ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIX 1969 3

УДК 523.035.2

АСТРОФИЗИКА

Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян

Некоторые нелинейные задачи переноса излучения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 24/VI 1968)

Некоторые нелинейные задачи полихроматического рассеяния света в плоско-параллельном слое рассмотрены в работах ([1–2]). В них изучены модели сред, состоящих из атомов с тремя уровнями, причем переходы $1 \leftrightarrow 2$ считались запрещенными. В отличие от работы ([1]), в которой было принято, что переизлучение кванта в каждой из линий происходит без перераспределения по частотам, в ([2]) считалось, что рассеяние света происходит с полным перераспределением по частотам. Метод самосогласованных оптических глубин В. А. Амбарцумяна ([3,4]) позволяет линеаризовать соответствующие уравнения переноса в обеих задачах. Следует отметить, что задача ([2]) была рассмотрена при некоторых специальных предположениях—не учитывались переходы между состояниями под действием электронных ударов, считалось, что коэффициенты поглощения в линиях $1 \leftrightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 3$ имеют один и тот же вид. Оказывается, что применение метода с. о. г. позволяет решить задачу при отказе от этих предположений, чему будеть посвящен §1 данной статьи. В § 2 будем рассматривать модель среды, состоящей из атомов с двумя уровнями при наличии внутренних источников.

§ 1. *Полихроматическое рассеяние в плоско-параллельном слое.* Пусть плоско-параллельный изотермический слой с геометрической толщиной z_0 и температурой T_e равномерно заполнен атомами одного типа с тремя уровнями, причем переход $1 \leftrightarrow 2$ считается запрещенным (как с излучением, так и без излучения).

Обозначим через n и n_e число атомов и электронов в 1 $см^3$ соответственно, через n_i число атомов в 1 $см^3$, находящихся в i-ом состоянии.

Пусть среда сверху ($z = 0$) освещается излучениями, интенсивности которых описываются функциями $I_i^0(\nu, \eta)$ $(i = 1,2)$ (соответствующим переходам $i \leftrightarrow 3$). Тогда в каждой внутренней точке создается определенное поле излучения и распределение атомов по уровням.

Уравнение переноса для i-ой спектральной линии имеет вид

$$\eta \frac{dI_i}{dz} = -\left(n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3\right) k_i I_i + \frac{A_{3i} h\nu p_i}{4\pi} n_3 \tag{1}$$

с условиями

$$I_i(0, \nu, \eta) = I_i^0(\nu, \eta) \text{ при } \eta > 0 \text{ и } I_i(z_0, \nu, \eta) = 0, \text{ при } \eta < 0, \tag{2}$$

где $I_i = I_{i \leftarrow \rightarrow 3}(z, \nu, \eta)$ — интенсивность излучения, соответствующего переходу $(i \leftarrow \rightarrow 3)$; $k_i = k_i(\nu)$ — коэффициент поглощения из i-ого уровня на третий уровень, рассчитанный на один атом; g_l — статистический вес l-го уровня ($l = 1, 2, 3$)

$$p_i = p_i(\nu) = \frac{k_i(\nu)}{\int\limits_0^\infty k_i(\nu)\, d\nu}. \tag{3}$$

Условия стационарности числа атомов в i-том состоянии имеют вид:

$$n_i(B_{i3}\rho_i + a_{i3}) = n_3(A_{3i} + B_{3i}\rho_i + a_{3i}). \tag{4}$$

Имеем также

$$n_1 + n_2 + n_3 = n = \text{const}, \tag{5}$$

B_{i3}, B_{3i}, A_{3i} — эйнштейновские коэффициенты переходов, $a_{i3} = n_e q_{i3}$ и $a_{3i} = n_e q_{3i}$ — коэффициенты электронных ударов первого и второго родов.

$$\rho_i(z) = \frac{2\pi}{B_{i3}} \int\limits_0^\infty d\nu \frac{k_i(\nu)}{h\nu} \int\limits_{-1}^{1} I_i(z, \nu, \eta)\, d\eta. \tag{6}$$

Согласно методу с. о. г. перейдем к новым аргументам посредством следующих соотношений:

$$dy_i = k_i^0 \left(n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3\right) dz, \tag{7}$$

где $k_i^0 = k_i(\nu_e^0)$ — коэффициент поглощения в центре соответствующей линии. Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\eta \frac{d\overline{I_i}}{dy_i} = -\frac{k_i}{k_i^0} \overline{I_i} + \frac{A_{3i} p_i h\nu}{4\pi k_i^0} \cdot \frac{n_3}{n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3}, \tag{8}$$

где $\overline{I_i}(y_i) = I_i(z)$,
с условиями

$$\overline{I_i}(0, \nu, \eta) = I_i^0(\nu, \eta) \text{ при } \eta > 0 \text{ и } \overline{I_i}(y_i^0, \nu, \eta) = 0 \text{ при } \eta < 0, \tag{9}$$

где величины y_i^0 пока неизвестны.

Определяя из условия стационарности (6) выражение $\dfrac{n_3}{n_i - \frac{g_i}{g_3} n_3}$ и подставляя в (8), получим следующее уравнение:

$$\eta \frac{d\bar{I}_l}{dy_l} = -\frac{k_l}{k_l^0}\bar{I}_l + \frac{A_{3l} p_l h\nu}{4\pi k_l^0} \cdot \frac{B_{l3}\bar{\rho}_l + a_{l3}}{A_{3l} + a_{3l} - \frac{g_l}{g_3} a_{l3}} \quad (l = 1,2), \quad (10)$$

где $\bar{\rho}_l(y_l) = \rho_l(z)$.

Эти уравнения эквивалентны следующим интегральным уравнениям относительно функций $\bar{\rho}_l$

$$\bar{\bar{\rho}}_l(y_l) = \rho_l^0 + \frac{a_{l3}}{B_{l3}} + \frac{\lambda_l}{2}\int_0^{y_l^0} \bar{\bar{\rho}}_l(y_l') K_l(|y_l - y_l'|)\, dy_l', \quad (11)$$

где

$$\bar{\bar{\rho}}_l(y_l) = \bar{\rho}_l(y_l) + \frac{a_{l3}}{B_{l3}}. \quad (12)$$

$$\lambda_l = \frac{A_{3l}}{A_{3l} + a_{3l} - \frac{g_l}{g_3} a_{l3}}, \quad (13)$$

$$\rho_l^0(y_l) = \frac{2\pi h\nu_l^0}{c}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_l(x)dx \int_0^1 N_l^0(x,\eta)\, e^{-\frac{\alpha(x) y_l}{\eta}}\, d\eta + \frac{a_{l3}}{B_{l3}},$$

а ядра K_l имеют вид:

$$K_l(\tau) = \frac{1}{\int_0^\infty k_l(\nu)\, d\nu}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_l^2(x) E_1[\alpha_l(x)\tau]\, dx, \quad (14)$$

где

$$x = \frac{\nu - \nu_l^0}{\Delta\nu_l}; \quad \alpha_l(x) = \frac{k_l}{k_l^0}, \quad N_l^0(x,\eta) = \frac{I_l^0(\nu,\eta)}{h\nu} \quad (15)$$

($\alpha_l(x)$ — контур коэффициента поглощения).

Займемся определением величин y_l^0. Из (7_1) и (7_2) имеем:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{k_1^0\left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{g_1}{g_3}\right)}{k_2^0\left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{g_2}{g_3}\right)}. \quad (16)$$

Подставляя выражения для $\frac{n_l}{n_3}$ из (4) в (16), получим:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{k_1^0[(A_{31} + a_{31})g_3 - a_{13}g_1][B_{23}\rho_2 + a_{23}]}{k_2^0[(A_{32} + a_{32})g_3 - a_{23}g_2][B_{13}\rho_1 + a_{13}]}. \quad (17)$$

С другой стороны,

$$dz = \frac{dy_1}{k_1^0\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3\right)} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{nk_1^0\left(n_1 - \frac{g_1}{g_3} n_3\right)} dy_1 =$$

$$= \frac{B_{31}\rho_1 + A_{31} + a_{31} + (B_{23}\rho_2 + A_{32} + a_{32})\dfrac{B_{13}\rho_1 + a_{13}}{B_{23}\rho_2 + a_{23}}}{(A_{31} + a_{31})\, g_3 - a_{13}\, g_1} g_3 dy_1 +$$

$$+ \frac{B_{13}\rho_1 + a_{13}}{(A_{31} + a_{31})\, g_3 - a_{13} g_1} g_3 dy_1. \tag{18}$$

Или, пользуясь (17), получим:

$$dz = \frac{(B_{32} + B_{23})\,\rho_2 + (A_{32} + a_{32} + a_{23})}{(A_{32} + a_{32})\, g_3 - a_{23}\, g_2} g_3 dy_2 +$$

$$+ \frac{k_2^0}{k_1^0} \cdot \frac{B_{31}\rho_1 + A_{31} + a_{31}}{(A_{31} + a_{31}) g_3 - a_{13} g_1} g_3 dy_1. \tag{19}$$

Интегрируя обе части соотношения (19) по z от 0 до z_0, получим:

$$z_0 = \frac{(B_{32} + B_{23})\; Q_2(y_2^0) + (A_{32} + a_{32} + a_{23}) y_2^0}{(A_{32} + a_{32})\, g_3 - a_{23}\, g_2} g_3 +$$

$$+ \frac{k_2^0}{k_1^0} \frac{B_{31}\, Q_1(y_1^0) + (A_{31} + a_{31}) y_1^0}{(A_{31} + a_{31}) g_3 - a_{13}\, g_1} g_3, \tag{20}$$

где

$$Q_i(y_i^0) = \int_0^{y^0} \overline{\rho_i}(y_i,\; y_i^0)\, dy_i\,. \tag{21}$$

Аналогично получим:

$$z_0 = \frac{(B_{31} + B_{13})\, Q_1(y_1^0) + (A_{31} + a_{31} + a_{13})\, y_1^0}{(A_{31} + a_{31}) g_3 - a_{13}\, g_1} g_3 +$$

$$+ \frac{k_1^0}{k_2^0} \cdot \frac{B_{32} Q_2\,(y_2^0) + (A_{32} + a_{32}) y_2^0}{(A_{32} + a_{32})\, g_3 - a_{23}\, g_2} g_3. \tag{22}$$

Соотношения (21, 22) дают возможность определить величины реальных оптических толщин среды в каждой из линий—y_1^0 и y_2^0.

Отметим, что, как и в статье В. Ю. Теребижа ([2]), величины $Q_i(y_i^0)$ выражаются через функции X и Y, являющиеся обобщениями известных функций Амбарцумяна φ и ψ на случай полного перераспределения по частотам. Через эти функции выражаются также интенсивности диффузно-отраженного и проходящего излучений.

§ 2. *Рассеяние в спектральной линии при наличии внутренних источников*. Будем рассматривать нелинейную задачу переноса излучения в плоско-параллельном слое с геометрической толщиной z_0, равномерно заполненном атомами с двумя уровнями и источниками с интенсивностью $\varepsilon_\nu \frac{h\nu}{4\pi}$. При предположении о полном перераспределении излучения по частотам при рассеянии получается следующее уравнение переноса

$$\eta \frac{dI_\nu}{dz} = -k_\nu I_\nu \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right) + \frac{A_{21} k_\nu h\nu}{4\pi \int\limits_0^\infty k_\nu d_\nu} n_2 + \varepsilon_\nu \frac{h\nu}{4\pi} \tag{23}$$

с условиями:

$$I_\nu(0, \eta) = I_\nu^0(\eta) = h\nu N_0(x, \eta) \text{ при } \eta > 0 \text{ и } I_\nu(z_0, \eta) = 0 \text{ при } \eta < 0. \tag{24}$$

Условие стационарности дает

$$n_1 (B_{12}\rho + a_{12}) = n_2 (B_{21}\rho + A_{21} + a_{21}) \tag{25}$$

и

$$n_1 + n_2 = n = \text{conts}, \tag{26}$$

где

$$\rho = \frac{2\pi}{B_{12}} \int\limits_0^\infty d\nu \frac{k\nu}{h\nu} \int\limits_{-1}^1 I_\nu(z, \eta) d\eta. \tag{27}$$

Переходя к новому аргументу τ посредством соотношения

$$d\tau = k_0 \left(n_1 - \frac{g_1}{g_2} n_2\right) dz \tag{28}$$

и пользуясь соотношениями (25), (26) и условиями (24), для функции $\overline{\rho}(\tau) = \rho(z) + \frac{a_{12}}{B_{12}}$ получается следующее линейное уравнение:

$$\overline{\rho}(\tau, \tau_0) = \rho_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int\limits_0^{\tau_0} K_1(|\tau - \tau'|)\, \overline{\rho}(\tau', \tau_0)\, d\tau', \tag{29}$$

где

$$\rho_0(\tau) = \left[\frac{a_{12}}{B_{12}} + \frac{1}{k_0 n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varepsilon}(x) dx\right] + \frac{2\pi}{B_{12}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int\limits_0^1 \times$$

$$\times N_0(x, \eta) e^{-\frac{\alpha(x)\tau}{\eta}} d\eta - \frac{1}{2k_0 n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varepsilon}(x) dx \int\limits_0^1 \left| e^{-\frac{\alpha(x)\tau}{\eta}} + e^{-\frac{\alpha(x)(\tau_0 - \tau)}{\eta}} \right| d\eta, \tag{30}$$

а ядро $K_1(\tau)$ имеет вид

$$K_1(\tau) = A \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha^2(x) + \frac{\left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right)\alpha(x)}{k_0 n A A_{21}} \overline{\varepsilon}(x)\right] E_1[\alpha(x)\tau]\, dx; \tag{31}$$

x, $\alpha(x)$, A, λ имеют прежний смысл, $\overline{\varepsilon}(x) = \varepsilon_\nu$.
Для определения τ_0 нужно пользоваться соотношением

$$
z_0 = \frac{1}{k_0 n} \tau_0 + \frac{B_{12}\left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right)}{A_{21} k_0 n} \lambda \int_0^{\tau_0} \overline{\rho}\, (\tau, \tau_0) d\tau. \tag{32}
$$

Пусть функция $P(\tau, t, \tau_0)$ удовлетворяет уравнению (29) со свободным членом $\frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{t}}$. Так как $P_0(\tau)$ представляет собой сумму постоянной и суперпозиции экспонент, то $\overline{\rho}(\tau, \tau_0)$ и $\int_0^{\tau_0} \overline{\rho}(\tau, \tau_0)\, d\eta$ будут соответствующими суперпозициями по t функций P и

$$
\int_0^{\tau_0} P(\tau, t, \tau_0)\, d\tau, \ (z \leqslant \infty).
$$

Обозначим через X_1 и Y_1 функции аналогичные функциям X и Y (см. ([5])) при

$$
G(t) = 2A \int_{x(t)}^{\infty} \left[\alpha^2(y) + \alpha(y) \frac{\varepsilon(y) + \varepsilon(-y)}{2} \frac{\left(1 + \frac{g_1}{g_2}\right)}{k_0 n A A_{21}} \right] dy, \tag{33}
$$

причем $x(t) = 0$ при $t \leqslant 1$ и $\alpha\,[x(t)] = \frac{1}{t}$ при $t > 1$. С помощью соответствующих формул работы В. В. Иванова ([5]) можно значение интеграла $\int_0^{\tau_0} P(\tau, z, \tau_0) d\tau$ и интенсивности излучений, выходящих из обеих границ слоя, выразить через функции X_1 и Y_1.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР
Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

Ճառագայթման տեղափոխման որոշ ոչ գծային խնդիրներ

Հոդվածում դիտարկվում են հարթ զուգահեռ շերտում ճառագայթման տեղափոխման երկու ոչ գծային խնդիրներ։ § 1-ում դիտարկվում է եռամակարդակ ատոմներից կազմված իզոթերմիկ շերտի մոդելը, երբ 1—2 անցումները արգելված են։ §2-ում ընդունվում է, որ միջավայրը կազմված է երկմակարդակ ատոմներից և հավասարաչափ բաշխված աղբյուրներից։ Երկու խնդիրներում էլ համարվում է, որ լույսի ցրումը կատարվում է ըստ հաճախականությունների լրիվ վերաբաշխմամբ։ Վ. Հ. Համբարձումյանի՝ ինքնահամաձայնեցված օպտիկական խորությունների մեթոդի կիրառման շնորհիվ այդ խնդիրներին համապատասխանող տեղափոխման հավասարումները գծայնացվում են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, т. 1, 297 (1965). [2] *В. Ю. Теребеиж*, Астрофизика, т. 3, 281 (1967). [3] *В. А. Амбарцумян*, ДАН Арм. ССР, т. 39, 159 (1964). [4] *В. А. Амбарцумян*, Сб. «Теория звездных спектров», Наука, М., 1966. [5] *В. В. Иванов*, Астрон. ж., т. 40, вып. 2, 257 (1963).