX 1969 4

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Е. А. Ларионов

О самосопряженных квадратичных пучках в гильбертовом пространстве

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/II 1969)

Пусть в гильбертовом пространстве h задан квадратичный пучок

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C, \tag{1}$$

коэффициенты A, B и C которого являются ограниченными самосопряженными операторами в h, λ—комплексный параметр. К необходимости изучения пучка (1) приводит ряд задач математической физики.

Для успешного исследования пучка (1) рассматривается также ассоциированное с ним операторное квадратное уравнение

$$AZ^2 + BZ + C = 0. \tag{2}$$

Предположим, что оператор A обратим.

В прямой сумме $h_0 = h \oplus h$ двух экземпляров пространства h пучку $Q(\lambda)$ сопоставляется ([1]) оператор

$$H = \begin{pmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}C \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

который является самосопряженным относительно оператора

$$W = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & B \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Гильбертово пространство h_0, снабженное наряду с обычным скалярным произведением $(x, y)_0$ индефинитным скалярным произведением $[x, y] = (Wx, y)_0$, становится пространством с индефинитной метрикой.

По определению плотно заданный в h_0 линейный оператор A W—с. с., если имеет место соотношение

$$A = W^{-1} A^* W. \tag{5}$$

Линейный оператор U, отображающий взаимно-однозначно пространство h_0 на себя с сохранением формы $[x, y]$, называется W-унитарным. Определение W-унитарного оператора U эквивалентно соотношению

$$U^* W U = W. \tag{6}$$

Обозначим через $R(R_0)$ кольцо всех линейных ограниченных по норме $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ ($\|x\|_0 = (x, x)_0^{\frac{1}{2}}$) операторов, действующих в $h(h_0)$. Если $A^{-1} \in R$, то оператор W окажется ограниченно обратимым в h_0 по норме $\|x\|_0 = [(x_1, x_1) + (y_1, y_1)]^{\frac{1}{2}}$, где $x_1, y_1 \in h$.

В последнем случае индефинитная метрика $[x, y]$ является регулярной и путем введения новой нормы, топологически эквивалентной норме $\|x\|_0$, оператор W приводится к виду $J = P_+ - P_-$, где P_+ и P_- —взаимнодополнительные ортопроекторы из h_0.

Пучок $Q(\lambda)$ называется сильно демпфированным, если для всех $x \in h$

$$(Bx, x)^2 > 4(Ax, x)(Cx, x) \quad x \neq 0. \tag{7}$$

В работах [2, 3] изучен пучок $Q(\lambda)$ для случая $A = I$. Если $A \neq I$, то исследование пучка значительно усложняется.

В [1] предполагается, что $A, A^{-1} \in R$.

Оператор W при неограниченно обратимом A порождает в h_0 уже нерегулярную индефинитную метрику.

Для выяснения разрешимости уравнения (2) используется понятие собственной W—спектральной функции W—с. с. оператора, введенное для пространств с регулярной метрикой в [2].

В отличие от самосопряженных операторов далеко не всякий W—с. с. оператор обладает собственной W—спектральной функцией.

W—с. с. оператор A называется W—дефинизируемым, если существует полином $p(z) \neq 0$, принимающий на действительной оси вещественные значения и обладающий свойством

$$[p(A)x, x] \geqslant 0 \text{ или } \leqslant 0 \tag{8}$$

для всех $x \in D(A^m)$, где m—степень полинома $p(z)$.

Оператор F называется W—проектором, если F W—с. с. и $F^2 = F$.

Точка α из спектра $\sigma(A)$ оператора A называется критической, если для любого интервала $\Delta \subset [-\infty, \infty]$, содержащего внутри себя α, $E(\Delta)h_0$—индефинитное пространство. В случае $W, W^{-1} \in R_0$ изолированная критическая точка α называется регулярной, если существуют пределы $\lim\limits_{\lambda \uparrow \alpha} E([\lambda_0, \lambda))$ и $\lim\limits_{\lambda \downarrow \alpha} E([\lambda, \lambda_1))$ в сильной операторной топологии, где $\lambda_0 < \alpha < \lambda_1$ и точки λ_0, λ_1 не являются критическими. Не регулярные критические точки называются сингулярными.

Спектральное разложение оператора W индуцирует разложение h_0 на W—дефинитные подпространства h_+^0 и h_-^0. Пусть P_+^0 и P_-^0 ортопроекторы из h_0 на h_+^0 и h_-^0. Введем в h_0 дефинитное скалярное произведение

$$(x, y)_1 = [WP_+^0 x, y] - [WP_-^0 x, y]. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$[x, y] = (P_+^0 x, y)_1 - (P_-^0 x, y)_1 . \tag{10}$$

Очевидно, что $\|x\|_1 \leqslant \gamma \|x\|_0$, где $\|x\|_1 = (x, x)_1^{\frac{1}{2}}$. Пусть $\hat{h}$, $\hat{h}_+$, $\hat{h}_-$ пополнения подпространств h, h_+^0 и h_-^0 по норме $\|x\|_1$, а $\hat{P}_+$ и $\hat{P}_-$ ортопроекторы из $\hat{h}$ на $\hat{h}_+$ и $\hat{h}_-$. При пополнении h_0 по норме $\|x\|_1$ метрика $[x, y]$ индуцирует на $\hat{h}$ метрику $[x, y]_1$, причем

$$[x, y]_1 = (\hat{J} x, y)_1, \tag{11}$$

где $\hat{J} = \hat{P}_+ - \hat{P}_-$. Таким образом, $\hat{h}$ есть $\hat{J}$—пространство. Из (10) и (11) следует, что для всех $x, y \in h_0$

$$[x, y] = [x, y]_1. \tag{12}$$

Лемма 1. *Всякий W-эрмитов оператор A из R_0 ограничен и по норме $\|x\|_1$.*

Лемма 2. *W-унитарный оператор U, действующий в h_0, ограничен по норме $\|x\|_0$.*

Лемма 3. *Пусть A W-самосопряженный оператор в h_0. Если существует точка $\xi \in \rho(A)$, то A допускает расширение до $\hat{J}$—с. с. оператора $\hat{A}$ в $\hat{h}$.*

Доказательство леммы 3 основано на преобразовании Кэли и леммах 1, 2. При помощи метода, развитого в [2], доказывается

Теорема 1. *W-дефинизируемый W-самосопряженный оператор A в h_0 с вещественным спектром $\sigma(A)$ обладает единственной собственной W-спектральной функцией $E_0(\Delta)$ с конечным множеством $s(A)$ критических точек, а именно $E_0(\Delta)$ есть отображение кольца $\Gamma([-\infty, \infty)\backslash s(A))$, образованного всеми подмножествами Δ вещественной оси, концы которых не принадлежат $s(A)$, в множество ограниченных W-проекторов со свойствами*

a) $E_0(\Delta) E_0(\Delta') = E_0(\Delta \cap \Delta')$;

b) $E_0(\Delta) + E_0(\Delta') = E_0(\Delta \cup \Delta')$, *если* $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$;

c) $E_0(\Delta) = I$, *если* $\Delta \supset \sigma(A)$; $E_0(\varnothing) = 0$;

d) *если* $\lambda_0, \mu_0 \in [-\infty, \infty)/s(A)$, *то* $\lim\limits_{\mu \uparrow \mu_0} E_0([\lambda_0, \mu)) = E_0([\lambda_0, \mu_0))$ *в сильной операторной топологии* τ_1, *индуцируемой нормой* $\|x\|_1$;

e) $E_0(\Delta) D(A) \subset D(A)$, $E_0(\Delta) Ax = AE_0(\Delta) x$, $x \in D(A)$, *причем для конечного множества* Δ $E_0(\Delta) h \subset D(A)$;

f) $\sigma_e(A/E_0(\Delta) h) \subset \bar{\Delta}$,

где $\Delta, \Delta' \in \Gamma([-\infty, \infty)/s(A))$, $\bar{\Delta}$ — *замыкание множества* Δ, *а* $\sigma_e(A) = \sigma(A) \cup \infty$.

Очевидно, что для $A \in R_0$ $\sigma_e(A) = \sigma(A)$.

Если оператор A индефинитен, то как и в [1] показывается, что оператор H, сопоставленный сильно демпфированному пучку $Q(\lambda)$ формулой (3), W-дефинизируем

$$[(H - \alpha I)(H - \beta I)x, x] \geqslant 0 \text{ или } \leqslant 0$$

для всех $x \in D(H^2)$, где $-\infty < \alpha, \beta < \infty$.

Оператор A предположим в дальнейшем индефинитным.

Имеет место

Теорема 2. *Если $\rho(H) \neq \varnothing$ и пучок $Q(\lambda)$ сильно демпфирован, то спектр оператора H вещественный и у H существует единственная собственная W-спектральная функция $E_0(\lambda)$.*

При доказательстве теоремы 2 существенно используется то обстоятельство, что преобразование Кэли W-дефинизируемого W—с. с. оператора есть W-дефинизируемый W-унитарный оператор.

Положим $\beta_+ = \{x \in h_0; [x, x] \geqslant 0\}$, $\beta_- = \{x \in h_0: [x, x] \leqslant 0\}$, $\beta_0 = \beta_+ \cap \beta_-$ и обозначим через $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ совокупность всех максимальных подпространств из β_+ и β_-.

Говорят, что $\{L_1, L_2\}$ дуальная пара подпространств, если $L_1 \subset \beta_+$ $L_2 \subset \beta_-$ и $[L_1, L_2] = 0$, если, кроме того, $L_1 \in \mathfrak{M}_+$, $L_2 \in \mathfrak{M}_-$, то $\{L_1, L_2\}$ называют максимальной дуальной парой подпространств.

При помощи собственной W-спектральной функции доказывается

Теорема 3. *Оператор H, $\rho(H) \neq \varnothing$, сопоставленный сильно демпфированному пучку $Q(\lambda)$, обладает единственной инвариантной максимальной дуальной парой подпространств $\{L_1 L_2\}$.*

Предположим, что $A^2 + B > 0$ и введем в h_0 скалярное произведение

$$(x, y)_2 = ((A^2 + B)x, y)_0 \tag{14}$$

Непосредственно проверяется, что h_0 разлагается в ортогональную относительно форм $(x, y)_2$ и $[x, y]$ сумму подпространств

$$h_0 = L_1 + L_2, \tag{15}$$

где

$$L_1 = \left\{\tilde{x} \in h_0: \tilde{x} = \begin{pmatrix} Ax \\ x \end{pmatrix}, x \in h\right\}, \quad L_2 = \left\{\tilde{x} \in h_0: \tilde{x} = \right.$$

$$\left. = \begin{pmatrix} -Ax & -A^{-1}Bx \\ & x \end{pmatrix}, x \in h\right\}.$$

Если оператор Z_1 есть корень уравнения (2), то и оператор $Z_2 = -A^{-1}Z_1^* A - A^{-1}B$ является корнем этого уравнения. Пара корней $\{Z_1, Z_2\}$ называется сопутствующей. Пара $\{Z_1, Z_2\}$ не обязательно сопутствующих корней уравнения (2) называется полной в $h_1 \subset h$, если $\overline{R(Z_1 - Z_2)} = h_1$, где замыкание берется по норме $\|x\|$.

На основе разложения (15) и теоремы 3 доказывается

Теорема 4. *Если пучок $Q(\lambda)$ сильно демпфирован, $\rho(H) \neq \varnothing$ и $A^2 + B > 0$, то уравнение (2) обладает единственной полной в h сопутствующей парой корней $\{Z_1, Z_2\}$, причем*

$$AZ_1 + Z_1^* A + B > 0, \tag{16}$$

$$AZ_2 + Z_2^* A + B < 0. \tag{17}$$

Теорема 5. *Если кроме указанных в теореме 4 условий оператор $A^{-1}B \in R$, то уравнение* (2) *имеет корень Z_1 из R, удовлетворяющий условию* (16).

Уравнение малых демпфированных колебаний континуума (S) около устойчивого положения равновесия имеет вид

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0, \quad -\infty < t < \infty, \tag{18}$$

где A и C—соответственно операторы кинетической и потенциальной энергии, B—оператор сопротивления, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве h, состоящем из вектор-функций над (S).

Из изложенного выше вытекает

Теорема 6. *Если пучок $Q(\lambda)$ сильно демпфирован, $A^2 + B > 0$, а точки α и β являются регулярными, то для любых x_0 и $\dot{x}_0$ из h существует решение $x(t)$ уравнения* (18) *вида*

$$x(t) = \exp(Z_1 t)\, x_1(0) + \exp(Z_2 t)\, x_2(0),$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где $x_1(0),\ x_2(0) \in h$.

Центральный экономико-
математический институт АН СССР

Ե. Ա. ԼԱՐԻՈՆՈՎ

Հիլբերտյան տարածության մեջ ինքնահամալուծ քառակուսային փնջերի մասին

Հիլբերտյան տարածության մեջ, ինդեֆինիտ մետրիկա ունեցող տարածություններում գործող օպերատորների տեսության մեթոդներով, հետազոտվում է $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ քառակուսային փունջը, որի գործակիցները սահմանափակ ինքնահամալուծ օպերատորներ են h-ում և բավարարում են հետևյալ պայմանին՝

$$(Bx, x)^2 > 4(Ax, x)(Cx, x), \quad x \in h$$

$Q(\lambda)$ փնջի դիտարկմանը բերում են մաթեմատիկական ֆիզիկայի մի շարք խնդիրներ։

Որոշակի պայմանների դեպքում ապացուցվում է, որ $Q(\lambda)$ փնջի հետ ասոցացված օպերատորային քառակուսի հավասարումը $AZ^2 + BZ + C = 0$ ունի միակ h-ում «լրիվ» արմատների զույգ և հետևաբար կոնտինուումի փոքր դեմպֆիրվող տատանումների հավասարման վերաբերյալ Կոշու խնդրի լուծելիությունը։