ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLIX 1969 3

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. А. Мовсисян

Об устойчивости упругой балки при продольном ударе

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 26/V 1969)

Обычно, при рассмотрении устойчивости балки, принимается, что сжимающая сила одинакова по ее длине. И это имеет определенную основу, так как упругая волна сжатия по длине распространяется с довольно большой скоростью $\left(\text{например, для стали порядка } 5\,\frac{км}{сек}\right)$. Такое предположение может привести к верным результатам при сравнительно малых скоростях нагружения стержня. В задачах продольного удара, как показывают многочисленные эксперименты, балка теряет устойчивость локально. И здесь нужно определить критическую длину потери устойчивости при заданной скорости удара.

В настоящей работе рассматривается устойчивость при продольном ударе, с учетом неоднородности сжимающей силы по длине балки. Дается способ определения собственных частот и критических сил частично сжатых стержней (уравнение с разрывным коэффициентом). Изменение сжимающей силы по длине, как нам известно из опубликованных работ, учитывалось только в ([1]), но там скорее определяется не критическая длина, а исследуется возрастание начального прогиба.

1. Пусть имеется упругая колонна, один край которой заделан, а второй — свободен (по отношению к продольному перемещению). По свободному концу колонны производится удар жесткой массой M со скоростью c. За начало времени берется момент соприкосновения ударяющего тела с колонной.

Уравнения продольного движения, краевые и начальные условия данной задачи будут соответственно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{Eg}{\gamma}, \tag{1.1}$$

$$\alpha l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=0} = -a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}, \quad u_{x=l} = 0, \tag{1.2}$$

где $a = \frac{M}{m}$, m — масса колонны,

$$u_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant l,$$

$$u_{t=0} = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = -c \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{1.3}$$

Задача эта известная и приводится, например, в ([2]), так что можно воспользоваться готовыми результатами. В частности, сжимающая сила определяется формулой

$$P = EF\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.4}$$

где для моментов времени $t \leqslant \frac{l}{a}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{a}\exp\left(\frac{x - at}{\alpha l}\right), \tag{1.5}$$

где $\frac{l}{a} < t \leqslant \frac{2l}{a}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{a}\left[\exp\left(\frac{x - at}{\alpha l}\right) + \exp\left(\frac{2l - x - at}{\alpha l}\right)\right] \tag{1.6}$$

и т. д.

Таким образом, сжимающую силу в каждой точке стержня и в каждый момент движения можно считать известной.

Уравнение возмущенного движения балки будет

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EF\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{1.7}$$

Граничными условиями для (1.7) будем принимать условия свободного опирания. В уравнении (1.7) коэффициент $\frac{\partial u}{\partial x}$ определяется по (1.5), (1.6) и т. д.

Нашей целью является вот что. В начальный момент времени балке сообщается возмущение, которое вызывает возмущенное движение, определяемое уравнением (1.7). Пользуясь определением устойчивости движения для конечных моментов времени ([3]), определить устойчивое или нет возмущение, и если неустойчивое, то определить интервал времени, в котором движение было устойчивым.

Для этого рассмотрим одну вспомогательную задачу, которая, помимо того, что представляет, безусловно, самостоятельный интерес, но и в основном дает путь к решению поставленной задачи.

2. Рассмотрим колебания частично сжатой балки, края которой шарнирно оперты. Пусть часть балки $0 \leqslant x \leqslant b$ $(b < l)$ сжата силой P, тогда в уравнении колебания (1.7)

$$EF\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{cases}P, & 0\leqslant x\leqslant b\\ 0, & b<x\leqslant l.\end{cases} \tag{2.1}$$

Для решения этой задачи обычно поступают следующим образом. Рассматриваются две балки: загруженную и не загруженную соответственно длинами b и $l-b$. В сечении $x=b$ ставятся условия сопряжения, которые вместе с краевыми условиями дают однородную систему для определения постоянных интегрирования. Из условия разрешимости этой системы определяются собственные частоты.

Здесь мы поступим иначе. Представим (2.1) в виде ряда

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leqslant x\leqslant b, & P\\ b<x\leqslant l, & 0\end{array}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos\lambda_k x,\quad \lambda_k=\frac{k\pi}{l},$$

$$a_0=\frac{Pb}{l},\ a_m=\frac{2P}{k\pi}\sin\lambda_k b\quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.2}$$

Подставим (2.2) в (1.7) и поищем его решение в виде:

$$w=e^{i\omega t}\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin\lambda_k x. \tag{2.3}$$

Тогда после некоторых преобразований для постоянных f_k получим следующую систему бесконечных уравнений

$$\left(2EI\lambda_k^4-2\lambda_k^2a_0-\lambda_k^2a_{2k}-2\frac{\gamma F}{g}\omega^2\right)f_k-\lambda_k\sum_{q=1}^{k-1}\Big(a_{k+q}+$$

$$+a_{k-q}\Big)\lambda_q f_q-\lambda_k\sum_{q=k+1}^{\infty}(a_{k+q}+a_{q-k})\lambda_q f_q=0. \tag{2.4}$$

Частоты балки будут определяться из условия разрешимости системы (2.4), т. е.

$$\begin{vmatrix}\Omega_1 & -\lambda_1\lambda_2(a_1+a_3) & -\lambda_1\lambda_3(a_2+a_4)\cdots\\ -\lambda_1\lambda_2(a_1+a_3) & \Omega_2 & -\lambda_2\lambda_3(a_1+a_5)\cdots\\ -\lambda_1\lambda_3(a_2+a_4) & -\lambda_2\lambda_3(a_1+a_5) & \Omega_3\quad\cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=0, \tag{2,5}$$

где $\Omega_k=2EI\lambda_k^4-2\lambda_k^2a_0-\lambda_k^2a_{2k}-2\dfrac{\gamma F}{g}\omega^2.$

Из (2.5) в частности получаются частоты как свободной ($a_i=0$, $i=0,1,\cdots$), так и сжатой по всей длине ($a_0=P$, $a_i=0$ $i=1,2,\cdots$) балок.

Определитель (2.5) принадлежит к классу нормальных определителей. В самом деле, достаточно обозначить в (2.4) $\lambda_k^2f_k=\varphi_k$. Тогда обе суммы в (2.4) оказывается имеют порядок $O(\ln q/q)$, следовательно, существуют $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c_{ik}|$ и $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}|c_{ik}|$ $\left(\varphi_k=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_{ik}\varphi_k\right)$. Поэтому частоты из (2.5) можно определить итерационным методом, который сходится.

Из (2.4) или (2.5) можно также получить значения критической силы. Как известно ([5]), при сжимающей силе, равной критической, частота балки становится равной нулю. Поэтому, принимая $\omega = 0$, можно из (2.5) определить критическую силу. Для этого достаточно в (2.5) оставить только диагональные члены и определить главную гармонику, т. е. ту гармонику из (2.3), которая наиболее близка к настоящей форме потери устойчивости. Потом можно брать конечный определитель, среди членов которого есть и главная гармоника. Как показывает исследование, главной гармоникой является первый член ряда (2.3), и даже такое одночленное приближение дает достаточно хороший результат.

Ниже приводится таблица для $P_{кр}/P_э$ $(P_э = EI\lambda_1^2)$ при некоторых значениях отношения b/l. В первой строке приведены $P_{кр}/P_э$ при одночленном приближении, а во второй — при двухчленном.

b/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$P_{кр}/P_э$	5,167	2,845	2,215	2,026	2	1,975	1,822	1,541	1,24	1
	4,212	2,434	2,002	1,898	1,894	1,835	1,668	1,449	1,219	1

Как видно из таблицы, значения $P_{kp}/P_э$ при различных приближениях не очень отличаются. Например, для $b/l = 0{,}5$ они отличаются друг от друга порядка 6%.

Понятно, что подобным же образом можно решить задачу колебаний или устойчивости для балки, которая на различных участках сжата по разному.

3. Теперь возвратимся к нашей первоначальной задаче, решение которой также будем искать по методу, изложенному в п. 2. Сжимающую силу, которая определяется по (1.4)—(1.6), представим в виде ряда (2.2). Не нарушая общности, только ради простоты (потому что, как следует из дальнейшего изложения, все можно было делать без этого предположения), примем, что отношение веса ударяющего тела к весу стержня стремится к бесконечности, т. е. $\alpha \to \infty$. Тогда для сжимающей силы при первом прохождении волны из (1.4) и (1.5) будем иметь

$$P = \begin{cases} EF\dfrac{c}{a}, & 0 \leq x < at \\ 0 & at < x \leq l. \end{cases} \tag{3.1}$$

Предположим, что балка теряет устойчивость при первом прохождении волны. Мы получим в дальнейшем условие, при соблюдении которого это может происходить, а если этого нет, то дадим ход решению задачи после первого отражения волны и т. д.

Итак, разлагая (3.1) в ряд типа (2.2), имеем:

$$EF\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(t)\cos\lambda_k x,$$

$$a_0=EF\frac{c}{a}\cdot\frac{at}{l},\quad a_k=2EF\frac{c}{ak\pi}\sin\lambda_k at. \tag{3.2}$$

Ищем решение (1.7) в виде

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\lambda_k x. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) и (3.3) в (1.7), для $f_k(t)$ получим следующую бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$2\frac{\gamma F}{g}\frac{d^2f_k}{dt^2}+[2EJ\lambda_k^4-\lambda_k^2(2a_0+a_{2k})]f_k-$$

$$-\lambda_k\sum_{q=1}^{k-1}(a_{q+k}+a_{k-q})\lambda_q f_q-\lambda_k\sum_{k=q+1}^{\infty}(a_{q+k}+a_{q-k})\lambda_q f_q=0. \tag{3.4}$$

Коэффициенты $f_k(t)$ уравнений (3.4) как функции времени в момент возмущения ($t=0$) — положительные функции, в дальнейшем убывая, они переходят через нуль и становятся отрицательными. До тех пор, пока эти коэффициенты положительны, $f_k(t)$ имеют колебательный характер. Естественно, по аналогии с предыдущей задачей, тот момент, когда „мгновенная частота" становится равной нулю, считать критическим ($t_{кр}$), так как после этого момента $f_k(t)$ возрастают в экспоненциальном порядке. Тогда движение балки в интервале времени $[0, t_{кр}]$ можно считать устойчивым, после чего оно становится неустойчивым. Понятно, что при этом критическая длина определится следующей формулой

$$l_{кр}=at_{кр}. \tag{3.5}$$

Из сказанного следует, что для определения критического момента имеем равенство

$$\begin{vmatrix} 2EJ\lambda_1^3-\lambda_1[2a_0(t_{кр})+a_2(t_{кр})] & -\lambda_2[a_1(t_{кр})+a_3(t_{кр})]\cdots \\ -\lambda_1[a_1(t_{кр})+a_3(t_{кр})] & 2EJ\lambda_2^3-\lambda_2[2a_0(t_{кр})+a_4(t_{кр})]\cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0. \tag{3.6}$$

Из (3.6) можно получить также условие для потери устойчивости при первом прохождении волны

$$\frac{c}{a}\geqslant\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{J}{F}. \tag{3.7}$$

На рис. 1 приведены некоторые кривые для отношений $\frac{c}{a}$ в зависимости $l_{кр}/l$ при некоторых значениях $\frac{\pi^2 J}{l^2 F}$, определенные из (3.6) во втором приближении.

После того, как наступает критический момент сжатия, часть стержня теряет устойчивость, происходит большой изгиб этой части, и в дальнейшем волна сжатия не передается на оставшуюся часть. Этим и объясняются результаты экспериментов, которые дают локальную потерю устойчивости в задачах продольного удара.

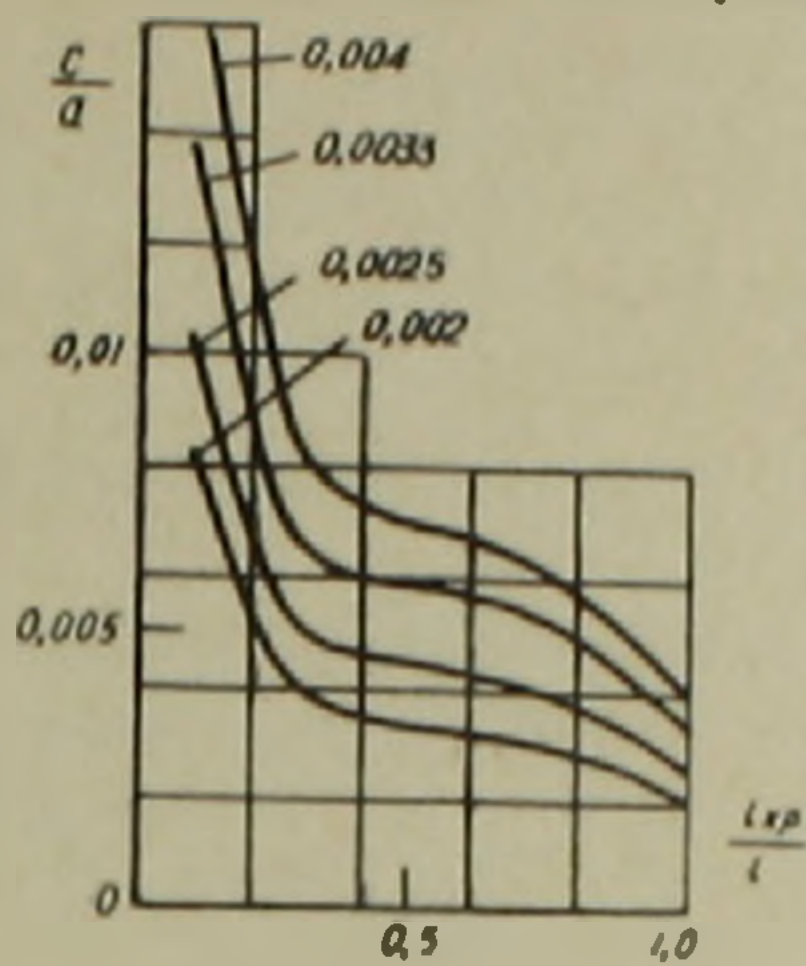

Рис. 1

Если не соблюдается условие (3.7), т. е. балка при первом прохождении не теряет устойчивости, то для интервала времени $\frac{l}{a} < t \leqslant \frac{2l}{a}$, как видно из (1.4) и (1.6), в отраженной части сжимающей силой будет $2EF\frac{c}{a}$, а в остальной — $EF\frac{c}{a}$, т. е.

$$P = \begin{cases} 2EF\dfrac{c}{a} & 0 \leqslant x' \leqslant at' \\ EF\dfrac{c}{a} & at' < x' \leqslant l \end{cases} \tag{3.8}$$

здесь t' и x' — новое время $\left(t' = t - \frac{l}{a}\right)$ и новая координата $(x' = l - x)$.

Представив (3.8) в виде ряда (3.2), для коэффициентов разложения будем иметь

$$a_0 = EF\frac{c}{a}\left(1 + \frac{at'}{l}\right), \quad a_k = EF\frac{c}{a}\frac{2}{k\pi}\sin\lambda_k at'. \tag{3.9}$$

Критический момент потери устойчивости опять будет определяться из (3.6), где уже a_k надо взять из (3.9).

И вообще надо учесть, что после n-того отражения в отраженной части сжимающей силой будет $(n+1)EF\frac{c}{a}$, а в неотраженной — $nEF\frac{c}{a}$ и ход решения каждый раз аналогичен вышеприведенным.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

ՀԱՅՈՒ ՓՐՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ... ԳՐԱԴ ... ԱԿԱԴԵՄԻԱ

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Առաձգական հեծանի կայունության մասին երկայնական հարվածի դեպքում

Ուսումնասիրվում է հեծանի կայունությունը, որի մի եզրում տեղի է ունենում հարված առաձգական մարմնով։ Կայունության (1.7) հավասարման մեջ հաշվի է առնվում սեղմող ուժի անհամասեռությունը ըստ հեծանի երկարության։

Տրվում է եղանակ հեծանի կրիտիկ ուժի կամ հաճախականությունների որոշման համար, երբ նա սեղմված է միայն ինչ-որ մասում։ Այդ եղանակն էլ օգտագործվում է դրված խնդրի լուծման համար։ Գտնված է հեծանի կայունությունը կորցնելու կրիտիկ երկարությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков*, ДАН СССР, т. 167, № 4 (1966). [2] *Н. А. Кильчевский*, Теория соударения твердых тел, Гостехиздат, М.—Л., 1949. [3] *Г. В. Каменков*, ПММ, т. 17, в. 5, 1953. [4] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952. [5] *А. С. Вольмир*, Устойчивость упругих систем, Физматгиз, М., 1963.