ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIX 1969 3

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Е. А. Ларионов

О линейных операторах, действующих в пространствах с нерегулярной индефинитной метрикой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/II 1969)

Пусть h гильбертово пространство, снабженное наряду с обычным скалярным произведением (x, y) индефинитным скалярным произведением $[x, y] = (Wx, y)$, где W — ограниченный обратимый самосопряженный оператор в h. Рассмотрим спектральное разложение оператора W

$$W = \int_{m}^{M} \lambda dE_\lambda \quad (E_{\lambda-0} = E_\lambda,\ E_m = 0,\ E_M = I) \tag{1}$$

и положим

$$P_+ = \int_{+0}^{M} dE_\lambda, \quad P_- = \int_{m}^{0} dE_\lambda.$$

Число $k = \min\{\dim P_+, \dim P_-\}$ называется рангом индефинитности пространства h.

Введем в h новое дефинитное скалярное произведение

$$(x, y)_1 = (WP_+ x, y) - (WP_- x, y). \tag{2}$$

Если наряду с оператором W и обратный к нему оператор W^{-1} является ограниченным, то метрика $[x, y] = (Wx, y)$ называется регулярной или понтрягинской.

Из (2) следует, что

$$[x, y] = (P_+ x, y)_1 - (P_- x, y)_1. \tag{3}$$

Пусть $\hat{h}$, $\hat{h}_+$, $\hat{h}_-$ — пополнение подпространств h, $h_+ = P_+ h$ и $h_- = P_- h$ по норме $\|x\|_1 = (x, x)_1^{\frac{1}{2}}$, а $\hat{P}_+$ и $\hat{P}_-$ — взаимно-дополнительные ортопроекторы из $\hat{h}$ на $\hat{h}_+$ и $\hat{h}_-$ соответственно. При пополнении h по норме $\|x\|_1$ метрика $[x, y]$ индуцирует на $\hat{h}$ метрику $[x, y]_1$, причем

ՀՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԿԵՆՏՐ. ԳԻՏ.
ԳՐԱԴ.

$$[x, y]_1 = (\hat{J}x, y)_1, \qquad (4)$$

где $\hat{J} = \hat{P}_+ - \hat{P}_-$.

Через R обозначим кольцо всех линейных ограниченных операторов в h, через γ_∞ его идеал, состоящий из всех вполне непрерывных операторов.

Если W и $W^{-1} \in R$, то нормы $\|x\|_1$ и $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ топологически эквивалентны и $\hat{h} \equiv h$, $\hat{h}_\pm \equiv h_\pm$. С другой стороны для всех x, $y \in h$

$$[x, y] = [x, y]_1. \qquad (5)$$

Итак, в случае W, $W^{-1} \in R$ индефинитная W-метрика $[x, y]$ представляется в виде

$$[x, y] = (Jx, y)_1, \qquad (6)$$

где $J = P_+ - P_-$.

В последнем случае h называется J-пространством, а если $k < \infty$ пространством Понтрягина и обозначается Π_k. В общем случае h назовем W-пространством. Понятия $W(J)$ — сопряженного, $W(J)$ — эрмитового, $W(J)$ — самосопряженного (W — с. с., J — с. с.), $W(J)$ — изометрического, $W(J)$ — унитарного операторов в W-пространстве h вводится обычным образом. Если A W — с. с. оператор, а U W — унитарный оператор в h, то по определению

$$A = W^{-1} A^* W, \qquad (7)$$

$$U^* W U = W, \qquad (8)$$

где A^* (U^*) оператор, сопряженный с оператором A (U) относительно формы (x, y).

Известная теорема Л. С. Понтрягина утверждает (1), что любой J — самосопряженный оператор A, действующий в пространстве Π_k, обладает k-мерным J — неотрицательным инвариантным подпространством L_k. Поскольку пространство L_k конечномерно, то J — самосопряженный оператор в Π_k обладает по крайней мере одним J — неотрицательным нетривиальным собственным вектором и, следовательно, его дискретный спектр не пуст.

Основная цель этой работы — доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Любой W — с. с. (W — унитарный) оператор A (U), действующий в пространстве h_k, обладает по крайней мере одним нетривиальным собственным вектором.* Сначала остановимся на вспомогательных предложениях.

Лемма 1. *W — унитарный оператор U, действующий в h, ограничен вместе с обратным по норме $\|x\|$.*

В самом деле, оператор U отображает взаимно-однозначно h на себя, причем

$$[Ux, Uy] = [x, y], \qquad (9)$$

а потому

$$U^0U = UU^0 = I. \qquad (10)$$

Из (10) следует, что $U^{-1} = U^0$. Легко видеть, что оператор U^0 замкнут по норме $\|x\|$, а потому по теореме Банаха ограничен по этой норме вместе с операторами U^{-1} и U.

Лемма 2. *Если $A \in R$ и W-эрмитов, то оператор A ограничен и по норме $\|x\|_1$.*

Действительно, из (4)—(6) получим соотношение

$$(x, y)_1 = [Jx, y]_1 = [Jx, y] = (WJx, y),$$

из которого следует, что оператор WJ положителен. Кроме того, $WJ \in R$, а потому (²) WJ — эрмитовый оператор A из R ограничен и по норме $\|x\|_1$. В частности, если $A \in \gamma\infty$, то (²) оператор JA вполне непрерывен и по норме $\|x\|_1$. Так как $A = J(JA)$, то $\|A\|_1 < \infty$.

Следствие 1. *W—унитарный оператор U, действующий в пространстве h, ограничен вместе с обратным по норме $\|x\|_1$.*

Обозначим через $\hat{U}$ расширение по непрерывности оператора U на все $\hat{h}$, а через $\rho(U)(\rho(\hat{U}))$ и $\sigma(U)(\sigma(\hat{U}))$ резольвентное множество и спектр оператора $U(\hat{U})$.

Лемма 3. *Если $\lambda \in \rho(U)$, то $\lambda \in \rho(\hat{U})$.*

Пусть $\lambda \in \rho(U)$. Тогда оператор $R_\lambda = (U - \lambda I)^{-1}$ задан на всем h и ограничен по норме $\|x\|$. В силу леммы 2 R_λ ограничен и по норме $\|x\|_1$.

Обозначим через $\hat{R}_\lambda$ расширение по непрерывности оператора R_λ на все $\hat{h}$. Поскольку $R_\lambda(U - \lambda I) = I$, то $\hat{R}_\lambda = (\hat{U} - \lambda\hat{I})^{-1}$.

Следствие 2. *Если $\lambda \in \sigma(\hat{U})$, то $\lambda \in \sigma(U)$.*

Если точки ξ и $\bar{\xi}$ комплексной плоскости не являются собственными значениями W — с. с. оператора A, то существует преобразование Кэли этого оператора

$$U = (A - \bar{\xi}I)(A - \xi I)^{-1}. \qquad (11)$$

Непосредственно проверяется, что U есть W — изометрический оператор в h.

Пусть λ и μ различные собственные значения W — с. с. оператора A, лежащие в верхней или нижней полуплоскости, а x_0 и y_0 соответствующие им собственные векторы A.

Тогда

$$[x_0, y_0] = \lambda^{-1}[Ax_0, y_0] = \lambda^{-1}[x_0, Ay_0] = \lambda^{-1}[x_0, \mu y_0] = \lambda^{-1}\bar{\mu}[x_0, y_0].$$

Поскольку $\lambda^{-1}\bar{\mu} \neq 1$, то $[x_0, y_0] = 0$. Имеют место

Лемма 4. *Остаточный спектр $\sigma_r(A)$ W—с. с. оператора A, действующего в h_k, пуст.*

Лемма 5. *W—с. с. оператор A, действующий в h_k, допускает расширение до J—самосопряженного оператора $\hat{A}$, действующего в Π_k.*

Из леммы 4 вытекает

Следствие 3. *Дискретные спектры $\sigma_p(\hat{A})$ и $\sigma_p(A)$ операторов $\hat{A}$ и A, действующих соответственно Π_k и h_k, совпадают.*

Легко доказывается

Лемма 6. *Дискретные спектры $\sigma_p(\hat{U})$ и $\sigma_p(U)$ операторов $\hat{U}$ и U, действующих соответственно в Π_k и h_k, совпадают.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\hat{A}(\hat{U})$ расширение оператора $A\ (U)$ до J — самосопряженного (J — унитарного) оператора, действующего в Π_k. По теореме Л. С. Понтрягина (1) $\sigma_p(\hat{A}) \neq \varnothing$ $(\sigma_p(\hat{U}) \neq \varnothing)$, а потому $\sigma_p(A) \neq \varnothing$ $(\sigma_p(U) \neq \varnothing)$ и, следовательно, оператор $A(U)$ имеет по крайней мере один собственный вектор $\{0\} \neq x_0 \in h_k$.

На основе доказанных лемм легко получаются

Теорема 2. *Если J—самосопряженный (J—унитарный) оператор $\hat{A}(\hat{U})$, действующий в Π_k, обладает k-мерным J—положительным инвариантным подпространством L_k, то W—с. с. (W—унитарный) оператор $A(U)$ имеет по крайней мере одно k-мерное W—положительное инвариантное подпространство из h_k.*

Теорема 3. *Если весь спектр $\sigma(\hat{A}/L_k)$ $(\sigma(\hat{U}/L_k))$ сужения оператора $\hat{A}(\hat{U})$ на инвариантное относительно $\hat{A}(\hat{U})$ k-мерное J—нейтральное подпространство L_k лежит вне вещественной оси, то L_k является W—нейтральным k-мерным инвариантным относительно $A(U)$ подпространством из h_k.*

Пусть $P_\mu(\lambda)$ минимальный характеристический многочлен оператора $\hat{A}(\hat{U})$ на инвариантном k-мерном j — неотрицательном подпространстве. Тогда (3)

$$[P_\mu^2(\hat{A})x,\ x] \leqslant 0,\ x \in D(\check{A}^m),\ ([P_\mu^2(\hat{U})x,\ x] \leqslant 0,\ x \in \Pi_k), \tag{12}$$

где m — степень $P_\mu(\lambda)$.

Исходя из (12) и формулы (11) доказывается

Теорема 4. *Спектр $\sigma(U)$ W—унитарного оператора, действующего в h_k, симметричен относительно единичной окружности и может иметь вне или внутри ее не более k собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Теорема 5. *Спектр $\sigma(A)$ W—с. с. оператора A, действующего в h_k, симметричен относительно вещественной оси и может иметь не более $2k$ невещественных собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Приведем одно приложение.

Рассмотрим в h уравнение

$$W\dot{x} = Hx,\ -\infty < t < \infty. \tag{13}$$

где H — самосопряженный, а W — обратимый самосопряженный операторы в h, причем W залает в h индефинитную метрику конечного ранга.

Следует заметить, что уравнение вида (13) с ограниченными самосопряженными операторами W, W^{-1} и H впервые исследовал еще в начале 40-х годов С. Л. Соболев в связи с динамическими задачами устойчивости волчка, наполненного вязкой жидкостью ([4]). Под решением $x(t)$ уравнения (13) подразумевается решение в обычном смысле.

Оператор $A = W^{-1}H$ является W — с. с. в h_k и на основе изложенного выше получаются

Теорема 6. *Оператор* $A_1 = iW^{-1}H$ *порождает сильно непрерывную группу* W*—унитарных операторов* $U(t) = e^{A_1 t}$, $-\infty < t < \infty$.

Теорема 7. *Для любого* x_0 *из* h *уравнение* (13) *имеет единственное решение* $x(t) = U(t)x_0$, $-\infty < t < \infty$, $x(0) = x_0$.

Центральный экономико-математический
институт

Ն. Ա. ԼԱՐԻՈՆՈՎ

$\Pi_\varkappa$ ռեգուլյար ինդեֆինիտ մետրիկայով տարածություններում գործող գծային օպերատորների մասին

Աշխատանքում հետազոտվում են ինդեֆինիտ սկալյար արտադրյալի $[x,y]=(Wx,y)$ *նկատմամբ ինքնահամալուծ և ունիտար օպերատորներ.*

W*-օպերատորը ենթադրվում է սահմանափակ ինքնահամալուծ և հակադարձելի։*

Ապացուցվում է, որ եթե W *օպերատորը* h *տարածության մեջ տալիս է վերջավոր ռանգի ինդեֆինիտ մետրիկա, ապա ցանկացած* W*- ինքնահամալուծ կամ* W*- ունիտար օպերատորներ ունեն ոչ տրիվիալ սեփական վեկտորներ։*

Բերվում է h *տարածության մեջ մի հավասարման լուծելիության վերաբերյալ կիրառություն։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. С. Понтрягин*, Известия АН СССР, сер. математ., 8, 243—280 (1944). [2] *М. Г. Крейн*, Сборник института матем. АН УССР, 9, 104—129 (1947). [3] *И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн*. Труды Москов. матем. об-ва 1, 5 (1956); 367—432 11, 8 (1959), 413—496. [4] *С. Л. Соболев*, ПМТФ, 3, 1960.