ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIX 1969 3

УДК 517.53 : 512.83

МАТЕМАТИКА

А. В. Ефимов

Об одном применении теоремы Ланжевена в теории цепей

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/IV 1969)

В этой заметке показано, что известные характеристические свойства проходной матрицы и матрицы сопротивления (проводимости) (см., напр., [1,2]), линейного пассивного $CLMR$—многополюсника являются логическими следствиями простой (но важной) теоремы, доказанной Ланжевеном. Доказательство проводится для проходной матрицы, существование которой предполагается.

Пусть дан линейный пассивный $4n$-полюсник N (рис. 1). Перейдем от напряжений и токов в ветвях к их лапласовым преобразо-

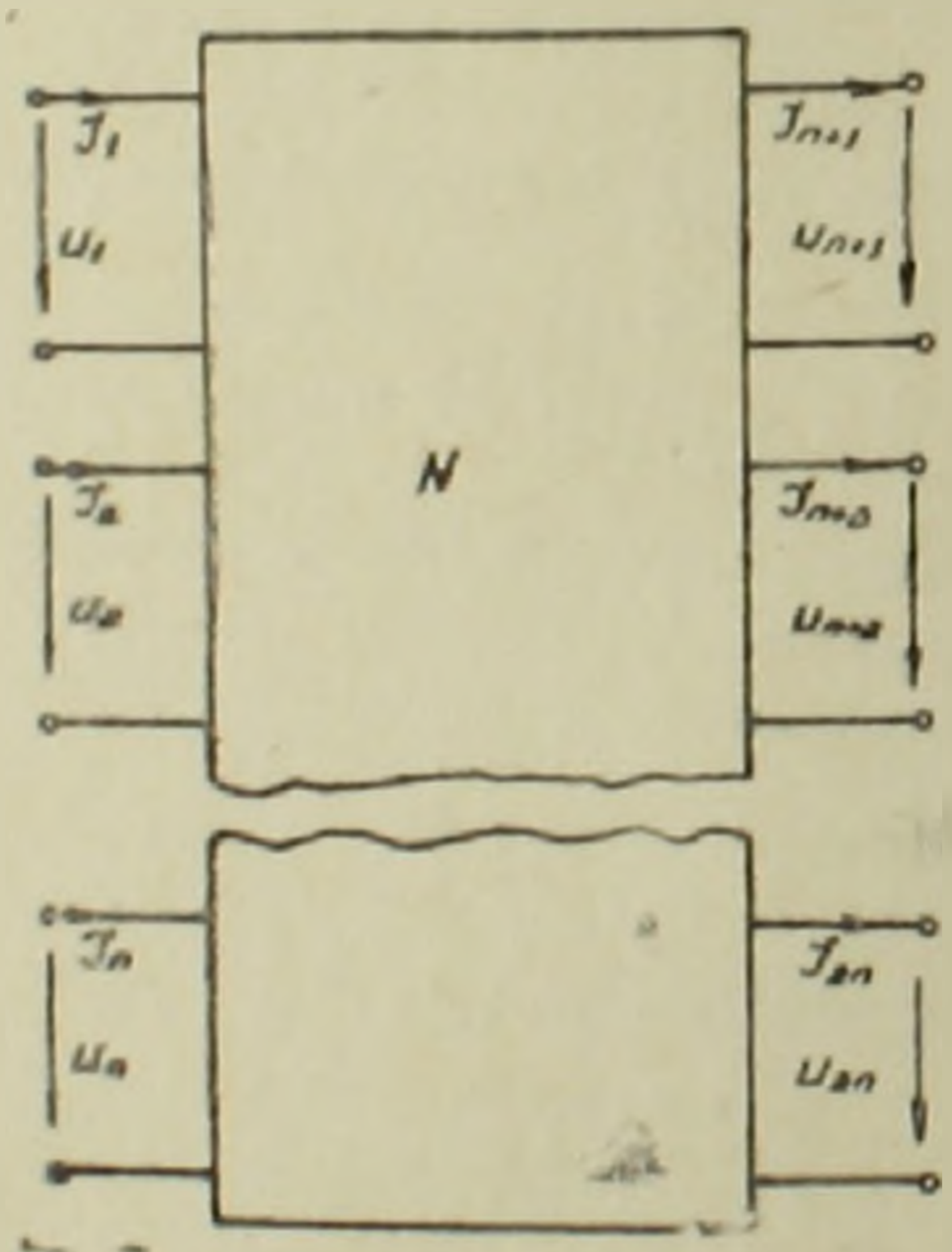

Рис. 1

ваниям. Через $U_k = U_k(\lambda)$, $I_k = I_k(\lambda)$,

$$U_{n+k} = U_{n+k}(\lambda), \quad I_{n+k} = I_{n+k}(\lambda) \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

обозначим соответственно лапласовы преобразования напряжений и токов на входе и на выходе, а через $v_\rho(\lambda)$, $i_\rho(\lambda)$ $(\rho = 1, 2, \cdots, q)$—лапласовы преобразования напряжений и токов во внутренних ветвях. Исходя из законов Кирхгофа и соотношений между напряжениями и токами во внутренних ветвях обычным образом составим систему линейных уравнений (с действительными коэффициентами), из которой можно, по предположению, получить соотношение

$$\begin{vmatrix} U_{\mathrm{I}} \\ I_{\mathrm{I}} \end{vmatrix} = w(\lambda) \begin{vmatrix} U_{\mathrm{II}} \\ I_{\mathrm{II}} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Здесь U_{I}—n-мерный вектор-колонна с компонентами $U_1, \cdots, U_n$ (векторы I_{I}, U_{II}, I_{II} образуются аналогично), $w(\lambda)$-матрица порядка $2n$ (обратная проходной матрице), которую мы будем тоже называть проходной. Из того, что коэффициенты упомянутой системы уравнений—действительные числа, а также из способа получения соотношения (1) вытекает, что матрица $w(\lambda)$ является рациональной функцией от λ и обладает свойством

$$\overline{w(\bar{\lambda})} = w(\lambda). \tag{1}$$

Теорема Ланжевена заключается (применительно к проходному многополюснику) в следующих двух равенствах

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{U}_k \cdot I_k + U_k \cdot \overline{I}_k) - \sum_{k=1}^{n} (\overline{U}_{n+k} \cdot I_{n+k} + U_{n+k} \cdot \overline{I}_{n+k}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{q} (\overline{v_p(\lambda)} \cdot i_p(\lambda) + v_p(\lambda) \cdot \overline{i_p(\lambda)}), \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} i(\overline{U}_k \cdot I_k - U_k \cdot \overline{I}_k) - \sum_{k=1}^{n} i(\overline{U}_{n+k} \cdot I_{n+k} - U_{n+k} \cdot \overline{I}_{n+k}) =$$

$$= \sum_{p=1}^{q} i(\overline{v_p(\lambda)}\, i_p(\lambda) - v_p(\lambda) \cdot \overline{i_p(\lambda)}). \tag{3}$$

Если, для удобства, выражение вида $\overline{U}_k I_k + U_k \cdot \overline{I}_k$ назвать активной энергией, а выражение вида $i(\overline{U}_k I_k - U_k \cdot \overline{I}_k)$—реактивной энергией, то эта теорема может быть сформулирована так:

Суммарная активная (реактивная) энергия, поступающая в многополюсник извне, равна суммарной активной (реактивной) энергии, расходуемой во внутренних ветвях многополюсника.

В такой, по существу, формулировке теорема Ланжевена приведена в ([3]) (и доказана для комплексных напряжений и токов при синусоидальном режиме).

Необходимо, однако, отметить, что это теорема *является следствием законов Кирхгофа* и *доказательство ее не опирается на какие-либо энергетические соображения*. Она верна для самых абстрактных систем, в которых постулированы законы Кирхгофа, напр., для графов. В этом, по-видимому, и заключается ее важность.

Введем в рассмотрение матрицы

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \qquad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{vmatrix}.$$

блоки которых имеют порядок n. Нетрудно проверить, что равенства (2), (3) можно записать в виде

$$[U_{11}^*,\ J_{11}^*][w^*(\lambda)\cdot J_1 w(\lambda)-J_1]\begin{bmatrix}U_{11}\\ I_{11}\end{bmatrix}=\sum_{p=1}^{q}(\overline{v_p(\lambda)}\cdot i_p(\lambda)+v_p(\lambda)\overline{i_p(\lambda)}),\tag{2'}$$

$$[U_{11}^*,\ J_{11}^*]\,[w^*(\lambda)J_2 w(\lambda)-J_2]\begin{bmatrix}U_{11}\\ I_{11}\end{bmatrix}=\sum_{p=1}^{q}i(\overline{v_p(\lambda)}\cdot i_p(\lambda)-v_p(\lambda)\overline{i_p(\lambda)}).\tag{3'}$$

Подсчитаем теперь суммы в правых частях равенств (2'), (3'). По предположению во внутренних ветвях многополюсника N имеются лишь активные сопротивления, конденсаторы, катушки (возможно индуктивно связанные друг с другом) и идеальные трансформаторы. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

a) Активное сопротивление R.

Соотношение между напряжением и током

$$v(\lambda)=R\cdot i(\lambda).$$

$$\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)+v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}=2R|i(\lambda)|^2,$$

$$i\,[\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)-v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}\,]=0.$$

b) Конденсатор с емкостью C.

Соотношение между напряжением и током

$$i(\lambda)=\lambda Cv(\lambda).$$

$$\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)+v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}=(\lambda+\overline{\lambda})C|v(\lambda)|^2,$$

$$i\,[\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)-v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}]=i(\lambda-\overline{\lambda})C|v(\lambda)|^2.$$

c) Катушка с индуктивностью L.

Соотношение между напряжением и током

$$v(\lambda)=\lambda\cdot L\cdot i(\lambda).$$

$$\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)+v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}=(\overline{\lambda}+\lambda)\cdot L\cdot|i(\lambda)|^2,$$

$$i\,(\overline{v(\lambda)}\cdot i(\lambda)-v(\lambda)\cdot\overline{i(\lambda)}]=i(\overline{\lambda}-\lambda)\cdot L\cdot|i(\lambda)|^2.$$

d) Система индуктивно связанных между собой катушек с индуктивностями $L_1=M_{11},\cdots,L_s=M_{ss}$ и взаимными индуктивностями $M_{kl}(k,l=1,\ 2,\cdots s;\ k\neq l)$. Соотношения между напряжениями и токами

$$v_k(\lambda)=\lambda\cdot\sum_{l=1}^{s}M_{kl}\cdot i_l(\lambda),\quad k=1,\ 2,\cdots,\ s.$$

$$\sum_{k=1}^{s}[\overline{v_k(\lambda)}\cdot i_k(\lambda)+v_k(\lambda)\cdot\overline{i_k(\lambda)}]=$$

$$= (\bar\lambda + \lambda) \sum_{k,l=1}^{s} M_{kl} \cdot i_k(\lambda) \cdot \overline{i_l(\lambda)} = (\bar\lambda + \lambda)\, i^*(\lambda)\, M i(\lambda),$$

$$\sum_{k=1}^{s} i\, [\overline{v_k(\lambda)} \cdot i_k(\lambda) - v_k(\lambda) \cdot \overline{i_k(\lambda)}] =$$

$$= i(\bar\lambda - \lambda) \cdot \sum_{k,l=1}^{s} M_{kl} \cdot i_k(\lambda) \cdot \overline{i_l(\lambda)} = i(\bar\lambda - \lambda)\, i^*(\lambda)\, M i(\lambda).$$

Здесь $i^*(\lambda) = (i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_s(\lambda))$. Отметим, что (см., напр., [4]) матрица $M = [M_{kl}]$ симметрическая и неотрицательная.

e) Идеальный трансформатор.

Пусть

$$\begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}$$

передаточная матрица трансформатора (T—вещественная матрица порядка m) через

$$v(\lambda) = \begin{bmatrix} v_1(\lambda) \\ v_2(\lambda) \\ \vdots \\ v_m(\lambda) \end{bmatrix}, \quad i(\lambda) = \begin{bmatrix} i_1(\lambda) \\ i_2(\lambda) \\ \vdots \\ i_m(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \tilde v(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde v_1(\lambda) \\ \tilde v_2(\lambda) \\ \vdots \\ \tilde v_m(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \tilde i(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde i_1(\lambda) \\ \tilde i_2(\lambda) \\ \vdots \\ \tilde i_m(\lambda) \end{bmatrix}$$

обозначим соответственно напряжения и токи на входе и выходе трансформатора. Соотношение между напряжениями и токами

$$\begin{bmatrix} \tilde v(\lambda) \\ \tilde i(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T' & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(\lambda) \\ i(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\tilde v^*(\lambda) \cdot \tilde i(\lambda) \pm \tilde i^*(\lambda) \cdot \tilde v(\lambda) = v^*(\lambda) \cdot i(\lambda) \pm i^*(\lambda) \cdot v(\lambda).$$

Поэтому наличие в многополюснике N идеальных трансформаторов не отражается на значении правых частей равенств (2′), (3′). Можно сказать, что идеальный трансформатор не потребляет ни активной, ни реактивной энергии.

Поскольку во внутренних ветвях многополюсника, в общем случае, имеется несколько элементов каждого из перечисленных видов, равенства (2′), (3′) можно записать (в понятных обозначениях) в следующем виде

$$[U_{11}^*, I_{11}^*]\, [w^*(\lambda) J_1 w(\lambda) - J_1] \begin{bmatrix} U_{11} \\ J_{11} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{r} R_j |i_j(\lambda)|^2 + (\bar\lambda + \lambda) \left[\sum_{j=1}^{c} c_j |v_j(\lambda)|^2 + \sum_{j=1}^{m} i_j^*(\lambda) M_j i_j(\lambda) \right], \quad (4)$$

$$[U_{11}^*, I_{11}^*]\,[w^*(\lambda)\,J_2\,w(\lambda) - J_2]\begin{bmatrix} U_{11} \\ J_{11} \end{bmatrix} =$$

$$= i(\bar{\lambda} - \lambda)\left[-\sum_{j=1}^{c} c_j\,|v_j(\lambda)|^2 + \sum_{j=1}^{m} i_j^*(\lambda)\,M_j\,i_j(\lambda)\right] \tag{5}$$

(здесь изолированные катушки рассматриваются как частный случай системы индуктивно связанных катушек).

В качестве простых следствий соотношений (4), (5) и свойства (1) получаются перечисленные ниже теоремы.

Теорема 1. *Проходная матрица $w(\lambda)$ линейного пассивного многополюсника обладает свойствами*

$$\overline{w(\lambda)} = w(\bar{\lambda}), \tag{I}$$

$$w^*(\lambda)\,J_1\,w(\lambda) - J_1 \geqslant 0 \quad (\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0), \tag{II}$$

$$w'(\lambda)\,J_2 w(\lambda) = J_2. \tag{III}$$

Рассуждениями, вполне аналогичными приведенным выше, может быть установлена

Теорема 1′. *Матрица сопротивления (проводимости) $z(\lambda)$ линейного пассивного многополюсника обладает свойствами*

$$\overline{z(\lambda)} = z(\bar{\lambda}), \tag{I′}$$

$$z^*(\lambda) + z(\lambda) \geqslant 0 \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > 0), \tag{II′}$$

$$z'(\lambda) = z(\lambda). \tag{III′}$$

Теорема 2. *Если линейный пассивный многополюсник — реактивный (то есть не содержит активных сопротивлений), то его переходная матрица обладает дополнительным свойством*

$$w^*(\lambda)\,J_1\,w(\lambda) - J_1 = 0 \quad (\mathrm{Re}\,\lambda = 0).$$

Теорема 3. *Если линейный пассивный многополюсник не содержит конденсаторов, то его проходная матрица обладает дополнительным свойством*

$$w^*(\lambda)\,J_2 w(\lambda) - J_2 \begin{cases} \geqslant 0 & (\mathrm{Im}\,\lambda > 0) \\ \leqslant 0 & (\mathrm{Im}\,\lambda < 0) \end{cases}.$$

Аналогичная теорема может быть сформулирована для многополюсников, не содержащих индуктивностей.

В заключение отметим еще следующее неравенство, вытекающее из соотношений (4), (5)

$$\frac{w^*(\lambda)\,J_1 w(\lambda) - J_1}{\lambda + \bar{\lambda}} \pm \frac{w^*(\lambda)\,J_2 w(\lambda) - J_2}{i(\bar{\lambda} - \lambda)} \geqslant 0.$$

Его же можно получить как логическое следствие свойств (I), (II), (III) проходной матрицы. Аналогичное неравенство имеет место также для матрицы сопротивления (проводимости).

Одесский педагогический институт

Ա. Վ. ՆՅԻՄՈՎ

Շղթաների տեսության մեջ Լանժևենի թեորեմի մի կիրառման մասին

Գծային պասիվ CLMR-բազմաբևեռի անցումային մատրիցայի (ինչպես նաև դիմադրության, հաղորդականության մատրիցայի) բնութագրիչ հատկությունները կարելի է ստանալ ելնելով Լանժևենի թեորեմից։ Դրա հետ միասին էական է, որ չեն օգտագործվում որևէ էներգետիկ դատողություններ։ Նշված հատկությունները հանդիսանում են Կիրխհոֆի օրենքների մաթեմատիկական հետևանքները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *W. Caur*, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954. [2] *А. Г. Руткас*, Некоторые применения теории несамосопряженных операторов к электрическим цепям (автореферат кандидатской диссертации), Харьков, 1963. [3] *П. Л. Калантаров* и *Л. Р. Нейман*, Теория цепей переменного тока, Госэнергоиздат, 1959. [4] *Л. Р. Нейман*, *П. Л. Калантаров*, Физические основы электротехники и теории цепей постоянного тока, Госэнергоиздат, 1954.