ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ТОМ 61 № 1 2026

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал ``Известия НАН Армении, Математика'' публикует оригинальные статьи на русском и английском языках, в следующих основных направлениях: вещественный и комплексный анализ, приближения, краевые задачи, интегральная и стохастическая геометрия, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и статистика, интегральные уравнения, алгебра.
2. К статье следует приложить индекс MSC (Mathematics Subject Classification), резюме (до 15 строк), а также список ключевых слов.
3. На отдельном листе прилагаются сведения об авторах: полное название научного учреждения, почтовый адрес и адрес электронной почты.
4. Одновременно с распечатанным экземпляром статьи в редакцию желательно предоставлять PDF файл по электронной почте: sart@ysu.am.
5. При подготовке статьи в системе TEX (Plain TEX, LATEX, AMS-TEX) следует использовать шрифты размера 12pt. Объем статьи не должен превышать 20 страниц формата A4.
6. Нумеруемые формулы выделять в отдельную строку, а номер формулы ставить у левого края строки, желательно использовать двойную нумерацию по параграфам. Нумеруются только те формулы, на которые имеются ссылки.
7. Графические материалы представляются отдельными файлами EPS, JPG.
8. Пронумерованный в порядке цитирования список литературы помещается в конце статьи.
   - Ссылка на книгу должна содержать: инициалы и фамилии авторов, полное название книги, издательство, место и год издания.
   - Ссылка на журнальную статью должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, журнал, том, номер, страницы, год издания.
   - Ссылка на статью в книге (сборнике тезисов, трудов и т.п.) должна содержать инициалы и фамилии авторов, полное название статьи, название книги, издательство, страницы , место и год издания.
9. Адрес для переписки: Редакция журнала ``Известия НАН Армении, Математика'', пр. Маршала Баграмяна, 24-Б, 0019, Ереван, Армения. E-mail: sart@ysu.am, URL: http://www.maik.ru
10. Переводы статей на английский язык публикуются в журнале ``Journal of Contemporary Mathematical Analysis''. URL: http://www.springer.com.

****

Заказ N1425. Тираж 150. Подписано к печати 03.02.26.
Печ. л. 4. Бумага офсетная. Цена договорная.
Типография НАН РА. 0019, Ереван, пр. Баграмяна 24

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 3 – 23.

О МАКСИМАЛЬНЫХ КРИВЫХ n-КОРРЕКТНЫХ МНОЖЕСТВ

А. А. АКОПЯН, Г. К. ВАРДАНЯН, Н. К. ВАРДАНЯН

Ереванский государственный университет[1]
Институт математики НАН РА
E-mails: *hakop@ysu.am; gagik.vardanyan2000@gmail.com; vardanyan.navasard@gmail.com*

Аннотация. Предположим, что $\mathcal{X}$ — n-корректное множество узлов на плоскости, то есть допускающее корректную интерполяцию многочленами двух переменных суммарной степени не выше n. Тогда алгебраическая кривая q степени $k \leq n$ может проходить не более чем через $d(n,k) := \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-k}{2}$ узлов множества $\mathcal{X}$. Кривая q степени $k \leq n$ называется максимальной, если она проходит ровно через $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$. В частности, максимальная прямая — это прямая, проходящая через $d(n,1) = n+1$ узел множества $\mathcal{X}$. Максимальные кривые являются важным инструментом для изучения n-корректных множеств. Мы приводим новые свойства максимальных кривых, а также обобщения известных свойств.

MSC2020 number: 41A05; 41A63; 14H50.

Ключевые слова: двумерная интерполяция; n-корректное множество; GC_n-множество; алгебраическая кривая; максимальная кривая; максимальная прямая.

1. Введение

Обозначим пространство двумерных многочленов через Π. Пространство двумерных многочленов суммарной степени не выше n обозначим через Π_n. Имеем

$$N_n = \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Для удобства положим

$$N_n = 0, \quad \text{если } n < 0. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)\}$ — множество из s различных узлов на плоскости.

[1]Работа Г. Варданяна была поддержана Комитетом высшего образования и науки Республики Армения (проект 21AG-1A045). Работа Н. Варданяна поддержана базовым финансированием ЕГУ.

Задача нахождения многочлена $p \in \Pi_n$, удовлетворяющего условиям

$$p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.2}$$

для данных $\bar{c} := \{c_1, \ldots, c_s\}$, называется *задачей интерполяции.*

Определение 1.1. *Множество узлов $\mathcal{X}_s$ называется* n-разрешимым, *если для любых данных $\bar{c}$ существует многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям* (1.2).

Определение 1.2. *Множество узлов $\mathcal{X}_s$ называется* n-корректным, *если для любых данных $\bar{c}$ существует* единственный *многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям* (1.2).

Условия (1.2) дают систему из s линейных уравнений с N неизвестными, которыми являются коэффициенты многочлена p. n-корректность означает, что линейная система имеет единственное решение при любых значениях правой части $\bar{c}$. Таким образом, необходимым условием корректности является равенство $s = N$.

Поэтому n-корректность имеет смысл рассматривать только для множеств узлов $\mathcal{X}_N$. В этом случае справедливо следующее

Предложение 1.1. *n-корректность множества $\mathcal{X} := \mathcal{X}_N$ эквивалентна каждому из следующих условий:*

(i) *Множество $\mathcal{X}$ является n-разрешимым.*
(ii) $p \in \Pi_n,\ p|_{\mathcal{X}} = 0 \implies p = 0$.

Здесь $p|_{\mathcal{X}}$ обозначает ограничение многочлена p на множество $\mathcal{X}$.

Определение 1.3. *Многочлен $p \in \Pi_n$ называется* n-фундаментальным многочленом *для точки $A := (x_k, y_k) \in \mathcal{X}$, если $p|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0$ и $p(A) = 1$.*

Указанный фундаментальный многочлен мы обозначаем $p_k^\star = p_A^\star = p_{A,\mathcal{X}}^\star$. Отметим, что иногда n-фундаментальным называют многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям $p|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0$ и $p(A) \neq 0$, поскольку он равен ненулевому постоянному множителю, умноженному на $p_A^\star$.

Определение 1.4. *Множество узлов $\mathcal{X}$ называется* n-независимым, *если для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существует n-фундаментальный многочлен $p_{A,\mathcal{X}}^\star$. В противном случае множество $\mathcal{X}$ называется* n-зависимым.

Очевидно, фундаментальные многочлены линейно независимы. Поэтому необходимым условием n-независимости множества $\mathcal{X}$ является: $\#\mathcal{X} \le N$. Если множество узлов $\mathcal{X}_s$ является n-независимым, то следующая формула Лагранжа даёт многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям (1.2):

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{s} c_i p_i^\star(x,y). \tag{1.3}$$

Это влечёт

Предложение 1.2. *Множество узлов $\mathcal{X}$ является n-независимым тогда и только тогда, когда оно является n-разрешимым.*

В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 1.3 ([1], лемма 2.2)**.** *Любое n-независимое множество узлов $\mathcal{X}_s$ мощности $s < N$ можно дополнить до n-корректного множества $\mathcal{X}_N$.*

Плоская алгебраическая кривая степени n, $n \ge 1$, — это множество нулей некоторого ненулевого двумерного многочлена степени n. Для упрощения обозначений мы будем использовать одну и ту же букву, например p, для обозначения как самого многочлена p, так и кривой, задаваемой уравнением $p(x,y) = 0$. В частности, через ℓ мы обозначаем линейный многочлен из Π_1 и прямую, определяемую уравнением $\ell(x,y) = 0$.

Отметим, что в выражениях вида $\mathcal{X} \setminus p$, или $\mathcal{X} \cap p$, под многочленом $p \in \Pi_n$ мы понимаем его множество нулей.

Говорим, что узел A n-корректного множества $\mathcal{X}$ использует прямую ℓ, если

$$p_{A,\mathcal{X}}^\star = \ell r, \text{ где } r \in \Pi_{n-1}.$$

Рассмотрим теперь особый тип n-корректных множеств, удовлетворяющих так называемому свойству геометрической характеристики (GC) (см. [2],[3]), введённому Чангом и Яо:

Определение 1.5 ([2])**.** *n-корректное множество $\mathcal{X}$ называется GC_n-*множеством*, если n-фундаментальный многочлен каждого узла $A \in \mathcal{X}$ является произведением линейных множителей.*

В n-корректных множествах n-фундаментальный многочлен, как и любой интерполяционный многочлен, единствен. Поэтому сразу получаем, что в приведённом определении n-фундаментальный многочлен является произведением ровно n линейных множителей.

Таким образом, каждый узел GC_n-множества использует ровно n прямых.

Определение 1.6. *Пусть $\mathcal{X}$ — множество узлов. Говорим, что прямая ℓ является* k-узловой прямой*, если она проходит ровно через k узлов множества $\mathcal{X}$.*

Следующее предложение хорошо известно (см., например, [4] Предложение 1.3):

Предложение 1.4. *Если многочлен $p \in \Pi_n$ обращается в нуль в $n+1$ точке прямой ℓ, то $p|_\ell = 0$ и $p = \ell q$, где $q \in \Pi_{n-1}$.*

Поэтому не более $n+1$ узлов n-независимого множества могут быть коллинеарны. $(n+1)$-узловая прямая ℓ называется *максимальной прямой* ([5]).

Обозначим множество максимальных прямых n-корректного множества $\mathcal{X}$ через $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Приведём некоторые основные свойства максимальных прямых.

Предложение 1.5. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Тогда справедливо:*

(i) *Любые две максимальные прямые пересекаются в узле множества $\mathcal{X}$.*
(ii) *Любые три максимальные прямые не проходят через одну точку.*
(iii) $\#\mathcal{M}(\mathcal{X}) \le n+2$.

Далее приведём гипотезу Гаски–Маэсту (кратко GM-гипотезу):

Гипотеза([6], Разд.5) Для любого GC_n-множества существует хотя бы одна максимальная прямая.
GM-гипотеза очевидна для $n=2$. До настоящего времени она подтверждена для степеней $n = 3, 4, 5$ (см. [6], [7], [8] соответственно).

Относительно обобщения GM-гипотезы на максимальные кривые см. в [9].

Далее мы будем использовать следующий результат Карнисера и Гаски, касающийся GM-гипотезы:

Теорема 1.1 ([10], Теорема 4.1)**.** *Если гипотеза Гаски–Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то любое GC_n-множество обладает по крайней мере тремя максимальными прямыми.*

Следствие 1.1. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество. Если гипотеза Гаски–Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то каждый узел множества $\mathcal{X}$ использует максимальную прямую.*

Действительно, в силу теоремы 1.1 существуют три максимальные прямые, которые, согласно предложению 1.5, (ii), не проходят через одну точку. Поэтому для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существует максимальная прямая, не проходящая через него. Таким образом, в силу предложения 1.4, узел A использует эту прямую.

Определение 1.7. *Для данного n-корректного множества $\mathcal{X}$ говорим, что узел $A \in \mathcal{X}$ использует алгебраическую кривую q степени $k \le n$, если q делит фундаментальный многочлен:*

$$p^{\star}_{A,\mathcal{X}} = qr, \ \text{где } r \in \Pi_{n-k}.$$

Положим для $n, k \ge 0$,

$$d(n,k) := N_n - N_{n-k}. \tag{1.4}$$

Заметим, что при $0 \le k \le n+2$ имеем:

$$d(n,k) = (n-k+2) + (n-k+3) + \cdots + (n+1) \ \left[= \frac{k(2n+3-k)}{2}\right]. \tag{1.5}$$

А при $k \ge n+1$, в силу соотношения (1.1), имеем $d(n,k) = N_n$. Заметим теперь, что если $0 \le k \le \min(m,n)$, то

$$d(n,m) - d(n,k) = d(n-k, m-k). \tag{1.6}$$

Действительно,

$$d(n,m) - d(n,k) = N_n - N_{n-m} - (N_n - N_{n-k}) = N_{n-k} - N_{n-m} = d(n-k, m-k).$$

Далее, если $m \le n$ и $0 \le k \le n-m+2$, то

$$d(n,m) - mk = d(n-k, m). \tag{1.7}$$

Действительно,

$$d(n,m) - mk = (n-m+2) + (n-m+3) + \cdots + (n+1) - mk$$

$$= (n-m-k+2) + (n-m-k+3) + \cdots + (n-k+1) = d(n-k, m-k).$$

Следующее предложение является обобщением предложения 1.4:

Предложение 1.6 ([11], Предложение 3.1)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество и q — алгебраическая кривая степени $k \le n$ без кратных компонент. Тогда:*

(i) *Любое подмножество на q, содержащее более $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, является n-зависимым.*

(ii) *Любое подмножество на q, содержащее ровно $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, является n-независимым тогда и только тогда, когда*

$$p \in \Pi_n \ \text{ и } \ p|_{\mathcal{X}} = 0 \implies p = qr, \ \text{ где } r \in \Pi_{n-k}.$$

Для прямых имеем $d(n,1) = n+1$, и любые $n+1$ точек на прямой n-независимы.

Для коник (алгебраических кривых степени 2) имеем $d(n,2) = 2n+1$. Хорошо известно, что множество $\mathcal{X}$ из $\leq 2n+1$ точек является n-независимым тогда и только тогда, когда в нём нет $n+2$ коллинеарных точек (см. [12] для случая кратностей). Если $\mathcal{X}$ лежит на неприводимой конике, то на одной прямой может лежать не более 2 точек множества $\mathcal{X}$. Таким образом, любое множество из $\leq 2n+1$ точек, лежащих на неприводимой конике, является n-независимым.

Для кубических кривых (степени 3) и кривых более высоких степеней ситуация сложнее. В частности, не любое множество из $d(n,3) = 3n$ узлов, лежащих на кубике, является n-независимым (см. [13]).

Далее нам понадобится следующее

Предложение 1.7 ([1], Предложение 3.5). *Пусть q — алгебраическая кривая степени $k \leq n$ без кратных компонент, а $\mathcal{X}_s \subset q$ — n-независимое множество мощности s, $s < d(n,k)$. Тогда $\mathcal{X}_s$ можно дополнить до максимального n-независимого множества $\mathcal{X}_d \subset q$ мощности $d = d(n,k)$.*

2. Максимальные кривые

Предложение 1.6 подразумевает, что на любой кривой q степени $k \leq n$ лежит не более $d(n,k)$ n-независимых узлов. Это мотивирует следующее

Определение 2.1 ([11], Определение 3.1). *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Кривая f степени $k \leq n$, проходящая через $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, называется* максимальной кривой.

Поскольку $d(n,n) = N-1$, каждый фундаментальный многочлен множества $\mathcal{X}$ является максимальной кривой степени n.
Отметим, что очевидно кривая f из определения 2.1 не имеет кратных компонент.

Следующее предложение даёт характеристику максимальных кривых:

Предложение 2.1 ([11], Предложение 3.3). *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Тогда кривая $f \in \Pi$ степени $k \leq n$ является максимальной кривой для*

$\mathcal{X}$ тогда и только тогда, когда она используется каждым узлом множества $\mathcal{X} \setminus f$.

Отметим, что это, в силу формулы Лагранжа (1.3), следует непосредственно из предложения 1.6.

Предложение 2.1 и последующее следствие 2.1, принадлежащие Л. Рафаэляну [11], раскрывают основное значение максимальных кривых в теории двумерной полиномиальной интерполяции.

Следствие 2.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Тогда: $f \in \Pi_k$ является максимальной кривой $\iff$ $\mathcal{X} \setminus f$ является $(n-k)$-корректным множеством.*

Для полноты приведём

Доказательство. ($\Leftarrow$) Обозначим $\mathcal{B} := \mathcal{X} \setminus f$. Имеем

$$N_{n-k} = \#\mathcal{B} = N_n - \#(\mathcal{X} \cap f). \tag{2.1}$$

Отсюда получаем, что $\#(\mathcal{X} \cap f) = N_n - N_{n-k} = d(n,k)$, т. е. f — максимальная кривая степени k.

($\Rightarrow$) В силу предложения 2.1 для любого $A \in \mathcal{X} \setminus f$ имеем

$$p^\star_{A,\mathcal{X}} = q_A f, \text{ где } q \in \Pi_{n-k}.$$

Это подразумевает, что $q_A = p^\star_{A,\mathcal{B}}$. С другой стороны, $\#\mathcal{B} = N - d(n,k) = N_{n-k}$. Поэтому, в силу предложения 1.1(i), $\mathcal{B}$ является $(n-k)$-корректным. □

Следствие 2.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество, f и fh — максимальные кривые, где $\deg f = k$ и $\deg h = m$. Тогда кривая h является максимальной кривой для $(n-k)$-корректного множества $\mathcal{X} \setminus f$.*

Доказательство. Для любого $A \in \mathcal{X} \setminus (fh)$ имеем

$$p^\star_{A,\mathcal{X}} = fhr_A, \tag{2.2}$$

где $r_A \in \Pi_{n-m-k}$. Обозначим $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus f$. Тогда из (2.2) сразу получаем, что

$$p^\star_{A,\mathcal{Y}} = hr_A \ \forall A \in \mathcal{Y} \setminus h.$$

Это, в силу предложения 2.1, завершает доказательство. □

Следствие 2.3. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество, f_1 и f_2 — максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2,$ где $k_1 + k_2 \le n$. Тогда:*

(i) *Кривая* $f_1 f_2$ *является максимальной кривой степени* $k_1 + k_2$.

(ii) *Кривая* f_2 *является максимальной кривой для* $(n - k_1)$*-корректного множества* $\mathcal{X} \setminus f_1$.

Доказательство. Сначала отметим, что $\deg f_2 = k_2 \leq n - k_1$. Тогда любой узел $A \in \mathcal{X} \setminus (f_1 \cup f_2)$ использует обе кривые f_1 и f_2. Поскольку эти кривые не имеют общих компонент, получаем

$$p^{\star}_{A,\mathcal{X}} = f_1 f_2 r, \text{ где } r \in \Pi_{n-k_1-k_2}. \tag{2.3}$$

Это, в силу предложения 2.1, подразумевает (i).

Теперь (ii) сразу следует из предложения 2.2. □

Отметим, что следствие 2.3 (ii) было доказано в ([11],Предл.3.4).

Замечание 2.1. *В силу соотношения* (2.3) *сразу получаем, что если* f_1 *и* f_2 *— максимальные кривые без общих компонент и* $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2,$ *где* $k_1 + k_2 \geq n + 1,$ *то* $\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2$.

3. Пересечение двух максимальных кривых

Обозначим через $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ множество точек пересечения кривых f_1 и f_2. Обозначим также $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) := \mathcal{I}(f_1, f_2) \cap \mathcal{X}$.

Предложение 3.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть* $\mathcal{X}$ *—* n*-корректное множество,* f_1 *и* f_2 *— максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что* $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2,$ *где*

$$k_1 + k_2 \leq n. \tag{3.1}$$

Тогда кривые f_1 *и* f_2 *пересекаются ровно в* $k_1 k_2$ *различных точках, которые все являются узлами множества* $\mathcal{X}$:

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = k_1 k_2.$$

Доказательство. В силу следствия 2.3(i) и соотношений (1.6), (1.7) имеем $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{f_1 f_2 \cap \mathcal{X}\} = d(n, k_1) + d(n, k_2) - d(n, k_1 + k_2) = d(n, k_1) - d(n - k_2, k_1) = k_1 k_2$. □

Обозначим следующую треугольную решётку размерности n через

$$T_n := T_n^{i_0, j_0} = \{(i + i_0, j + j_0) : i, j \geq 0,\ i + j \leq n\},$$

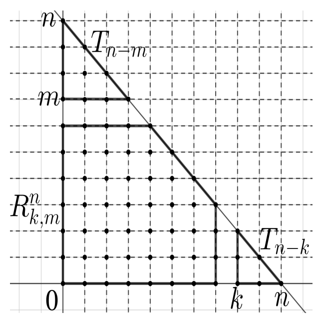

Рис. 1. Множество $R^n_{k,m}$ при $k+m \geq n+3$.

где $i_0, j_0 \geq 0$. Отметим, что $N_n = \#T_n$. Обозначим также следующую прямоугольную решётку размерности $k \times m$ через

$$R_{k,m} := \{(i,j) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Теперь положим (см. рис. 1)

$$R^n_{k,m} := R_{k,m} \cap T^{0,0}_n = \{(i,j) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq m-1, i+j \leq n\}.$$

Тогда обозначим

$$H^n_{k,m} := \#R^n_{k,m}.$$

Отметим, что если $k+m \leq n+2$, то $R_{k,m} \subset T^{0,0}_n$ (см. рис. 2) и, следовательно,

$$R^n_{k,m} = R_{k,m}.$$

Поэтому получаем

$$H^n_{k,m} = km \text{ при } k+m \leq n+2. \tag{3.2}$$

Далее проверим, что

$$H^n_{k,m} = N_n - N_{n-k} - N_{n-m} \text{ при } k+m \geq n+1. \tag{3.3}$$

Действительно, это сразу следует из следующего разбиения $T^{0,0}_n$ на непересекающиеся части (см. рис. 1):

$$T^{0,0}_n = H^n_{k,m} \cup T^{k,0}_{n-k} \cup T^{0,m}_{n-m}.$$

Тогда рассмотрим простое соотношение:

$$(k-1, m-1) \notin R^n_{k,m} \iff k+m \geq n+3.$$

Это подразумевает, что

$$H^n_{k,m} \leq km-1 \iff k+m \geq n+3. \tag{3.4}$$

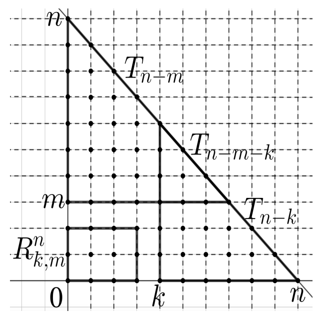

Рис. 2. Множество $R^n_{k,m}$ при $k + m \leq n + 2$.

Отметим, что в случае $k + m \leq n$ имеет место соотношение:

$$H^n_{k,m} = N_n - N_{n-k} - N_{n-m} + N_{n-k-m}. \tag{3.5}$$

Действительно, оно следует из равенства (см. рис. 2)

$$\#H^n_{k,m} = \#T^{0,0}_n - \#T^{k,0}_{n-k} - \#T^{0,m}_{n-m} + \#T^{k,m}_{n-k-m}.$$

Отметим, что соотношение (3.5) выполняется всегда. В частности, соотношение (3.3) — его частный случай, поскольку $N_s = 0$, если $s < 0$.

Теперь предположим, что f_1 и f_2 — алгебраические кривые степеней k_1 и k_2 соответственно, пересекающиеся ровно в k_1k_2 различных точках: $\#\mathcal{I}(f_1, f_2) = k_1k_2$. Согласно теореме Кэли–Бахараха, мощность максимальных n-независимых подмножеств $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ равна $H^n_{k_1,k_2}$. Эта величина называется *функцией Гильберта множества* $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ *для степени* n.

Таким образом, указанные кривые f_1 и f_2 могут иметь внутри n-корректного множества $\mathcal{X}$ не более $H^n_{k_1,k_2}$ точек пересечения.

Далее предположим, что $k_1 + k_2 \geq n + 3$. Тогда, в силу (3.4), никакие кривые f_1 и f_2 степеней k_1 и k_2 соответственно не могут иметь k_1k_2 точек пересечения внутри n-корректного множества $\mathcal{X}$.

Следующее предложение, обобщающее предложение 3.1, утверждает, что для максимальных кривых имеет место указанный экстремальный случай.

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathcal{X}$ — *n-корректное множество,* f_1 *и* f_2 — *максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что* $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2.$ *Тогда кривые* f_1 *и* f_2 *пересекаются ровно в* $H^n_{k_1,k_2}$ *узлах множества* $\mathcal{X}$*:*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = H^n_{k_1,k_2}.$$

Доказательство. Если $k_1 + k_2 \leq n$, то, в силу (3.2), утверждение следует из предложения 3.1.

Теперь предположим, что $k_1 + k_2 \geq n + 1$. Тогда, в силу замечания 2.1, имеем

$$\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2.$$

Это подразумевает, что

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{\mathcal{X}\}$$

$$= d(n, k_1) + d(n, k_2) - N = N - (N - d(n, k_1)) - (N - d(n, k_2))$$

$$= N - N_{n-k_1} - N_{n-k_2} = H^n_{k_1,k_2}.$$

Последнее равенство следует из (3.3). □

Замечание 3.1. *Отметим, что, в силу предложения 3.2 и соотношения* (3.2), *получаем, что предложение 3.1 выполняется при более слабом, чем* (3.1), *ограничении $k_1 + k_2 \leq n + 2$ (см.* [11], *Предложение 3.4). Также отметим, что, как мы упоминали ранее, предложение 3.1 не выполняется, если $k_1 + k_2 \geq n + 3$.*

Замечание 3.2. *Отметим, что $\mathcal{X}_0 := T_n^{0,0}$ — n-корректное множество. Рассмотрим кривые $f(x, y) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ и $g(x, y) = y(y-1)\cdots(y-m+1)$, которые являются максимальными для $\mathcal{X}_0$ степеней k и m соответственно. Тогда имеем (см. случаи рис. 1 и 2)*

$$f \cap g \cap \mathcal{X}_0 = R^n_{k,m}.$$

Ниже рассматриваем пересечение двух максимальных кривых, имеющих общую компоненту. Следующее предложение утверждает, в частности, что наибольший общий делитель таких максимальных кривых сам является максимальной кривой.

Предложение 3.3. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество, $f_1 = hg_1$ и $f_2 = hg_2$ — любые максимальные кривые, наибольший общий делитель которых равен h. Предположим, что $\deg h = m$ и $\deg g_i = s_i$, $i = 1, 2$, где*

$$s := s_1 + s_2 + m \leq n. \tag{3.6}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Кривая $g_1 g_2 h$ является максимальной кривой степени s.*
(ii) *Кривая h является максимальной кривой степени m.*

(iii) *Кривые* g_1 *и* g_2 *являются максимальными кривыми степеней* s_1 *и* s_2 *соответственно для* $(n-m)$*-корректного множества* $\mathcal{X}\setminus h$.

(iv) $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1,g_2)=s_1s_2$ *и* $h\cap g_1\cap g_2\cap\mathcal{X}=\emptyset$.

(v) *Кривые* f_1 *и* f_2 *пересекаются ровно в* $d(n,m)+s_1s_2$ *узлах множества* $\mathcal{X}$*:*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)=d(n,m)+s_1s_2. \tag{3.7}$$

Доказательство. Предположим, что $A\in\mathcal{X}\setminus g_1g_2h$. Тогда $f_1(A)f_2(A)\neq 0$. Следовательно, оба многочлена f_1 и f_2 делят $P^\star_{A,\mathcal{X}}$. Это сразу подразумевает, что g_1g_2h делит $P^\star_{A,\mathcal{X}}$. Поэтому, в силу предложения 2.1, получаем (i).

Далее имеем

$$\begin{aligned}\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)&=\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(hg_1,hg_2)=\#(\mathcal{X}\cap h)+\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1,g_2)-\#(h\cap g_1\cap g_2\cap\mathcal{X}))\\&\le\#(\mathcal{X}\cap h)+\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1,g_2)\le d(n,m)+\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1,g_2)\le d(n,m)+s_1s_2.\end{aligned}$$

Отметим, что в последнем неравенстве использована теорема Безу.

Теперь заметим, что если в указанных трёх неравенствах достигается равенство, или, другими словами, если выполняется (3.7), то легко заключаем, что $\#(h\cap g_1\cap g_2\cap\mathcal{X})=0$ (первое неравенство), h — максимальная кривая степени m (второе неравенство) и $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1,g_2)=s_1s_2$ (третье неравенство). Таким образом, (iv) и (ii) будут доказаны, если выполняется (3.7).

Более того, применяя следствие 2.2, получим также (iii), поскольку $hg_1=f_1$ и $hg_2=f_2$ — максимальные кривые.
Поэтому достаточно доказать только равенство (3.7), т. е. утверждение (v).

Напомним, что выше было установлено неравенство:

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)\le d(n,m)+s_1s_2.$$

Наконец, предположим от противного, что равенство (3.7) не выполняется. Тогда, в силу указанного неравенства, получаем

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)<d(n,m)+s_1s_2. \tag{3.8}$$

Далее, в силу следствия 2.1, имеем, что $\mathcal{Y}:=\mathcal{X}\setminus f_1$ — $(n-m-s_1)$-корректное множество.

Кривая f_2 — максимальная кривая степени $m+s_2$ и проходит через $d(n,m+s_2)$ узлов множества $\mathcal{X}$. Таким образом, f_2 проходит через $d(n,s_2+m)-\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$. С другой стороны, в силу (3.8), (1.6) и (1.7) имеем

$$d(n,s_2+m)-\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1,f_2)>d(n,m+s_2)-d(n,m)-s_1s_2=d(n-m,s_2)-s_1s_2$$

$$= d(n-m-s_1, s_2).$$

Следовательно, f_2 проходит через более чем $d(n-m-s_1, s_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$.

Далее имеем $h(A) \neq 0 \ \ \forall A \in \mathcal{Y}$. Поэтому, учитывая равенство $f_2 = hg_2$, получаем, что кривая g_2 степени s_2 также проходит через более чем $d(n-m-s_1, s_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$. В силу (3.6) это противоречие.

Таким образом, (v) доказано. $\square$

Теперь приведём обобщение предложения 3.3, в котором ограничение (3.6) снято. Отметим, что в этом случае утверждение (i) доказать нельзя.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество, $f_1 = hg_1$ и $f_2 = hg_2$ — любые максимальные кривые, наибольший общий делитель которых равен h. Предположим, что* $\deg h = m,$ *и* $\deg g_i = s_i, \ i = 1, 2.$ *Тогда кривые f_1 и f_2 пересекаются ровно в*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = d(n, m) + H^{n-m}_{s_1, s_2} \tag{3.9}$$

узлах множества $\mathcal{X}$.

Доказательство. Случай $s_1 + s_2 + m \leq n$ рассмотрен в предложении 3.3. Теперь предположим, что

$$s_1 + s_2 + m \geq n + 1. \tag{3.10}$$

Сначала проверим, что

$$\mathcal{X} \subset g_1 \cup g_2 \cup h = f_1 \cup f_2. \tag{3.11}$$

Действительно, предположим обратное: $A \in \mathcal{X} \setminus g_1 g_2 h$. В доказательстве предложения 3.3 мы показали, что тогда $g_1 g_2 h$ делит $P^{\star}_{A,\mathcal{X}}$, что в силу (3.10) приводит к противоречию.

Теперь, в силу (3.11), (1.6) и (1.4), получаем

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{\mathcal{X}\}$$

$$= d(n, m+s_1) + d(n, m+s_2) - N = d(n,m) + d(n-m, s_1) + d(n, m+s_2) - N$$

$$= d(n,m) + d(n-m, s_1) - N_{n-m-s_2} = d(n,m) + N_{n-m} - N_{n-m-s_1} - N_{n-m-s_2}$$

$$= d(n,m) + H^{n-m}_{s_1, s_2}.$$

В последнем равенстве использовалось соотношение (3.3). $\square$

Замечание 3.3. *Отметим, что, в силу равенства* (3.9) *и соотношения* (3.2), *получаем, что утверждение (v) предложения 3.3 выполняется при более слабом, чем* (3.6), *ограничении:*

$$s_1 + s_2 + m \leq n + 2.$$

Более того, учитывая доказательство предложения 3.3, получаем, что утверждения (ii–iv) предложения 3.3 также верны при том же более слабом ограничении.

4. Пересечение трёх максимальных кривых

Предложение 4.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть* $\mathcal{X}$ — n – *корректное множество и* f_1, f_2 *и* f_3 — *три максимальные кривые, такие что любые две из них не имеют общих компонент. Предположим также, что* $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2, 3,$ *и* $k_1 + k_2 + k_3 \leq n + 2$. *Тогда* $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = \emptyset$.

Доказательство. В силу следствия 2.1 имеем, что $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X} \setminus f_1$ — $(n - k_1)$-корректное множество. Далее, согласно следствию 2.2, имеем, что f_2 и f_3 — максимальные кривые в $\mathcal{Y}_1$, и $k_2 + k_3 \leq n - k_1 + 2$. Тогда, в силу предложения 3.1 и замечания 3.1, имеем $f_2 \cap f_3 \subset \mathcal{Y}_1 = \mathcal{X} \setminus f_1$. Это подразумевает, что $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = \emptyset$.□

В следующих двух предложениях находим $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$ в случае

$$k_1 + k_2 + k_3 > n + 2.$$

Предложение 4.2. *Пусть множество* $\mathcal{X}$ *и кривые* f_1, f_2 *и* f_3 *такие, как в предложении 4.1 и* $k_1 + k_2 + k_3 \geq n + 1$. *Тогда имеем следующие три выражения для* $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$:

(i) $N - d(n, k_1) - d(n, k_2) - d(n, k_3) + H^n_{k_1,k_2} + H^n_{k_2,k_3} + H^n_{k_1,k_3}$,

(ii) $N - N_{n-k_1} - N_{n-k_2} - N_{n-k_3} + N_{n-k_1-k_2} + N_{n-k_2-k_3} + N_{n-k_1-k_3}$,

(iii) $N - d(n - k_1, k_2) - d(n - k_2, k_3) - d(n - k_3, k_1)$.

Доказательство. Сначала проверим, что

$$\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2 \cup f_3. \tag{4.1}$$

Действительно, предположим обратное: $A \in \mathcal{X} \setminus f_1 f_2 f_3$. Тогда $f_1 f_2 f_3$ делит $P^{\star}_{A,\mathcal{X}}$, что в силу условия $k_1 + k_2 + k_3 \geq n + 1$ приводит к противоречию.

Теперь обозначим $\gamma = \#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$. В силу (4.1) имеем

$$N = \#[(f_1 \cup f_2 \cup f_3) \cap \mathcal{X}] = \#(f_1 \cap \mathcal{X}) + \#(f_2 \cap \mathcal{X}) + \#(f_3 \cap \mathcal{X})$$

$$-\#(f_1 \cap f_2 \cap \mathcal{X}) - \#(f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X}) - \#(f_1 \cap f_3 \cap \mathcal{X}) + \gamma$$
$$= d(n,k_1) + d(n,k_2) + d(n,k_3) - H^n_{k_1,k_2} - H^n_{k_2,k_3} - H^n_{k_1,k_3} + \gamma.$$

Это доказывает утверждение (i).

Далее продолжим, используя равенство (3.5):

$$N = d(n,k_1) + d(n,k_2) + d(n,k_3) - 3N + 2N_{n-k_1} + 2N_{n-k_2} + 2N_{n-k_3}$$
$$-N_{n-k_1-k_2} - N_{n-k_2-k_3} - N_{n-k_1-k_3} + \gamma.$$

Далее, в силу определения $d(n,k)$, имеем

$$N = (N - N_{n-k_1}) + (N - N_{n-k_2}) + (N - N_{n-k_3}) - 3N + 2N_{n-k_1} + 2N_{n-k_2} + 2N_{n-k_3}$$
$$-N_{n-k_1-k_2} - N_{n-k_2-k_3} - N_{n-k_1-k_3} + \gamma$$
$$= N_{n-k_1} - N_{n-k_1-k_2} + N_{n-k_2} - N_{n-k_2-k_3} + N_{n-k_3} - N_{n-k_1-k_3} + \gamma$$
$$= d(n-k_1,k_2) + d(n-k_2,k_3) + d(n-k_3,k_1) + \gamma.$$

В последнем равенстве, доказывающем утверждение (iii), снова использовалось определение $d(n,k)$. Отметим, что предыдущее равенство доказывает утверждение (ii). $\square$

Следующее предложение даёт более ясное выражение для $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$. Обозначим $\sigma := k_1 + k_2 + k_3 - (n+2)$.

Предложение 4.3. *Пусть множество $\mathcal{X}$ и кривые f_1, f_2 и f_3 такие, как в предложении 4.1 и $k_1 + k_2 + k_3 \geq n+1$, т. е. $\sigma \geq -1$. Тогда имеем следующие два выражения для $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$:*

(i) $\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1) - N_{k_1+k_2-n-3} - N_{k_2+k_3-n-3} - N_{k_3+k_1-n-3}$,
(ii) $\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)$, *при условии что* $k_i + k_j \leq n+2 \ \forall\ 1 \leq i < j \leq 3$.

Доказательство. Сначала докажем (ii). Из предложения 4.2(iii), в силу (1.5) и условия в (ii), получаем, что

$$\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X}) \tag{4.2}$$
$$= N - \frac{1}{2}k_2(2n - 2k_1 - k_2 + 3) - \frac{1}{2}k_3(2n - 2k_2 - k_3 + 3) - \frac{1}{2}k_1(2n - 2k_3 - k_1 + 3)$$
$$= N - \frac{1}{2}[(k_1 + k_2 + k_3)(2n+3)] - \frac{1}{2}[k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + 2k_1k_2 + 2k_2k_3 + 2k_3k_1]$$
$$= N - \frac{1}{2}[(k_1 + k_2 + k_3)(2n+3)] - \frac{1}{2}[k_1 + k_2 + k_3]^2$$
$$= N - \frac{1}{2}[(k_1 + k_2 + k_3)(2n + 3 - k_1 - k_2 - k_3)]$$
$$= \frac{1}{2}[(n+2)(n+1)] - \frac{1}{2}[(n+2+\sigma)(n+1-\sigma)] = \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1). \tag{4.3}$$

Теперь перейдём к доказательству (i), которое является обобщением (ii). Для этого введём величину $\widetilde{d}(n,k)$ для всех $n,k \geq 0$:

$$\widetilde{d}(n,k) := (n-k+2) + (n-k+3) + \cdots + (n+1) \quad \left[= \frac{k(2n+3-k)}{2}\right]. \tag{4.4}$$

Тогда проверим, что

$$\widetilde{d}(n,k) = d(n,k) - N_{-n+k-3}, \ \forall n,k \geq 0. \tag{4.5}$$

Действительно, если $0 \leq k \leq n+2$, то, в силу (1.5), $\widetilde{d}(n,k) = d(n,k) = d(n,k) - N_{-n+k-3}$. А если $k \geq n+3$, то $\widetilde{d}(n,k) = N_n - N_{-n+k-3} = d(n,k) - N_{-n+k-3}$.

Далее заметим, что доказательство утверждения (ii), точнее преобразования, начинающиеся со строки после (4.2) и заканчивающиеся строкой (4.3), в силу (4.4), показывают, что

$$N - \widetilde{d}(n-k_1,k_2) - \widetilde{d}(n-k_2,k_3) - \widetilde{d}(n-k_3,k_1) = \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1), \tag{4.6}$$

где $0 \leq k_i \leq n, \ i = 1,2,3.$

После подготовительной работы перейдём к доказательству утверждения (i). Используя предложение 4.2(iii) и соотношение (4.5), получаем

$$\begin{aligned}\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X}) &= N - d(n-k_1,k_2) - d(n-k_2,k_3) - d(n-k_3,k_1) \\ &= N - \widetilde{d}(n-k_1,k_2) - \widetilde{d}(n-k_2,k_3) - \widetilde{d}(n-k_3,k_1) \\ &\quad -N_{k_1+k_2-n-3} - N_{k_2+k_3-n-3} - N_{k_3+k_1-n-3}.\end{aligned}$$

Теперь, в силу соотношения (4.6), получаем

$$= \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1) - N_{k_1+k_2-n-3} - N_{k_2+k_3-n-3} - N_{k_3+k_1-n-3}. \qquad \square$$

5. Максимальные кривые в GC_n-множествах

Предложение 5.1. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество и f — максимальная кривая степени $k, \ 1 \leq k \leq n$. Тогда f является произведением k различных прямых. Кроме того, если гипотеза Гаски—Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то по крайней мере одна из указанных k прямых является максимальной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим узел $A \in \mathcal{X} \setminus f$. Согласно Предложению 2.1 имеем

$$p_A^\star = fq, \ \text{где } q \in \Pi_{n-k}.$$

С другой стороны, поскольку $\mathcal{X}$ является GC_n-множеством, то

$$p_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_n, \ \text{где } \ell_i \in \Pi_1. \tag{5.1}$$

Из этих двух равенств сразу следует, что f является произведением k прямых из правой части (5.1), скажем

$$f = \ell_1 \cdots \ell_k. \tag{5.2}$$

Теперь предположим, что гипотеза Гаски—Маэсту верна. Докажем, что по крайней мере одна из прямых в (5.2) является максимальной прямой. Предположим, для противоречия, что ℓ_i не является максимальной прямой $\forall 1 \le i \le k$.

В силу гипотезы GM рассмотрим максимальную прямую α_1 в $\mathcal{X}$. Она не является компонентой f. Поэтому, согласно Предложению 3.1, прямая α_1 пересекает максимальную кривую f ровно в k узлах. Таким образом, она пересекает каждую прямую $\ell_i,\ 1 \le i \le k$, в одном узле.

Теперь, согласно Следствию 2.3, кривая f является максимальной также в GC_{n-1}-множестве $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \setminus \alpha_1$.

Далее рассмотрим максимальную n-узловую прямую α_2 в $\mathcal{X}_1$. Она не является компонентой f. В самом деле, предположим для противоречия, что эта прямая является компонентой f, скажем $\alpha_2 = \ell_1$, тогда очевидно прямая ℓ_1 является $(n+1)$-узловой прямой в $\mathcal{X}$, то есть максимальной прямой в нём. Таким образом, α_2 также пересекает каждую прямую $\ell_i,\ 1 \le i \le k$, в узле множества $\mathcal{X}_1$.

Далее положим $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$, и так далее.

Продолжая этот процесс, получаем максимальные прямые α_i в $\mathcal{X}_i := \mathcal{X} \setminus (\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n-k$, и кривая $f,\ \deg f = k$, является максимальной кривой также в GC_k-множестве $\mathcal{X}_{n-k}$. Поэтому f является фундаментальным многочленом некоторого узла $B \in \mathcal{X}_{n-k}$. Следовательно, по Следствию 1.1 одна из компонент f, скажем ℓ_1, является максимальной прямой в $\mathcal{X}_{n-k}$. Но тогда очевидно прямая ℓ_1 является $(n+1)$-узловой прямой в $\mathcal{X}$, то есть максимальной прямой в нём. $\square$

Далее охарактеризуем максимальные кривые в GC_n-множествах.

Предложение 5.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество. Предположим, что гипотеза Гаски—Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно. Тогда f является максимальной кривой степени $k,\ 1 \le k \le n$, тогда и только тогда, когда*

$$f = \ell_1 \cdots \ell_k, \tag{5.3}$$

где множество $\ell_i \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n+2-i$ узлов множества $\mathcal{X},\ i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. (⇒) Применим индукцию по k. Случай $k = 1$ тривиален. Предположим, что f — максимальная кривая степени $k \geq 2$. Согласно Предложению 5.1 f является произведением k прямых, одна из которых — максимальная прямая. Обозначим последнюю прямую через ℓ_1. Таким образом,

$$f = \ell_1 g, \ g \in \Pi_{k-1}.$$

Теперь, в силу Следствия 2.2, заключаем, что g является максимальной кривой степени $k-1$ в GC_{n-1}-множестве $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \setminus \ell_1$. По индукционному предположению

$$g = \ell_2 \cdots \ell_k,$$

где множество $\ell_i \setminus (\ell_2 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n + 2 - i$ узлов множества $\mathcal{X}_1, \ i = 2, \ldots, k$, то есть множество $\ell_i \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n + 2 - i$ узлов множества $\mathcal{X}$.

(⇐) Теперь предположим, что выполняется (5.3). Докажем, что f — максимальная кривая. В силу Предложения 2.1 достаточно доказать, что каждый узел $A \in \mathcal{X} \setminus f$ использует f. Снова применим индукцию по k. Случай $k = 1$ тривиален. По индукционному предположению $\ell_1 \cdots \ell_{k-1}$ является максимальной кривой, поэтому A её использует: $P_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_{k-1} g, \ g \in \Pi_{n-k+1}$. Далее, множество $\ell_k \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{k-1})$ содержит ровно $n + 2 - k$ узлов множества $\mathcal{X}$. Отметим, что в этих узлах $P_A^\star$ обращается в нуль, в то время как $\ell_1, \ldots \ell_{k-1}$ в нуль не обращаются. Поэтому в этих $n - k + 2$ узлах обращается в нуль многочлен $g \in \Pi_{n-k+1}$. Теперь, применяя Предложение 1.4, получаем, что $g = \ell_k r$, где $r \in \Pi_{n-k}$. Следовательно, $P_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_k r$, то есть A использует f. □

Определение 5.1. *Конечное множество $\mathcal{L}$ прямых называется находящимся в* общем положении*, если*

(i) *нет двух параллельных прямых в $\mathcal{L}$, и*
(ii) *нет трёх прямых в $\mathcal{L}$, пересекающихся в одной точке.*

Пусть множество $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_{n+2})$ прямых находится в общем положении. Тогда множество $\mathcal{X}$ из $\binom{n+2}{2}$ точек пересечения этих прямых называется множеством Чанга—Яо степени n (см. [2], [3]). Отметим, что каждый фиксированный узел принадлежит ровно 2 прямым, а произведение оставшихся n прямых даёт фундаментальный многочлен этого узла. Таким образом, $\mathcal{X}$ является GC_n-множеством. Заметим, что прямые $\ell_i, \ i = 1, \ldots, n+2$, являются максимальными для $\mathcal{X}$. В силу Предложения 1.5(iii) никакая другая прямая не является максимальной для множества $\mathcal{X}$, то есть $\mathcal{L} = \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Следствие 5.1. *Предположим, что $\mathcal{X}$ — множество Чанга—Яо степени n с множеством максимальных прямых $\mathcal{L}$. Предположим также, что f — максимальная кривая степени k. Тогда f является произведением k максимальных прямых из $\mathcal{L}$. Кроме того, если f_1 и f_2 — максимальные кривые степеней k_1 и k_2 соответственно, не имеющие общих компонент, то $k_1 + k_2 \leq n + 2$.*

Действительно, в этом случае все прямые в правой части равенства (5.1) являются максимальными прямыми, следовательно, все прямые в правой части равенства (5.2) также являются максимальными прямыми. В заключение рассмотрим конструкции n-корректных множеств с максимальными кривыми, которые не являются произведениями прямых. Отметим, что в силу Предложений 1.3 и 1.7 любая алгебраическая кривая f степени $k \geq 1$ без кратных компонент является максимальной кривой степени k для некоторого n-корректного множества $\mathcal{X}$, где $n \geq k$. Рассмотрим тогда две произвольные алгебраические кривые без кратных компонент: f и g степеней m и k соответственно, пересекающиеся в mk различных точках:

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}(f, g) = f \cap g, \ \#\mathcal{I} = mk.$$

Ниже для каждого значения $\delta = 0, 1$ мы приводим конструкцию n-корректного множества $\mathcal{X}$, $n = m + k - 2 + \delta$, для которого обе кривые f и g являются максимальными кривыми. С этой целью рассмотрим $(m-2+\delta)$-корректное множество в $f \setminus \mathcal{I}$ и $(k - 2 + \delta)$-корректное множество в $g \setminus \mathcal{I}$, обозначаемые $\mathcal{C}(f)$ и $\mathcal{C}(g)$ соответственно. Это можно сделать с помощью конструкции Берцоляри—Радона n-корректных множеств (см. [8], подраздел 1.3.1), а также используя тот факт, что можно найти прямые, пересекающие f и g соответственно в m и k различных точках (см. [14], Thm.2.2). Для множества узлов

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}(\delta) := \mathcal{I}(f, g) \cup \mathcal{C}(f) \cup \mathcal{C}(g)$$

справедливо следующее предложение (первое утверждение см. в [15], стр.78-84).

Предложение 5.3. *Пусть $\delta = 0$ или 1. Тогда $\mathcal{X} := \mathcal{X}(\delta)$ является n-корректным множеством, где $n = m + k - 2 + \delta$, а f и g — максимальные кривые степеней m и k соответственно.*

Доказательство. Сначала проверим, что $\#\mathcal{X} = \binom{n+2}{2}$. Действительно,

$$\#\mathcal{X} = \#\mathcal{I}(f,g) + \#\mathcal{C}(f) + \#\mathcal{C}(g) = mk + \binom{m+\delta}{2} + \binom{k+\delta}{2} = \binom{m+k+\delta}{2}.$$

Далее проверим, что $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Для этого, в силу предложения 1.1(ii), предположим, что $p \in \Pi_n,\ p|_{\mathcal{X}} = 0$, и докажем, что $p = 0$. Действительно, применяя основную теорему Макса Нётера, получаем $p = Af + Bg$, где $A \in \Pi_{k-2+\delta}$, $B \in \Pi_{m-2+\delta}$. Отсюда сразу следует, что $A|_{\mathcal{C}(g)} = 0$ и $B|_{\mathcal{C}(f)} = 0$. Поскольку множества $\mathcal{C}(f)$ и $\mathcal{C}(g)$ являются соответственно $(m-2+\delta)$- и $(k-2+\delta)$-корректными, получаем, что $A = B = 0$, а значит $p = 0$.

Наконец, имеем $\#(f \cap \mathcal{X}) = \#\mathcal{I} + N_{m-2+\delta} = d(n,m)$, и аналогично $\#(g \cap \mathcal{X}) = \#\mathcal{I} + N_{k-2+\delta} = d(n,k)$. Поэтому f и g являются максимальными кривыми степеней m и k соответственно. □

Abstract. Suppose $\mathcal{X}$ is an n-correct set of nodes in the plane, that is, it admits a unisolvent interpolation with bivariate polynomials of total degree less than or equal to n. Then an algebraic curve q of degree $k \le n$ can pass through at most $d(n,k) := \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-k}{2}$ nodes of $\mathcal{X}$. A curve q of degree $k \le n$ is called maximal if it passes through exactly $d(n,k)$ nodes of $\mathcal{X}$. In particular, a maximal line is a line passing through $d(n,1) = n+1$ nodes of $\mathcal{X}$. Maximal curves are an important tool for the study of n-correct sets. We present new properties of maximal curves, as well as extensions of known properties.

Список литературы

[1] H. Hakopian and S. Toroyan, "On the uniqueness of algebraic curves passing through n-independent nodes", New York J. Math., **22**, 441 – 452 (2016).
[2] K. C. Chung and T. H. Yao, "On lattices admitting unique Lagrange interpolations", SIAM J. Numer. Anal., **14**, 735 – 743 (1977).
[3] H. Hakopian and N. Vardanyan, "On the basic properties of GC_n-sets", Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **29**, 1 – 26 (2020).
[4] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann, "A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$", J. Approx. Theory, **159**, 224 – 242 (2009).
[5] C. de Boor, "Multivariate polynomial interpolation: conjectures concerning GC-sets", Numer. Algorithms, **45**, 113 – 125 (2007).
[6] M. Gasca and J. I. Maeztu, "On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$", Numer. Math., **39**, 1 – 14 (1982).
[7] J. R. Busch, "A note on Lagrange interpolation in $\mathbb{R}^2$", Rev. Un. Mat. Argentina, **36**, 33 – 38 (1990).
[8] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann, "The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$", Numer. Math., **127**, 685 – 713 (2014).
[9] H. Hakopian and L. Rafayelyan, "On a generalization of the Gasca-Maeztu conjecture", New York J. Math., **21**, 351 – 367 (2015).

[10] J. M. Carnicer and M. Gasca, "On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation", In: Lyche, T., Mazure, M.-L., Schumaker, L.L. (eds.) Curve and surface design: Saint Malo 2002, 21 – 30, Nashboro Press, Brentwood (2003).
[11] L. Rafayelyan, "Poised nodes set constructions on algebraic curves", East J.Approx. **17**, 285 – 298 (2011).
[12] H. Hakopian, "On a class of Hermite interpolation problems", Adv. Comput. Math., **12**, 303 – 309 (2000).
[13] H. Hakopian and A. Malinyan, "Characterization of n-independent sets with no more than $3n$ points", Jaén J. Approx., **4**, 119 – 134 (2012).
[14] R. Walker, Algebraic Curves, Princeton, New Jersey (1950).
[15] H. Hakopian, "The multivariate fundamental theorem of Algebra, Bezout's theorem and Nullstellensatz", in: Approximation Theory (D. K. Dimitrov et al., eds.), 73 – 97, Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, (2004).

Поступила 01 сентября 2025

После доработки 26 октября 2025

Принята к публикации 30 октября 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 24 – 27.

БАЗИСЫ РИССА, ПОРОЖДЕННЫЕ СПЕКТОРОМ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

Т. Н. АРУТЮНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *t.harutyunyan@ysu.am*

Аннотация. Мы доказываем, что если $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ есть множество собственных значений самосопряженного оператора Дирака на $(0,\pi)$, то система $\left\{\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$ есть базис Рисса в гильбертовом пространстве $L^2([0,\pi]), C^2)$.

MSC2020 numbers: 34A55; 34B24; 47E05.

Ключевые слова: оператор Дирака; собственные значения; базисы Рисса.

Пусть E есть 2×2 единичная матрица, а

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

известные матрицы Паули. Через $L(p,q,\alpha,\beta)$ мы обозначим краевую задачу

$$ly=\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2 p(x)+\sigma_3 q(x)\right\}y=\lambda y,\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\qquad \lambda\in C, \tag{1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0,\qquad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \tag{2}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta+y_2(\pi)\sin\beta=0,\qquad \beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \tag{3}$$

Известно (см. [1] – [3]), что если $p,q\in L^1_R[0,\pi]$ (т.е. p и q есть действительные, суммируемые на $(0,\pi)$ функции), то задача $L(p,q,\alpha,\beta)$ имеет счетное множество собственных значений $\lambda_n(p,q,\alpha,\beta), n\in Z$, которые действительны, простые и имеют асимптотику

$$\lambda_n=\lambda_n(p,q,\alpha,\beta)=n+\frac{\beta-\alpha}{\pi}+r_n, \tag{4}$$

где $r_n = r_n(p, q, \alpha, \beta) = o(1)$, при $n \to \pm\infty$, равномерно по всем p, q из ограниченных подмножеств $L^1_R[0, \pi]$. Через $L(p, q, \alpha, \beta)$ мы обозначаем также самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l = \sigma_1 \frac{d}{dx} + \sigma_2 p(x) + \sigma_3 q(x)$$

в гильбертовом пространстве двукомпонентных вектор-функций $L^2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ на области определения (см. детали в [3])

$$D = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2, \end{pmatrix}; y_k \in AC[0, \pi],\ (ly)_k \in L^2[0, \pi],\ k = 1, 2 \right\},$$

где y удовлетворяет (2) и (3).

Через $\phi(x, \lambda, \alpha)$ мы обозначаем решение задачи Коши

$$ly = \lambda y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Легко видеть, что собственные значения оператора $L(p, q, \alpha, \beta)$ те же, что и у краевой задачи $L(p, q, \alpha, \beta)$. Собственные значения $L(p, q, \alpha, \beta)$ есть решения уравнения

$$\Phi(\lambda) = \phi_1(\pi, \lambda, \alpha) \cos\beta + \phi_2(\pi, \lambda, \alpha) \sin\beta = 0.$$

Собственные функции есть $\phi_n(x) = \phi_n(x, \lambda_n, \alpha), n \in Z$, которые образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L^2([0, \pi), C^2)$. Через a_n мы обозначаем квадраты L^2 норм этих собственных функций ϕ_n :

$$a_n = a_n(p, q, \alpha, \beta) := \int_0^\pi |\phi_n(x)|^2 dx.$$

Если мы обозначим через $h_n(x) := \frac{1}{\sqrt{a_n}} \phi_n(x)$, тогда мы получим ортонормированный базис в $L^2([0, \pi), C^2)$, т.е. для любого $f \in L^2([0, \pi), C^2)$

$$f(x) = \sum_{k \in Z} (f, h_k) \cdot h_k(x)$$

в смысле, что (см. [3], стр.93, Теорема 4.4)

$$\lim_{\substack{n, m > N \\ N \to \infty}} \|f - \sum_{k=-m}^{n} (f, h_k) h_k\| = 0.$$

Напомним, что если $\{h_k\}_{k \in Z}$ есть ортонормальный базис в гильбертовом пространстве H и A есть ограниченный и обратимый оператор в H, тогда $\{Ah_k\}_{k \in Z}$ образуют базис, который называется базисом Рисса (см. [4], стр. 373). Через

$\phi_0(x,\lambda,\alpha)$ мы будем обозначать решение задачи Коши (1), (5) в случае $p(x) = q(x) = 0$. Легко видеть, что

$$\phi_0(x,\lambda,\alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x+\alpha) \\ -\cos(\lambda x+\alpha) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно посчитать, что $\lambda_n(0,0,0,0) = n$ и что

$$\phi_0(x,n,0) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix}$$

есть собсвенные функции оператора $L(0,0,0,0)$.

И здесь возникает вопрос: Какими свойствами обладает система

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n x \\ -\cos\lambda_n x \end{pmatrix} \right\}_{n\in Z}?$$

Ответ таков:

Теорема. Если $p,q \in L_R^2[0,\pi]$, то система вектор-функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a_n}} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_n x+\alpha) \\ -\cos(\lambda_n x+\alpha) \end{pmatrix} \right\}_{n\in Z}$$

образует базис Рисса в гильбертовом пространстве $L^2([0,\pi), C^2)$.

Доказательство. Известно (см [3], Теорема 2.2, см. также [5] – [7]) что существует оператор преобразования $E+\mathbf{K}$, который переводит решение $\phi_0(x,\lambda,\alpha)$ в решение $\phi(x,\lambda,\alpha)$, т.е.

$$\phi(x,\lambda,\alpha) = \phi_0(x,\lambda,\alpha) + \int_0^x K(x,t)\phi_0(t,\lambda,\alpha)dt = (E+\mathbf{K})\phi_0(x,\lambda,\alpha),$$

где ядро матрицы $K(x,t)$ имеет свойства

$$\int_0^x |K(x,t)|dt \le e^{C(x)} - 1,$$

$(C(x) := \int_0^x |p(t)|dt + \int_0^x |q(t)|dt)$, при $p,q \in L_R^1[0,\pi]$, и

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |K(x,t)|^2 dxdt < \infty,$$

при $p,q \in L_R^2[0,\pi]$ (см. [3], гл. 2). Мы видим, что $E+\mathbf{K}$ есть оператор Вольтерра. Таким образом, если $p,q \in L_R^1[0,\pi]$, то $E+\mathbf{K}$ есть ограниченный и обратимый оператор (см. [8], [9]). С другой стороны, мы имеем

$$\phi_n(x) = \phi(x,\lambda_n,\alpha) = (E+\mathbf{K})\phi_0(x,\lambda_n,\alpha)$$

и

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_n(x) = (E+\mathbf{K})\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n,\alpha).$$

Так как $E+\mathbf{K}$ обратимый и его обратный оператор $(E+\mathbf{K})^{-1}$ также есть оператор Вольтерра, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n,\alpha) = (E+\mathbf{K})^{-1}h_n(x) = Ah_n(x).$$

Таким образом система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n\alpha)\}\right\}_{n\in Z} = \left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}}\begin{pmatrix}\sin(\lambda_n x+\alpha)\\ -\cos(\lambda_n x+\alpha)\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$$

есть базис Рисса в $L^2([0,\pi],C^2)$. Теорема доказана.

Abstract. We prove, that if $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ is the set of eigenvalues of selfadjoint Dirac operator on $(0,\pi)$, then the system $\left\{\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$ is a Riesz bases in Hilbert space $L^2([0,\pi]),C^2)$.

Список литературы

[1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва (1988).

[2] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и Их Приложения", Наука Думка, Киев.

[3] Т. Н. Арутюнян, Ю. Ашрафян, Спектральная Теория Операторов Дирака, Ереван, (2023); см. также https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.02761

[4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Линейных Несамосопряженных Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Наука (1966).

[5] М. Г. Гасымов, В. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, **157**, 967 – 970 (1966).

[6] S. Albeverio, R. Hryniv and Yu. Mykytyuk, "Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potential", Russ. J. Math. Phys. **12**, 406 -423 (2005).

[7] Т. Н. Арутюнян, "Операторы преобразования для канонической системы Дирака", Диф. уравнения, **44**, 1011 – 1021 (2008).

[8] С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, Москва (1950).

[9] В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка", Труды ММО, **1**, 327 – 420 (1952).

Поступила 08 июля 2025

После доработки 20 октября 2025

Принята к публикации 26 октября 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 28 – 50.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОШИБКИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н. БАБАЯН, М. ГИНОВЯН

Российско-Армянский Университет, Ереван, Армения,
Бостонский Университет, Бостон, США
E-mails: *nmbabayan@gmail.com; ginovyan@bu.edu*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача линейного предсказания в среднеквадратическом смысле для класса стационарных обобщённых гауссовских процессов, обладающих спектральными плотностями. Особое внимание уделяется относительной ошибке предсказания при прогнозировании будущего значения процесса на основе конечного прошлого по сравнению с использованием всего прошлого, при условии, что рассматриваемый процесс является недетерминированным и «близким» к белому шуму. Устанавливается необходимое и достаточное условие, при котором относительная ошибка предсказания убывает до нуля с экспоненциальной скоростью. Наш подход основан на теории Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов. Ключевым фактом является то, что относительная ошибка прогнозирования может быть явно представлена с помощью так называемой «параметрической функции», которая служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности.

MSC2020 number: 60G25; 62M20; 60G10; 47B35.

Ключевые слова: стационарный обобщенный гауссовский процесс; спектральная плотность; ошибка прогнозирования; параметрическая функция; экспоненциальная скорость.

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем задачу среднеквадратичного линейного прогнозирования для класса стационарных обобщенных гауссовских процессов второго порядка, обладающих спектральной плотностью. Предполагается, что эти процессы являются среднеквадратично непрерывными, недетерминированными и «близкими» к белому шуму.

1.1. **Модель. Обобщенные стационарные процессы.** С физической точки зрения, понятие обычного стохастического процесса непрерывного времени $Y(t)$,

$t \in \mathbb{R}$, относится к измерению случайных величин в определенные моменты времени, без учета значений в другие моменты. Однако во многих случаях невозможно локализовать измерения в определенный момент времени. Как отмечают Гельфанд и Виленкин (см. [1], стр. 243), каждое фактическое измерение выполняется с помощью устройства, обладающего определенной степенью инерции (памяти). Следовательно, вместо измерения обычного процесса $Y(t)$ в отдельный момент времени устройство регистрирует определенное *«усредненное» значение* $X(\varphi)$:

$$X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) Y(t) dt, \tag{1.1}$$

где $\varphi(t)$ — функция, характеризующая устройство. Более того, небольшие изменения в φ приводят к небольшим изменениям в $X(\varphi)$. Следовательно, мы получаем непрерывный линейный функционал, который приводит к понятию *обобщенного стохастического процесса*.

Пусть $D = D(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых вещественных функций $\varphi(t)$ ($t \in \mathbb{R}$) с конечной поддержкой (то есть функция $\varphi(t)$ исчезает за пределами некоторого замкнутого интервала, называемого поддержкой $\varphi(t)$ и обозначаемого $\operatorname{supp}\{\varphi\}$). Топология в D определяется следующим образом: мы говорим, что последовательность функций $\varphi_n(t) \in D$ сходится к функции $\varphi(t) \in D$ при $n \to \infty$, и записываем $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ если $\operatorname{supp}\{\varphi_n\} \subset [a, b]$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_n^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ при $n \to \infty$, равномерно в $t \in [a, b]$ для всех $k = 0, 1, \ldots$.

Определение 1.1. Обобщенный стационарный процесс второго порядка $\{X(\varphi) = X(\varphi, \omega),\ \varphi \in D\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является случайным линейным функционалом, таким что $E|X(\varphi)|^2 < \infty$ и для среднего функционала $m(\varphi)$ и ковариационного функционала $R(\varphi, \psi)$ выполняются условия стационарности:

$$\begin{aligned} &m(\varphi) := (X(\varphi), 1) = m(\tau_t \varphi), \quad \varphi \in D, \\ &R(\varphi, \psi) := (X(\varphi), X(\psi)) = R(\tau_t \varphi, \tau_t \psi), \quad \varphi, \psi \in D, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где τ_t — оператор сдвига: $[\tau_t \varphi](s) = \varphi(s + t)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(P) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{\xi = \xi(\omega) : E|\xi|^2 < \infty\}$, определенное как

$$(\xi, \eta) = E[\xi \overline{\eta}], \quad \xi, \eta \in L^2(P).$$

Мы предполагаем, что процесс $X(\varphi)$ является среднеквадратично непрерывным, то есть $E|X(\varphi_n) - X(\varphi)|^2 \to 0$ при $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ и обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Таким образом, ковариационный функционал (1.2) является непрерывным по каждому из аргументов и допускает следующее спектральное представление (см., например, [1], стр. 264):

$$R(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda)\overline{\hat{\psi}(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda, \quad \varphi, \psi \in D,$$

где $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ являются преобразованиями Фурье от функций φ и ψ, соответственно, и для некоторого $p \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda^2)^p}\, d\lambda < \infty. \tag{1.3}$$

Обратите внимание, что в случае $p = 0$ речь идет об обычных процессах с непрерывным временем.

Определение 1.2. Вещественный обобщенный процесс $\{X(\varphi),\, \varphi \in D\}$ называется гауссовским со средним функционалом $m(\varphi)$ и ковариационным функционалом $R(\varphi, \psi)$,если его характеристический функционал $\Phi(\varphi) := E[\exp\{iX(\varphi)\}]$ имеет вид (Гельфанд и Н. Виленкин [1], стр. 261):

$$\Phi(\varphi) = \exp\left\{ im(\varphi) - \frac{1}{2}R(\varphi, \varphi) \right\}, \quad \varphi \in D.$$

Определение 1.3. Вещественный стационарный гауссовский обобщенный процесс $\varepsilon(\varphi)$ с нулевым средним значением и ковариационной функцией, равной дельта-функции (обобщенная функция, определяемая как $\delta(\varphi) = \varphi(0)$) называется белым шумом (Гельфанд и Н. Виленкин [1], стр. 261).

Белый шум является производной процесса Винера, и его характеристический функционал определяется следующим образом ([1], стр. 261):

$$\Phi_\varepsilon(\varphi) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi^2(t)dt \right\}, \quad \varphi \in D.$$

Поскольку дельта-функция является преобразованием Фурье с мерой Лебега, спектральная плотность белого шума равна $f(\lambda) = 1$.

Замечание 1.1. Очевидно, что класс обобщенных процессов включает в себя класс всех обыкновенных стационарных процессов с непрерывным временем. В то же время он также содержит нестандартные процессы, которые не определены в классическом смысле. Примером такого процесса является вышеописанный белый шум.

Замечание 1.2. Если $Y(t)$ является вещественным обыкновенным среднеквадратичным непрерывным стационарным процессом, таким что $E|Y(t)|^2 \leq p(t)$ для некоторого многочлена $p(t)$, то интеграл в (1.1) хорошо определен и определяет вещественный обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ ([1], стр. 257). С другой стороны, обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ заданный (1.1) однозначно определяет обычный процесс $Y(t)$, то есть, если $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются двумя обычными средне-непрерывными стационарными процессами, порождающими (1.1) один и тот же обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$, то $Y_1(t) = Y_2(t)$ с вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{R}$. В этом случае мы будем говорить, что обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ является обычным процессом, и будем отождествлять процессы $X(\varphi)$ и $Y(t)$. Также обратите внимание, что для обычных стационарных процессов условие (1.3) выполняется при $p = 0$, и, наоборот, если условие (1.3) выполняется при $p = 0$, то процесс $X(\varphi)$ должен быть представлен в виде (1.1), где $Y(t)$ — обычный процесс (см. [2]).

1.2. **Проблема прогнозирования.** Пусть $H := H(X) \subset L^2(P)$ — гильбертово пространство, порожденное процессом $\{X(\varphi); \varphi \in \mathbb{D}\}$. Для $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, обозначим $H_a^b := H_a^b(X)$ подпространство H, построенное случайными переменными $X(\varphi)$ с $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset [a, b]$. Обозначим $P_{[a,b]}$ оператором ортогональной проекции $H(X)$ на подпространство $H_a^b(X)$, а $P_{[a,b]}^{\perp}$ ортогональной проекцией $H(X)$ на ортогональное дополнение $H_a^b(X)$, то есть, $P_{[a,b]}^{\perp}\xi = \xi - P_{[a,b]}\xi$ для $\xi \in H(X)$. Тогда для любого $r > 0$ проекция $P_{[-r,0]}X(\varphi)$ может рассматриваться как лучший среднеквадратичный линейный предсказатель случайной величины $X(\varphi)$ на основе прошлого длины $r : H_{-r}^0(X)$, и

$$\sigma^2(f; r) = \mathbb{E}|P_{[-r,0]}^{\perp}X(\varphi)|^2 = \mathbb{E}|X(\varphi) - P_{[-r,0]}X(\varphi)|^2$$

как его ошибку прогнозирования. Аналогично,

$$\sigma^2(f) = \mathbb{E}|P_{[-\infty,0]}^{\perp}X(\varphi)|^2$$

может рассматриваться как ошибка прогнозирования $X(\varphi)$ на основе бесконечного прошлого $H_{-\infty}^0(X)$.

Определение 1.4. Обобщенный стационарный процесс $\{X(\varphi) : \varphi \in \mathbb{D}\}$ называется регулярным (или недетерминированным), если $\sigma^2(f) > 0$, и сингулярным (или детерминированным), если $\sigma^2(f) = 0$.

Следующее утверждение представляет собой спектральную характеристику регулярных и сингулярных обобщенных стационарных процессов, которое является версией хорошо известной альтернативы Колмогорова-Крейна для обычных процессов в непрерывном времени (см., например, Ибрагимов и Розанов [3], стр. 57, и Розанов [4, 5]).

Утверждение 1.1. *Для обобщенного стационарного процесса* $\{X(\varphi) : \varphi \in \mathbb{D}\}$ *со спектральной плотностью* $f(\lambda)$*, справедливы следующие утверждения.*

(a) $X(\varphi)$ *является регулярным тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} > -\infty. \tag{1.4}$$

(b) $X(\varphi)$ *является сингулярным тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} = -\infty. \tag{1.5}$$

Пусть теперь H_1 и H_2 — два подпространства H, а P_1 и P_2 — ортогональные проекционные операторы в H на H_1 и H_2 соответственно. Рассмотрим функционал

$$\tau(H_1, H_2) = \mathrm{tr}[P_1 P_2 P_1],$$

где $\mathrm{tr}[A]$ обозначает след оператора A. Ясно, что

$$\tau(H_1, H_2) = \tau(H_2, H_1).$$

Заметим, что подпространства H_1 и H_2 ортогональны тогда и только тогда, когда $P_1 P_2 P_1 = 0$ (или, что эквивалентно, $P_2 P_1 P_2 = 0$) (см., например, [3], стр. 113).

Функционал $\tau(H_1, H_2)$ оценивает, насколько подпространства H_1 и H_2 далеки от взаимной ортогональности.

Замечание 1.3. Оператор $P_1 P_2 P_1$ известен как канонический оператор корреляции, соответствующий паре подпространств (H_1, H_2). Он был введен в теорию стохастических процессов Гельфандом и Ягломом [6]. Связь между этим оператором и задачей прогнозирования рассматривалась в работах Гельфанда и

Яглома [6], а также Яглома [7]. Оператор $P_1P_2P_1$ играет важную роль в характеристике различных классов регулярности стационарных гауссовских процессов. Подробное обсуждение этой темы можно найти в [3], Раздел IV.2.

Для $r, s \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ мы устанавливаем

$$\begin{aligned} \tau(f; r, s) &= \tau(H^0_{-r}, H^s_0), \\ \tau(f; s) &= \tau(H^0_{-\infty}, H^s_0), \\ \delta(f; r, s) &= \tau(f; s) - \tau(f; r, s). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\delta(f; r, s)$ является неотрицательным и стремится к нулю при $r \to \infty$ для любого фиксированного s. Величина $\delta(f; r, s)$ служит естественной мерой точности прогнозирования случайной величины $\xi \in H^s_0$ на основе наблюдаемых значений $\eta \in H^0_{-r}$ (прошлое длиной r), по сравнению с их прогнозом на основе наблюдаемых значений $\eta \in H^0_{-\infty}$ (все прошлое).

Естественно определить величину

$$\delta(f; r) := \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\ \delta(f; r, s) \tag{1.6}$$

как *относительную ошибку прогнозирования* при прогнозировании случайной величины $\xi \in H^s_0$ с использованием прошлого длины r, по сравнению с прогнозом на основе всего прошлого. Очевидно, что $\delta(f; r) \geq 0$ и

$$\delta(f; r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В данной работе мы сосредоточимся на оценке скорости, с которой ошибка предсказания $\delta(f; r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$, исходя из свойств спектральной плотности $f(\lambda)$. Мы предполагаем, что основной процесс $X(\varphi)$ является недетерминированным, то есть спектральная плотность $f(\lambda)$ от $X(\varphi)$ удовлетворяет условию (1.4). Кроме того, мы считаем, что $X(\varphi)$ «близко» к белому шуму в том смысле, что $f(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию (см. Месропян [8, 9], Солев [10]):

$$1 - f(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

Проблема асимптотического поведения среднеквадратичной погрешности прогнозирования для обычных стационарных процессов в непрерывном времени была рассмотрена в работах Аримото [11], Хаяси [12], Иноуэ и Касахара [13], и Касахара [14]. Эти авторы использовали метод «последовательных проекций на бесконечное прошлое и будущее», основанный на формуле Дима–Сежье и теореме фон Неймана о попеременных проекциях (см. Дима [15], Сежье [16], и Пурахмади [17], Раздел 9.6.3).

Наш подход к решению этой проблемы основан на теории Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов на единичной окружности (см., например, Солев [10], Ахиезер [18], Крейн [19, 20] и ссылки в них). Ключевым фактом является то, что относительная ошибка предсказания $\delta(f;r)$ может быть явно представлена с помощью так называемой «параметрической функции», которая служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности (см. Предложение 3.5 и Замечания 3.2 и 3.3). Некоторые аспекты этого подхода были рассмотрены в работах Месропяна [8, 9], Солева [10], Гиновяна и Микаеляна [21].

В частности, Месропян [9] доказал, что для стационарных обобщенных гауссовских процессов с короткой памятью, а именно, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена вдали от нуля и бесконечности, асимптотическое поведение ошибки прогнозирования $\delta(f;r)$ определяется дифференциальными (гладкостными) свойствами спектральной плотности $f(\lambda)$. Были получены необходимые и достаточные условия для скорости убывания $\delta(f;r)$ до нуля при $r \to \infty$. В работе Гиновяна и Микаеляна [21] асимптотическое поведение $\delta(f;r)$ анализируется в случаях, когда спектральные плотности процессов имеют нули, указывающие на антиперсистентный процесс, или полюса, указывающие на процесс с длинной памятью. Используя технику усеченных операторов Винера-Хопфа, авторы получили явные выражения и асимптотические формулы для $\delta(f;r)$. Результаты Гиновяна и Микаеляна [21] показывают, что асимптотическое соотношение

$$\delta(f;r) \sim \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{1.8}$$

выполняется всякий раз, когда спектральная плотность f основного процесса имеет по крайней мере одну особенность (либо нуль, либо полюс) степенного типа.

Основная цель данной статьи — установить необходимое и достаточное условие для экспоненциального убывания $\delta(f;r)$ к нулю при $r \to \infty$.

Остальная часть статьи организована следующим образом: В Разделе 2 мы представляем основной результат статьи — Теорему 2.1. В Разделе 3 мы обсуждаем несколько вспомогательных результатов из теории комплексных функций, включая целые функции экспоненциального типа, аналитические функции в полосе, пространства Харди и теорию Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов. Мы также доказываем результат, касающийся наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа. В Разделе 4 мы доказываем основной результат.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения. Под $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ мы обозначаем нормы в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ и $L^\infty(\mathbb{R})$, соответственно. Для функции $\varphi(z)$ комплексной переменной $z = \lambda + i\mu$, обозначим через $\varphi_\mu(\lambda)$ функцию $\varphi(\lambda + i\mu)$ для фиксированного действительного μ.

2. Основной результат

Мы предполагаем, что процесс $X(\varphi)$ является недетерминированным и «близок» к белому шуму, то есть спектральная плотность f процесса $X(\varphi)$ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.7).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ обобщенного стационарного гауссовского процесса $X(\varphi)$ удовлетворяет условиям* (1.4) *и* (1.7)*, а $\delta(f;r)$ определяется как в уравнении* (1.6)*. Тогда необходимым и достаточным условием для*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \sqrt[r]{\delta(f,r)} \leqslant e^{-b}, \quad b > 0 \tag{2.1}$$

является то, что $f(\lambda)$ почти везде совпадает с непрерывной функцией, ограниченной от нуля и бесконечности, и функция $1/f(\lambda)$ допускает представление:

$$1/f(\lambda) = 1 + \psi(\lambda), \tag{2.2}$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция в полосе $|\mathrm{Im} z| < b$, удовлетворяющая условию: $\psi_\mu(\lambda) = \psi(\lambda + i\mu) \in L^2(\mathbb{R})$ для любого μ в $|\mu| < b$.

Замечание 2.1. Аналог Теоремы 2.1 для дискретных процессов впервые был доказан Гренандером и Розенблаттом [22] (см. также Гренандер и Сегё [23]). Впоследствии он был расширен Ибрагимовым [24] (см. также Голинский [25]).

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе мы представляем несколько известных результатов из теории комплексных функций, включая целые функции экспоненциального типа, аналитические функции в полосе, пространства Харди и теорию Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов (см., например, Крейн [19, 20], Ахиезер [26], Хоффман [27], Никольский [28], Дим и МакКеан [29], а также Пэли и Винер [30]). Кроме того, мы доказываем результат, касающийся наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа, который служит непрерывным аналогом обратного утверждения теоремы Бернштейна. Эти результаты будут использованы в доказательстве Теоремы 2.1.

3.1. **Все функции экспоненциального типа.** Функция $\varphi(z)$ называется целой функцией экспоненциального типа r, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует константа A_ε такая, что

$$|\varphi(z)| \leq A_\varepsilon \exp\{(r+\varepsilon)|z|\}.$$

Класс всех целых функций экспоненциального типа не превышающих r обозначим через $\mathcal{E}_r$. Рассмотрим два класса целых функций. Класс Пэли-Винера целых функций экспоненциального типа не более r, обозначенный как PW_r, определяется как множество функций $\varphi(z) \in \mathcal{E}_r$ ограничения которых на $\mathbb{R}$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$. В частности,

$$PW_r := \{\varphi(z) \in \mathcal{E}_r : \|\varphi(\lambda)\|_2 < \infty, \quad z = \lambda + i\mu\}.$$

Мы также определим

$$B_r := \{\varphi(z) \in \mathcal{E}_r : \|\varphi(\lambda)\|_\infty < \infty, \quad z = \lambda + i\mu\}.$$

Для функций $\varphi(z) \in PW_r$ выполняются следующие неравенства Бернштейна (см., например, Ахиезер [26], Раздел 4.73, и Никольский [28], Разделы 3.2.2 и 3.3.5):

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \sqrt{r}\|\varphi\|_2, \tag{3.1}$$

$$\|\varphi'\|_2 \leq r\|\varphi\|_2, \tag{3.2}$$

$$\|\varphi_\mu\|_2 \leqslant e^{r|\mu|}\|\varphi\|_2. \tag{3.3}$$

Следующее утверждение, известное как теорема Пэли-Винера, характеризует пространство PW_r (см., например, Ахиезер [26], Раздел 4.72, стр.134).

Утверждение 3.1 (Пэли-Винер)**.** *Класс Пэли-Винера PW_r совпадает с множеством целых функций $\varphi(z)$ допускающих представление:*

$$\varphi(z) = \int_{-r}^{r} e^{itz}\breve{\varphi}(t)\,dt,$$

где $\breve{\varphi}(t) \in L^2(-r,r)$.

Для функции $\varphi(z)$ $(z = \lambda + i\mu)$ из класса B_r, выполняются следующие неравенства Бернштейна (см. [26], Раздел 4.73, и [28], Разделы 3.2.2 и 3.3.5):

$$\|\varphi'(\lambda)\|_\infty \leqslant r\|\varphi(\lambda)\|_\infty, \tag{3.4}$$

$$\|\varphi_\mu(\lambda)\|_\infty \leqslant e^{r|\mu|}\|\varphi(\lambda)\|_\infty, \tag{3.5}$$

$$\|\varphi'_\mu(\lambda)\|_\infty \leqslant re^{r|\mu|}\|\varphi(\lambda)\|_\infty. \tag{3.6}$$

3.2. **Аналитические функции в полосе. Пространства Харди.** Под A_a^b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, обозначаем множество функций $\varphi(z)$, $z = \lambda + i\mu$, которые являются аналитическими в полосе $a < \mu < b$, для которых нормы $\|\varphi_\mu\|_2$ равномерно ограничены в μ для $a < \mu < b$.

Пусть $\mathcal{H}^{2+}$ обозначает класс Харди в верхней полуплоскости, то есть, $\mathcal{H}^{2+}$ — это множество всех аналитических функций $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости $\{z;\, \mathrm{Im} z > 0\}$ таких, что (см., например, Хоффман [27], стр. 121):

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda + i\mu)|^2\,d\lambda \le M < \infty, \quad \mu > 0,$$

где константа M не зависит от μ. Известно (см., например, Хоффман [27], стр. 123), что если $\varphi(z) \in \mathcal{H}^{2+}$, то почти для всех λ существует предел

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\mu \to 0} \varphi(\lambda + i\mu)$$

и граничное значение $\varphi(\lambda)$ от $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)|\frac{dt}{1+t^2} > -\infty, \tag{3.7}$$

$$\log|\varphi(\lambda + i\mu|) \le \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)|\frac{dt}{(\lambda - t)^2 + \mu^2}, \quad \mu > 0.$$

Аналогично можно определить класс Харди $\mathcal{H}^{2-}$ в нижней полуплоскости $\{z;\, \mathrm{Im} z < 0\}$. Заметим, что $\varphi(z) \in \mathcal{H}^{2+}$ тогда и только тогда, когда сопряженная функция $\varphi^*(z) := \overline{\varphi(\overline{z})}$ принадлежит классу $\mathcal{H}^{2-}$. Кроме того, классы $\mathcal{H}^{2+}$ и $\mathcal{H}^{2-}$ совпадают с A_0^∞ и $A_{-\infty}^0$, соответственно (см., например, Хоффман [27]).

Следующее утверждение, которое является еще одной хорошо известной теоремой Пэли-Винера, характеризует пространство $\mathcal{H}^{2+}$ с точки зрения преобразований Фурье (см., например, Хоффман [27], стр. 131, и Пэли и Винер [30], Теорема V, стр. 8).

Утверждение 3.2 (Пэли-Винера)**.** *Пространство $\mathcal{H}^{2+}$ совпадает с множеством аналитических в верхней полуплоскости $\{z; \mathrm{Im} z > 0\}$ функций $\varphi(z)$, допускающих представление*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{itz}\check{\varphi}(t)\,dt, \quad \mathrm{Im} z > 0,$$

где $\check{\varphi}(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Функция $\varphi \in \mathcal{H}^{2+}$ называется внешней, если для $\mu > 0$

$$\log|\varphi(\lambda + i\mu|) = \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)|\frac{dt}{(\lambda - t)^2 + \mu^2}.$$

Пусть $\varphi(\lambda)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию (3.7). Тогда функция

$$g(\varphi, z) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + tz}{t - z} \cdot \frac{\log\varphi(t)}{1 + t^2}\,dt\right\}$$

является внешней функцией из класса $\mathcal{H}^{2+}$ и ее граничное значение $g(\varphi, \lambda)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = |g(\varphi, \lambda)|^2 \quad \text{для почти всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нам также понадобятся следующие два утверждения, доказательство которых можно найти в работе Хоффмана [27], стр. 123-124.

Утверждение 3.3. *Пусть $f(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $f(\lambda)/(1 + \lambda^2) \in L^1(\mathbb{R})$. На верхней полуплоскости $\{z; \mathrm{Im} z > 0\}$ определим функцию:*

$$F(z) = F(\lambda + i\mu) := \frac{\lambda}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{dt}{(t - \lambda)^2 + \mu^2}. \tag{3.8}$$

Тогда верны следующие утверждения.

(а) *Функция $F(z)$ является комплекснозначной гармонической функцией на верхней полуплоскости и имеет пределы по нетангенциальным направлениям, которые совпадают с f почти во всех точках $\mathbb{R}$.*

(б) *Если в представлении (3.8) функция f принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то нормы $\|F_\mu\|_2$ равномерно ограничены в $\mu > 0$, где $F_\mu(\lambda) := F(\lambda + i\mu)$.*

Замечание 3.1. Если функция f является сжатием на $\mathbb{R}$ некоторой аналитической функции в полуплоскости $\Im z > -\varepsilon$, то из этого не следует, что функция $F(z)$ определённая формулой (3.8) является аналитической. Чтобы это обеспечить, необходимо наложить ограничение на поведение аналитической функции в бесконечности. Например, любая ограниченная аналитическая функция может быть восстановлена по своим граничным значениям с помощью формулы (3.8).

3.3. **Результат об асимптотике наилучшего приближения.** Для измеримой функции F в $\mathbb{R}$, обозначим через $E_r(F)$ ее наилучшую аппроксимацию функциями $\varphi_r(\lambda)$ из класса $\mathcal{E}_r$ в метрике пространства $L^2(\mathbb{R})$:

$$E_r(F) := \inf_{\varphi_r \in \mathcal{E}_r} \|F(\lambda) - \varphi_r(\lambda)\|_2. \tag{3.9}$$

Следующая теорема расширяет обратное утверждение теоремы Бернштейна (см. Ахиезер [26], Раздел 5.96, стр. 221) к пространству $L^2(\mathbb{R})$. Устанавливается связь между свойствами гладкости функции F и скоростью убывания ее наилучших аппроксимаций $E_r(F)$.

Теорема 3.1. *Необходимое и достаточное условие для*

$$\varlimsup_{r\to\infty} \sqrt[r]{E_r(F)} \leqslant e^{-b}, \quad b > 0 \tag{3.10}$$

является то, что F может быть представлено как

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda), \tag{3.11}$$

где $\varphi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_{r_0}$ для некоторого r_0, и $\psi(z) \in A^b_{-b}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняется представление (3.11). Ясно, что $E_r(F) = E_r(\psi)$ для $r \geqslant r_0$. Кроме того, функция, которая дает наилучшее приближение для функции $\psi(\lambda)$, имеет следующий вид:

$$\varphi_r(\lambda) = \int_{-r}^{r} e^{it\lambda} \check{\psi}(t) dt,$$

где

$$\check{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \psi(\lambda) d\lambda$$

является преобразованием Фурье от ψ. Следовательно, мы имеем

$$E_r^2(\psi) = \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 dt.$$

Из Теоремы IV Пэли и Винера [30] следует, что для любого $b' < b$ выполняются следующие соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{-2b't} dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b't} dt < \infty.$$

Следовательно, при константе $C > 0$ мы можем записать

$$\begin{aligned} E_r^2(\psi) &= \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{e^{2b'r}} \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b'|t|} dt \\ &\leqslant e^{-2b'r} \left(\int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b't} dt + \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{-2b't} dt \right) \leqslant C e^{-2b'r}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\varlimsup_{r\to\infty} \sqrt[r]{E_r(F)} \leqslant e^{-b'}. \tag{3.12}$$

Поскольку число b' может быть выбрано сколь угодно близким к b, из (3.12) получаем желаемое соотношение (3.10).

Необходимость. Возьмем произвольное положительное число b' такое, что $b' < b$. Затем, согласно условию (3.10), выберем число r_0 таким, что для любого $r \geqslant r_0$ найдется функция $\Phi_r(z) \in \mathcal{E}_r$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\|F - \Phi_r\|_2 \leq e^{-rb'}. \tag{3.13}$$

Устанавливая

$$\varphi(z) := \Phi_{r_0}(z) \quad \text{и} \quad \varphi_k(z) := \Phi_{r_0+k}(z) - \Phi_{r_0}(z), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

с учетом (3.13), мы можем записать

$$\|\varphi_k\|_2 \leqslant \|\Phi_{r_0+k} - F\|_2 + \|F - \Phi_{r_0+k-1}\|_2 \leqslant e^{-(r_0+k-1)b'} \tag{3.14}$$

что означает, что $\varphi_k \in PW_{r_0+k}$.

Далее, из соотношений (3.1) и (3.14) следует, что

$$\|\varphi_k\|_\infty \leqslant 2\sqrt{r_0+k}\, e^{-(r_0+k-1)b'}. \tag{3.15}$$

Следовательно, для функции F имеем следующее равномерно сходящееся разложение:

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\lambda).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z), \quad z = \lambda + i\mu, \quad |\mu| < b'. \tag{3.16}$$

С учетом соотношений (3.5) и (3.15) имеем

$$|\varphi_k(z)| \leqslant 2\sqrt{r_0+k}e^{-(r_0+k-1)b'}\, e^{(r_0+k)\mu}.$$

Следовательно, ряд в (3.16) равномерно и абсолютно сходится в любой полосе $|\mu| < b_1$, $b_1 < b'$. В результате сумма ряда в (3.16), обозначенная как $\psi(z)$, является аналитической функцией в полосе $|\mu| < b'$.

Далее, учитывая неравенства (3.3) и (3.14), мы приходим к выводу, что $\|\psi_\mu\|_2 < \infty$ для $|\mu| < b_1$, $b_1 < b'$.

Взяв число b^* такое, что $b' < b^* < b$, и повторив те же построения, которые мы применили для b', мы приходим к выводу, что функция $\psi(z)$ является аналитической не только в полосе $|\mu| < b'$, но и в полосе $|\mu| < b$. Кроме того,

$$\|\psi_\mu\|_2 < \infty, \quad |\mu| < b_1$$

справедливо не только для любого $b_1 < b'$, но и для любого $b' < b$. Теорема 3.1 доказана. □

3.4. **Функции Крейна. Формулы для ошибки прогнозирования** $\delta(f;r)$**.** В этом подразделе мы представляем формулы для ошибки прогнозирования $\delta(f;r)$. Для этого сначала определим и обсудим некоторые свойства *функций Крейна*, которые являются непрерывными аналогами ортогональных многочленов на единичной окружности и связаны со спектральной плотностью (весовой функцией) $f(\lambda)$ (см., например, Месропян [8], Солев [10], Ахиезер [18], Крейн [19, 20], и Гиновян и Микаелян [21]).

1. Функции Крейна. Пусть $f(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) неотрицательная функция, удовлетворяющая условию (1.7). Тогда преобразование Фурье $H(f;t)$ функции $1-f(\lambda)$, заданной формулой

$$H(t) := H(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} [1-f(\lambda)]e^{-it\lambda}\, d\lambda$$

хорошо определена. В гильбертовом пространстве $L^2(0,r)$ ($r > 0$) рассмотрим следующий интегральный оператор, порожденный функцией $f(\lambda)$:

$$(W_r(f)\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_0^r H(t-s)\varphi(s)\, ds, \quad 0 < t < r.$$

Оператор $W_r(f)$ называется усеченным оператором Винера-Хопфа (или усеченным оператором Тёплица), а порождающая функция $f(\lambda)$ овозначается символом $W_r(f)$.

Важно отметить, что для любого $r > 0$ оператор $W_r(f)$ является самосопряженным и компактным. Кроме того, хорошо известно (см. Ахиезер [18], Крейн [19]) что для любого положительного числа r, для эрмитового ядра $H(f; t-s)$ $(0 \le t, s \le r)$ существует эрмитовый резольвент:

$$\Gamma_r(t,s) = \overline{\Gamma_r(s,t)}, \quad 0 \le t, s \le r, \quad r > 0,$$

удовлетворяющий уравнению

$$\Gamma_r(t,s) + \int_0^r H(t-u)\Gamma_r(u,s)\,du = H(t-s), \quad 0 \le t, s \le r. \tag{3.17}$$

Кроме того, функция $\Gamma_r(t,s)$ является совместно непрерывной по r, t, s, непрерывно дифференцируемой по r, и удовлетворяет следующим условиям:

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(r-s, r-t) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_r(t,s) = -\Gamma_r(t,r)\Gamma_t(r,s), \tag{3.19}$$

где $0 \le t, s \le r$ и $0 \le r < \infty$.

Обозначим $\Gamma_r(t) := \Gamma_r(t,0)$ и для $0 \le r < \infty$ определим

$$P(r,\lambda) := e^{ir\lambda}\left(1 - \int_0^r \Gamma_r(t)e^{-it\lambda}\,dt\right). \tag{3.20}$$

Функции $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$, известные как функции Крейна, были первоначально введены Крейном в [19]), как непрерывные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности.

Заметим, что функции $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$ имеют экспоненциальный тип r и обладают следующим свойством ортонормированности:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{P(s,\lambda)}P(t,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \delta(t-s),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Таким образом, функции Крейна уже нормированы и соответствуют унитарным ортогональным многочленам на единичной окружности.

Мы также вводим «обратные» функции $\{P_*(r,\lambda),\ r \ge 0\}$, которые являются [*]-преобразованиями функций $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$:

$$P_*(r,\lambda) := [*](P(r,\lambda)) = e^{ir\lambda}\overline{P(r,\lambda)} = 1 - \int_0^r \Gamma_r(0,s)e^{is\lambda}\,ds. \tag{3.21}$$

Заметим, что функции $\{P_*(r,\lambda),\ r \ge 0\}$ являются экспоненциального типа не превышающим r.

Определим преобразование:

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_0^\infty \varphi(t)P(t,z)dt, \quad \varphi(t) \in L^2(0,\infty).$$

Кроме того, через $L^2_f(\mathbb{R})$ обозначим взвешенное L^2 пространство, построенное по мере $f(\lambda)d\lambda$, и определим $H^+(f) := \mathcal{H}^{2+} \cap L^2_f(\mathbb{R})$. Доказательство следующего предложения можно найти в работе Крейна [19].

Утверждение 3.4. *Для любой конечной функции $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, имеем*

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^\infty |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda.$$

Отображение $V : \varphi \to \hat{\varphi}$ порождает унитарную изометрию V из пространства $L^2(\mathbb{R}^+)$ на подпространство $H^+(f)$.

Определение 3.1. *Функция $a(r)$ определяемая как*

$$a(r) = \Gamma_r(0,r), \quad r > 0, \tag{3.22}$$

называется параметрической функцией, связанной с системой функций Крейна $\{P(r,\lambda),\, r \geq 0\}$.

Замечание 3.2. Параметрическая функция $a(r)$ связанная с функциями Крейна, служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности.

Замечание 3.3. Параметрическая функция $a(r)$ играет ключевую роль в теории прогнозирования обобщенных стационарных процессов. В Предложении 3.5 ниже мы показываем, что относительная погрешность прогнозирования $\delta(f;r)$ может быть явно представлена с помощью функции $a(r)$. Однако важно отметить, что даже для простых моделей нахождение $a(r)$ не является легкой задачей. Хорошо известным тривиальным случаем является модель белого шума, где $f(\lambda) \equiv 1$. В этом случае имеем $\Gamma_r(t,s) = 0$, $a(r) = 0$, $P(r,\lambda) = \exp(i\lambda r)$, и $P_*(r,\lambda) = 1$ (см., например, Сахнович [31]). В работе Гиновяна и Микаеляна [21] функции $\Gamma_r(t,s)$ и $a(r)$ были вычислены с помощью метода усеченных операторов Винера-Хопфа для двух нетривиальных моделей: в частности, моделей ARMA(1,1) и ARMA(2,2) с непрерывным временем.

Мы перечислим некоторые свойства параметрической функции $a(r)$ (см. Солев [10], Ахиезер [18] и Крейн [19, 20]).

1. Из уравнений (3.17), (3.19) и (3.22) следует, что параметрическая функция $a(r)$ является непрерывной и удовлетворяет следующему равенству:
$$\Gamma_r(0,0)=\Gamma_0(0,0)-\int_0^r|a(t)|^2\,dt=H(0)-\int_0^r|a(t)|^2\,dt.$$
2. Из уравнений (3.18) – (3.22), получаем следующую систему дифференциальных уравнений, известную как система Крейна. Эта система служит непрерывным аналогом рекуррентных отношений Сего-Левинсона- Дурбина в случае дискретного времени.

$$\frac{\partial}{\partial r}P(r,\lambda)=i\lambda P(r,\lambda)-\overline{a(r)}P_*(r,\lambda),\quad P(0,\lambda)=1, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}P_*(r,\lambda)=-a(r)P(r,\lambda),\qquad P_*(0,\lambda)=1. \tag{3.24}$$

3. Условия $a(t)\in L^2(\mathbb{R})$ и (1.4) эквивалентны.

Если функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.4), то на любом компактном подмножестве открытой верхней полуплоскости $\{z:\ \mathrm{Im}z>0\}$, существует равномерный предел:
$$\Pi(\lambda)=\lim_{n\to\infty}P_*(r_n,\lambda),$$
для последовательности $r_n\to\infty$. Кроме того, $\Pi(\lambda)$ является внешней функцией из пространства Харди H^{2+}, с граничными значениями, удовлетворяющими

$$|\Pi(\lambda)|^{-2}=f(\lambda)\quad \text{п.в. в}\quad \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Также выполняются следующие соотношения:

$$1-\Pi(z)=\int_0^\infty a(t)P(t,z)dt,\quad \mathrm{Im}z>0\quad \text{если}\quad a(t)\in L^2[0,\infty), \tag{3.26}$$

$$|\Pi(z)|^{\pm1}\le\exp\left\{\int_0^\infty|a(t)|dt\right\},\quad \mathrm{Im}z>0\quad \text{если}\quad a(t)\in L^1[0,\infty), \tag{3.27}$$

Кроме того, если $a(t)\in L^1[0,\infty)$, то функция $\Pi(\lambda)$ является непрерывной.

2. Формулы для ошибки предсказания $\delta(f;r)$. В следующем предложении представлены формулы для ошибки предсказания $\delta(f;r)$. Доказательство можно найти в работе Месропяна [8] (см. также Солев [10]).

Утверждение 3.5. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям* (1.4) *и* (1.7)*, а $\delta(f;r)$ определяется как в уравнении* (1.6)*. Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\delta(f;r)=\int_r^\infty|a(t)|^2\,dt=\int_{\mathbb{R}}|\Pi(\lambda)-P_*(r,\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda. \tag{3.28}$$

Доказательство следующего предложения можно найти в работе Месропяна [9].

Утверждение 3.6. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям* (1.4) *и* (1.7). *Если*

$$\int_0^\infty r^{-1/2}\delta^{1/2}(f,r)dr<\infty, \tag{3.29}$$

тогда $a(r)\in L^1[0,\infty)$ и $f(\lambda)$ почти всюду совпадает с непрерывной функцией, которая ограничена вдали от нуля и бесконечности. В частности, $0<m\leqslant f(\lambda)\leqslant M<\infty$, где m и M — константы.

4. Доказательство Теоремы 2.1

Мы предположим, что условие (2.1) выполняется, и покажем, что $f(\lambda)$ ограничено от нуля и бесконечности, а функция $1/f$ допускает представление (2.2). Для этого сначала заметим, что при условии (2.1) ошибка предсказания $\delta(f,r)$ также удовлетворяет (3.29). Следовательно, с учетом Предложения 3.6, имеем

$$a(r)\in L^1[0,\infty). \tag{4.1}$$

Условие (4.1) подразумевает (3.27), что означает, что функция $\Pi(z)$, $\mathrm{Im}z\geqslant 0$, и, в частности, функция $\Pi(\lambda)$ ограничены от нуля и бесконечности.

Далее, поскольку $a(r)$ является непрерывной функцией, вместе с (4.1), мы также имеем $a(r)\in L^2[0,\infty)$, что подразумевает (3.26). Следовательно, с учетом (3.26) и Предложения 3.4, мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}}|1-\Pi(\lambda)|^2f(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty|a(t)|^2dt<\infty,$$

и, следовательно, учитывая (3.25), получаем

$$\int_{\mathbb{R}}|1-\Pi^{-1}(\lambda)|^2d\lambda=\int_0^\infty|a(t)|^2dt<\infty.$$

Таким образом, учитывая Предложение 3.3 и Замечание 3.1, мы приходим к выводу, что функция

$$u(z):=1-\Pi^{-1}(z)$$

принадлежит пространству H^{2+}.

Учитывая ограниченность функции $\Pi(z)$, функция

$$v(z):=\Pi(z)-1=\Pi(z)u(z).$$

также принадлежит пространству H^{2+}.

По теореме Пэли-Винера (Предложение 3.2), функция v может быть представлена в виде:

$$v(z) = \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt,$$

где $\check{v}(t) \in L^2[0, \infty)$, и следовательно

$$\Pi(z) = 1 + \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt. \tag{4.2}$$

Далее, с учетом Предложения 3.5, имеем

$$\delta(f, r) = \int_r^\infty |a(t)|^2 dt = \int_0^\infty |\Pi(\lambda) - P_*(r; \lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda \asymp E_r(\Pi) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{4.3}$$

где обозначение $a(t) \asymp b(t)$ при $t \to t_0$ означает, что

$$0 < m \leqslant \varliminf_{t \to t_0} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant \varlimsup_{t \to t_0} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant M < \infty.$$

Из уравнения (4.2) следует, что целая функция наилучшего приближения из класса $\mathcal{E}_r$ для функции $\Pi(z)$, обозначенная как $\varphi_r(\Pi)$, задается следующим образом:

$$\varphi_r(\Pi) := 1 + \varphi_r(v) = 1 + \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt.$$

Очевидно, что функции $|\varphi_r(v)|^2$ и $\varphi_r(v)$ принадлежат не только пространству D_{2r}, но и пространству $\mathcal{E}_r$.

Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned}
&\||\Pi|^2 - |\varphi_r(\Pi)|^2\|_2 \leqslant \|\Pi\overline{\Pi} - \varphi_r(\Pi)\overline{\Pi} + \varphi_r(\Pi)\overline{\Pi} - \varphi_r(\Pi)\overline{\varphi_r(\Pi)}\|_2 \\
&\leqslant \|\overline{\Pi}(\Pi - \varphi_r(\Pi)\|_2 + \|\varphi_r(\Pi)(\overline{\Pi} - \overline{\varphi_r(\Pi)}\|_2 \leqslant \|\Pi\|_\infty \|\Pi - \varphi_r(\Pi)\|_2 + \\
&+ \|[1 + \varphi_r(v)][\overline{\Pi} - \overline{\varphi_r(\Pi)}]\|_2 = E_r(\Pi)(\|\Pi\|_\infty + 1 + \|\varphi_r(v)\|_\infty).
\end{aligned}$$

Далее, поскольку $\varphi_r(v) \in PW_r$, с учетом (3.1), имеем

$$\||\Pi|^2 - |\varphi_r(\Pi)|^2\|_2 \leqslant E_r(\Pi)[\|\Pi\|_\infty + 1 + \sqrt{r}\|\varphi_r(v)\|_2] = CE_r[\Pi],$$

где константа C не зависит от r.

Следовательно, с учетом (4.3), имеем

$$\varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{E_r(|\Pi|^2)} \leqslant \varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{E_r(\Pi)} = \varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{\delta(f, r)} \leqslant e^{-b}. \tag{4.4}$$

Далее, из (4.4) и Теоремы 3.1 следует, что функция $|\Pi(z)|^2$ допускает представление:

$$|\Pi(z)|^2 = \varphi(z) + \psi_1(z), \tag{4.5}$$

где $\varphi \in \mathcal{E}_{r_0}$, $r_0 \geq 0$, и $\psi_1(z) \in A^b_{-b}$.

Рассмотрим функцию

$$h(\lambda) := |\Pi(\lambda)|^2 - 1 = \frac{1}{f(\lambda)} - 1 = \frac{1 - f(\lambda)}{f(\lambda)}, \tag{4.6}$$

и заметим, что $h(\lambda)$ является непрерывной и по (1.7), $h(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $h(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$.

Теперь, с учетом (4.5) и (4.6), имеем

$$\varphi(\lambda) - 1 = h(\lambda) - \psi_1(\lambda). \tag{4.7}$$

Заметим, что функция в правой части (4.7) принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, и следовательно, $g(z) := \varphi(z) - 1 \in PW_{r_0}$. Следовательно, с учетом неравенства (3.3), мы приходим к выводу, что $g \in A^c_{-c}$ для любого $c > 0$. Таким образом, учитывая (4.5), получим

$$\frac{1}{f(\lambda)} = |\Pi(\lambda)|^2 = 1 + g(\lambda) + \psi_1(\lambda) = 1 + \psi(\lambda)$$

где $\psi(\lambda) \in A^b_{-b}$. Таким образом, мы доказали, что из (2.1) следует (2.2).

Теперь мы приступим к доказательству обратного следствия, а именно того, что из (2.2) следует (2.1). Для этого сначала заметим, что, учитывая (2.2) и (3.25), имеем

$$1 + \psi(\lambda) = |\Pi(\lambda)|^2 = \Pi(\lambda) \cdot \Pi^*(\lambda),$$

где $\Pi^*(z)$ — сопряженная функция к $\Pi(z)$.

Рассмотрим следующие две функции: $F_1(z) := \Pi(z)$ и

$$F_2(z) := \frac{1}{\Pi^*(z)} + \frac{\psi(z)}{\Pi^*(z)}. \tag{4.8}$$

Заметим, что $F_1(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости, в то время как $F_2(z)$ является аналитической функцией в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$, и, учитывая (4.8), они совпадают на действительной оси: $F_1(\lambda) = F_2(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следовательно, по теореме Мореры (см., например, Рудин [32], Раздел 10.17, стр. 209), мы можем сделать вывод, что $F_2(z)$ является аналитическим продолжением $F_1(z)$ в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$.

Действительно, определим функцию $F(z)$, которая равна $F_1(z)$ в верхней полуплоскости и F_2 в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$. Тогда интеграл от $F(z)$ по любому замкнутому контуру Γ в полуплоскости $\mathrm{Im} z > -b$ можно представить в виде суммы двух интегралов: один по части контура Γ в верхней полуплоскости и отрезку на действительной оси, пересекаемому контуром Γ, а другой по части контура Γ в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$ и тому же отрезку действительной оси (но с противоположным направлением). По теореме Коши оба этих интеграла равны нулю.

Следует отметить, что, учитывая условие (2.2), Предложение 3.6 и формулу (3.27), функция $\Pi(z)$, $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, ограничена вдали от нуля и бесконечности, а $\Pi(\lambda)$ является непрерывной (см. Месропян [9]).

По уравнению (4.2) имеем $\Pi(z) - 1 \in \mathcal{H}^{2+}$, из чего следует, что $\Pi^*(z) - 1 \in \mathcal{H}^{2-}$. Следовательно, учитывая, что обе функции $\Pi(z)$ и $\Pi^*(z)$ ограничены, мы приходим к выводу, что функция

$$\frac{1 - \Pi^*(z)}{\Pi^*(z)}$$

также принадлежит классу $\mathcal{H}^{2-}$.

Таким образом, с учетом (4.8), мы можем записать

$$F_2(z) = 1 + \frac{1 - \Pi^*(z)}{\Pi^*(z)} + \frac{\psi(z)}{\Pi^*(z)} = 1 + \psi_1(z), \tag{4.9}$$

где $\psi_1 \in A^b_{-b}$. Из уравнений (4.2), (4.3) и (4.9) следует, что функция $\psi_1(z) = F_2(z) - 1$ является аналитическим продолжением функции $v(z) = \Pi(z) - 1 = F_1(z) - 1$ в полосе $-b < \mathrm{Im}z < 0$.

Следовательно, имеем $\Pi(z) = 1 + v(z)$, где $v(z) \in A^0_{-b}$. Таким образом, учитывая Теорему 3.1, мы приходим к выводу, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{\delta(f,r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{E_r(\Pi)} \leqslant e^{-b}.$$

На этом доказательство Теоремы 2.1 завершено.

Abstract. The paper addresses the mean square linear prediction problem for a class of stationary generalized Gaussian processes possessing spectral densities. We are particularly interested in the relative prediction error when predicting a future value of the process using a finite past versus using the entire past, given that the underlying process is nondeterministic and “close” to white noise. We establish a necessary and sufficient condition for the relative prediction error to decrease to zero at an exponential rate. Our approach is based on Krein’s theory of continuous analogues of orthogonal polynomials. A key fact is that the relative prediction error can be explicitly represented through the so-called “parameter function”, which serves as a continuous analog of the Verblunsky coefficients (or reflection parameters) associated with orthogonal polynomials on the unit circle.

Список литературы

[1] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions, **4**, Applications of Harmonic Analysis: Equipped Hilbert Spaces, Academic Press, New York (1964).

[2] A. M. Yaglom, "Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes", Theory Probab. Appl. **2**, 273 – 320 (1957).

[3] I. A. Ibragimov and Yu. A. Rozanov, Gaussian Random Processes, Springer, New York (1978).

[4] Yu. A. Rozanov, Stationary Random Processes, Holden-Day, San Francisco (1967).

[5] Yu. A. Rozanov, "On the extrapolation of generalized stationary random processes", Theory Probab. Appl. **4**, 426 – 431 (1959).

[6] I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, "Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function", Uspehi Math. Nauk **12**, 3 – 52 (1957). [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. **12**, 199 – 246 (1959)].

[7] A. M. Yaglom, "Stationary Gaussian processes satisfying the strong mixing condition and best predictable functionals", Bernoulli- Bayes-Laplace Anniversary Volume. (eds L. LeCam and J. Neyman), 241 – 252, Springer, Berlin (1965).

[8] N. Mesropian, "On prediction error for continuous-time stationary processes", Mezhvuz. Sb. Nauch. Trudov, Yerevan State University, **1**, 204 – 212 (1982).

[9] N. Mesropian, "The asymptotics of prediction error for continuous-time stationary processes", Uchen. Zapiski of Yerevan State University, **2**, 3 – 6 (1983).

[10] V. N. Solev, "Approximation of Gaussian measures generated by stationary processes", Zapiski Nauchn. Semin. LOMI, **79**, 44 – 66 (1978).

[11] A. Arimoto, "Approximation of the finite prediction for a weakly stationary process", Ann. Probab. **16**, 355 – 360 (1988).

[12] E. Hayashi, "Prediction from part of the past of a stationary process", Ill. J. Math. **27**, 571 – 577 (1983).

[13] A. Inoue and Y. Kasahara, "On the asymptotic behavior of the prediction error of a stationary process", in "Trends in Probability and Related Analysis" (Taipei, 1998), World Sci. Publishing, River Edghe, NJ, 207 – 218 (1999).

[14] Y. Kasahara, "The asymptotic behaviour of the prediction error for a continuous-time fractional ARIMA process", Appl. Probab. Trust **250**, 299 – 319 (2001).

[15] H. Dym, "A problem in trigonometric approximation theory, Ill", J. Math. **22**, 402 – 403 (1978).

[16] A. Seghier, "Prediction d'un processus stationnaire du second order de covariance connue sur intervalle fini", Ill. J. Math. **22**, 389 – 401 (1978).

[17] M. Pourahmadi, Fundamentals of Time Series Analysis and Prediction Theory, Wiley, New York (2001).

[18] N. I. Achieser, "The continual analog of some theorems on Toeplitz matrices", Ukr. Math. J. **16**, 445 – 462 (1964).

[19] M. G. Krein, "The continual analogs of theorems on polynomials orthogonal on the unit circle", Doklady AN SSSR, **105**, 637 – 640 (1955).

[20] M. G. Krein, "On the fundamental approximation problem of the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes", Doklady AN SSSR, **94**(1), 13 – 16 (1954).

[21] M. S. Ginovyan and L. V. Mikaelyan, "Prediction error for continuous-time stationary processes with singular spectral densities", Acta Appl Math. **110**, 327 – 351 (2010).

[22] U. Grenander and M. Rosenblatt, "An extension of a theorem of G. Szegő and its application to the study of stochastic processes", Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 112 – 126 (1954).

[23] U. Grenander and G. Szegő, Toeplitz Forms and Their Applications, Univ. California Press, Berkeley (1958).

[24] I. A. Ibragimov, "On asymptotic behavior of the prediction error", Theory Probab. Appl. **9**(4), 695 – 703 (1964).

[25] B. L. Golinskii, "On asymptotic behavior of the prediction error", Theory Probab. Appl. 19(4), 724 — 739 (1974).

[26] N. I. Achieser, Theory of Approximation, Dover Publications, New York (1992).

[27] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, N.J. (1962).

[28] S. M. Nikol'skii, Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, Springer, New York (1975).
[29] H. Dym and H. P. McKean, Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Academic Press, New York (1976).
[30] R. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society, New York (1934).
[31] L. A. Sakhnovich, "Spectral theory of a class of canonical differential systems", Funct. Anal. Appl. **34**, 119 – 128 (2000).
[32] W. Rudin, Real and Complex Analysis, NcGRAW-HILL, New York (1970).

Поступила 25 августа 2025

После доработки 09 сентября 2025

Принята к публикации 15 октября 2025

Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 51 – 62.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В. Г. ДИЛАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
E-mail: *vachagan.dilanyan02@gmail.com*

Аннотация. Для любой ортонормированной системы функций $\{\varphi_n\}$ на $(0,1)$, точечно ограниченной функцией $f \in L^2(0,,1)$, то есть такой, что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$, существует ортонормированная система $\{\psi_n\}$ с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, такая что для любой последовательности $a_n \in \ell^2$ ряды $\sum a_n\varphi_n$ и $\sum a_n\psi_n$ сходятся почти всюду одновременно.

MSC2020 numbers: 42C05; 42C10.

Ключевые слова: Общий ортогональный ряд, система Хаара, эквивалентность почти всюду.

1. Введение

В работах Б. С. Кашина [1] и К. Тандори [2] доказаны, соответственно, следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Существует ортонормированная система* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с точным множителем Вейля* $\log^2 n$, *такая что* $|\psi_n(x)| \equiv 1,\ n = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.2. *Если последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что при всевозможных ортонормированной системы* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \dots$, *ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x) \tag{1.1}$$

сходятся почти всюду (п.в.), то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Комитета высшего образования и науки Республики Армения (номер гранта 21AG-1A045)

также сходятся п.в., где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система с условием*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

Определение 1.1. *Пусть* $X, Y \subset \mathbb{R}$ — *некоторые интервалы, и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$, $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, $y \in Y$, — *ортогональные системы. Системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ *называются эквивалентными, если для любой* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ *ряды* (1.1) *и* (1.2) *сходятся почти всюду одновременно на соответствующих областях определения. Более того, системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ *называются сильно эквивалентными, если выполняется неравенство*

$$\frac{1}{C}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\|_2 \leqslant \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k(y)\right|\right\|_2 \leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\|_2$$

для некоторой абсолютной константы $C > 0$.

Замечание 1.1. *Сильная эквивалентность — транзитивное отношение.*

Следующая теорема доказана Г. А. Карагуляном в работе [3].

Теорема 1.3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, — *ортонормированная система с* (1.3). *Тогда существует ортонормированная система* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая что для любой последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ *множества сходимости рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ *совпадают почти всюду для* $x \in (0,1)$.

Замечание 1.2. *Совпадение множеств сходимости рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$ *является более сильным свойством, чем эквивалентность систем* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

В настоящей работе мы рассматриваем ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию, более слабому, чем (1.3). А именно, вместо (1.3) предполагается, что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$ для некоторой неотрицательной функции $f \in L^2(0,1)$. Мы показываем, что существует ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, такая что $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются сильно эквивалентными.

Наш подход состоит из нескольких шагов. Сначала мы конструируем интервал

J и ортонормированную систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, определённую на J, которая сильно эквивалентна системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, но $\tilde{\varphi}_n(y)$ удовлетворяет условию (1.3). Затем, применяя линейное преобразование, мы приводим эту систему к другой ортонормированной системе $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, сохраняя сильную эквивалентность. Далее, используя Теорему 1.3, мы конструируем ортонормированную систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $(0,1)$ с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, которая эквивалентна системе $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Наконец, используя некоторые свойства $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, мы доказываем, что выполняется неравенство (3.7), тем самым устанавливая сильную эквивалентность между $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Некоторые леммы

Пусть I — интервал, состоящий из интервалов $I_1, I_2, \dots$, и пусть J — интервал, состоящий из интервалов $J_1, J_2, \dots$. Пусть $b_1, b_2, \dots$ — положительные числа такие, что $|J_k| = b_k^2 |I_k|$. Пусть $\gamma_k \colon I_k \to J_k$ — линейные, возрастающие и сюръективные функции, то есть $\gamma_k'(x) = b_k^2$, и пусть $\gamma(x) = \gamma_k(x)$ при $x \in I_k$. Определим оператор $\Gamma \colon L^2(I) \to L^2(J)$ по формуле $\Gamma u(y) := \frac{u(\gamma^{-1}(y))}{b_k}$, где $u \in L^2(I)$ и $y \in J_k$.

Лемма 2.1. *(a) Пусть $u(x), v(x) \in L^2(I)$. Пусть $\tilde{u}(y) = \Gamma u(y)$ и $\tilde{v}(y) = \Gamma v(y)$ при $y \in J$. Тогда*

$$\int_I u(x)v(x)\,dx = \int_J \tilde{u}(y)\tilde{v}(y)\,dy.$$

(b) Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система на I и $\tilde{u}_n(y) = \Gamma u_n(y)$. Тогда система $\{\tilde{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной на J и эквивалентна системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. (a)

$$\int\limits_J \tilde{u}(y)\tilde{v}(y)\,dy = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{J_l} \tilde{u}(\gamma_l(x))\tilde{v}(\gamma_l(x))\,d\gamma_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{I_l} \frac{u(x)}{b_l} \cdot \frac{v(x)}{b_l} \gamma_l'(x)\,dx$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{I_l} u(x)v(x)\,dx = \int\limits_I u(x)v(x)\,dx.$$

(b) Из пункта (a) непосредственно следует, что система $\{\tilde{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на J. Предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$ сходится п.в. на I. Очевидно, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x_0)$ сходится при некотором $x_0 \in I$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{u}_k(\gamma(x_0))$ также сходится. Обратное утверждение доказывается аналогично.

$\square$

Определение 2.1. *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — множества, измеримые по Лебегу, и $\sigma\colon X \to Y$ — измеримая функция. Говорят, что функция σ сохраняет меру, если для любого измеримого подмножества $B \subset Y$ выполняется равенство*

$$|B| = |\sigma^{-1}(B)|,$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега.

Следующая лемма основана на элементарных свойствах меры Лебега.

Лемма 2.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество с конечной мерой, т.е. $|E| < \infty$, и для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим $E(x) = \{y \in E : y \leqslant x\}$. Определим*

$$\sigma : E \to [0, |E|] \quad \textit{по формуле} \quad \sigma(x) = |E(x)|.$$

Тогда σ является функцией, сохраняющей меру на E.

Следующая лемма доказана в работе [3].

Лемма 2.3. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x \in (0,1)$, — ортонормированная система с $|\varphi_k(x)| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любого целого числа $N \geqslant 1$ существует ортонормированная система $\{\tilde{\psi}_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и числа $N = m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ такие, что*

$$\left\| 2M\tilde{\psi}_k(x) - \varphi_k(x) - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \chi_i(x) \right\|_2 < \varepsilon, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

$$|\psi_k(x)| \equiv 1, \ k = 1, 2, \ldots, n$$

где $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система Хаара, а $\{c_i\}_{i=N+1}^{m_n}$ — некоторые числа.

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L^2(0,1)$, а $f(x)$ — неотрицательная функция из $L^2(0,1)$, такая что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда существует ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такая что системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются сильно эквивалентными.*

Замечание 3.1. [4, Глава 8] *Если система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}$$

для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2$*, то этого достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

сходился почти всюду на $(0,1)$.

Доказательство. Пусть $f(x)\in L^2(0,1)$ и определим

$$X_n = \{x\in(0,1) : n-1\leqslant f(x)<n\},\qquad n=1,2,\dots.$$

Построим простую функцию $g(x)\in L^2(0,1)$ такую, что $g(x)\geqslant f(x)\geqslant\varphi_n(x)$, $n=1,2,\dots$. Положим

$$g(x)=n\quad\text{для любого } x\in X_n.$$

Очевидно, что $0<g(x)-f(x)\leqslant 1$, и

$$\|g-f\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X_n}|g(x)-f(x)|^2\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|=1.$$

Следовательно, $g(x)\in L^2(0,1)$. Это позволяет считать, что функция $f(x)$ является простой.

Предположим, что функция $f(x)$ является простой, $\mathrm{Im}(f)=\{b_1,b_2,\dots\}$, и положим $E_l:=f^{-1}(b_l)$. Ясно, что семейство $\{E_l\}_{l=1}^{\infty}$ образует разбиение интервала $(0,1)$. Пусть $\{I_l\}_{l=1}^{\infty}$ — семейство интервалов, таких что $|I_l|=|E_l|$, расположенных последовательно и образующих разбиение $(0,1)$. По лемме 2.2 построим сохраняющие меру отображения $\sigma_l\colon E_l\to I_l$, $l=1,2,\dots$, определённые на измеримых подмножествах E_l. Задавая $\sigma(x)=\sigma_l(x)$, $x\in E_l$, получаем, что для любого измеримого множества $A\subset(0,1)$ выполняется равенство

$$\int_A\varphi_n(x)\,dx=\int_{\sigma(A)}\varphi_n(\sigma(x))\,d\sigma(x).$$

Из последнего равенства следует, что система $\{\varphi_n(\sigma(x))\}_{n=1}^{\infty}$ также является ортонормированной на интервале $(0,1)$. Очевидно, что системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_n(\sigma(x))\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. Заметим, что функция $f(\sigma(x))$ является ступенчатой и $|\varphi_n(\sigma(x))|\leqslant f(\sigma(x))$. Поскольку указанные системы сильно эквивалентны, без ограничения общности можно считать, что функция $f(x)$ является ступенчатой.

Рассмотрим функцию $f(x)$ как ступенчатую. Обозначим через $I_1, I_2, \ldots$ интервалы, на которых функция $f(x)$ постоянна, и пусть $b_1, b_2, \ldots$ — соответствующие значения $f(x)$ на этих интервалах. Построим интервал J и ортонормированную систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, $y \in J$, такую, что $|\tilde{\varphi}_n(y)| \leqslant 1$ и которая сильно эквивалентна системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $J_1, J_2, \ldots$ — интервалы такие, что $|J_l| = b_l^2 |I_l|$, и $\gamma_l \colon I_l \to J_l$ — линейные, возрастающие и сюръективные отображения, $l = 1, 2, \ldots$. Расположим эти интервалы последовательно так, чтобы они образовывали единый интервал J, имеющий конечную меру, поскольку

$$|J| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 |I_k| = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Определим

$$\tilde{\varphi}_k(y) = \Gamma \varphi_k(y) = \frac{\varphi_k(\gamma^{-1}(y))}{b_l}, \qquad y \in J_l.$$

Поскольку $|\varphi_k(x)| \leq b_l$ при $x \in I_l$, получаем, что $|\tilde{\varphi}_k(y)| \leq 1$ для любого $y \in J$. По лемме 2.1 система $\{\tilde{\varphi}_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной на интервале J и эквивалентной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Кроме того,

$$\Gamma\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\right|\right)(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \Gamma\varphi_k(y)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\varphi}_k(y)\right|, \qquad y \in J.$$

Отсюда, в сочетании с леммой 2.1, следует, что

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right|\right\|_2 = \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \tilde{\varphi}_k(x)\right|\right\|_2.$$

Следовательно, системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны.

Чтобы перенести систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ с интервала J на $(0,1)$, пусть $\alpha \colon J \to (0,1)$ — линейное отображение и определим

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x) = |J|^{\frac{1}{2}}\, \tilde{\varphi}_k(\alpha^{-1}(x)), \qquad x \in (0,1).$$

Тогда система $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на $(0,1)$ и сильно эквивалентна системе $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$.

По теореме Меншова-Марцинкевича (см. [4, Глава 8, Теорема 7]) существуют числа $0 = n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что ряд $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)$ сходится п.в. на $(0,1)$, причём

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{n_k} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2 \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2. \tag{3.1}$$

Поскольку система $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система на $(0,1)$ и удовлетворяет оценке $|\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)| \leqslant |J|^{\frac{1}{2}} < \infty$, то по Лемме 2.3 существует система $\{\tilde{\tilde{\psi}}_i\}_{i=1}^{\infty}$ с $|\tilde{\tilde{\psi}}_i(x)| \equiv 1$ такая, что для любого $k = 1, 2, \dots$ система $\{\tilde{\tilde{\psi}}_i\}_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}$ ортонормирована и

$$\left\| 2M\tilde{\tilde{\psi}}_t(x) - \tilde{\tilde{\varphi}}_t(x) - \sum_{i=m_{t-1}+1}^{m_t} c_i\chi_i(x) \right\|_2 < \frac{1}{2^t(n_{k+1} - n_k)} \tag{3.2}$$

где $M = |J|^{\frac{1}{2}}$.

Затем мы используем теорему ортогонализации Хобби–Райса (см. [4, Глава 8, Теорема 4]): если $f_i \in L^2(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, m$, — некоторые функции, то существует функция $\varepsilon(x)$ с $|\varepsilon(x)| \equiv 1$, ортогональная к этим функциям.

Из этой теоремы следует, что функции $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots$ можно выбрать последовательно с числами $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots$ таким образом, что $|\varepsilon_k(x)| \equiv 1$ для $k = 1, 2, \dots$ и для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются условия

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x)\,\varepsilon_s(x)\tilde{\tilde{\psi}}_l(x)\,dx = 0, \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x)\,\chi_i(x)\,dx = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_k, \tag{3.4}$$

$$\left\| \varepsilon_k\tilde{\tilde{\psi}}_t - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \chi_i \int_0^1 \varepsilon_k(y)\tilde{\tilde{\psi}}_t(y)\chi_i(y)\,dy \right\|_2 < \frac{1}{2^k(n_{k+1} - n_k)}, \tag{3.5}$$

где $n_k < t \leqslant n_{k+1}$, $n_s < l \leqslant n_{s+1}$, $s < k$.

Выбор $\varepsilon_1(x)$ и N_1, удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) для $k = 1$, очевиден. Предположим, что функции $\varepsilon_i(x)$ и числа N_i, $i = 1, 2, \dots, \nu$, уже выбраны. Тогда по теореме ортогонализации можно выбрать $\varepsilon_{\nu+1}$ с $|\varepsilon_{\nu+1}(x)| \equiv 1$, так чтобы условия (3.3) и (3.4) выполнялись для $k = \nu + 1$. Далее, взяв $N_{\nu+1}$ достаточно большим, обеспечивается выполнение условия (3.5) для $k = \nu + 1$.

Определим

$$\psi_t(x) = \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x), \quad \text{для } n_{k-1} < t \leqslant n_k. \tag{3.6}$$

Очевидно, система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована и $|\psi_n(x)| \equiv 1$ для $n = 1, 2, \dots$.

Конструкция $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выше идентична конструкции $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в Теореме 1.3. Поэтому по Теореме 1.3 системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны.

Чтобы показать, что системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны, нужно доказать следующее неравенство

$$\frac{1}{C}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x)\right|\right\|_2\leqslant\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right|\right\|_2\leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x)\right|\right\|_2. \tag{3.7}$$

Теперь докажем левое неравенство в (3.7). По неравенству (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2&\leqslant 2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2+2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2^2\\&\leqslant 2C_0\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2+2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Обозначим $\alpha_t(x)=2M\tilde{\tilde{\psi}}_t(x)-\tilde{\tilde{\varphi}}_t(x)-\sum\limits_{i=m_{t-1}+1}^{m_t}c_i\chi_i(x)$. Тогда по (3.2) имеем

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2$$

$$\leqslant 2M\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\psi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.8}$$

$$+\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}c_i\chi_i(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.9}$$

$$+\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\alpha_j(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.10}$$

$$=I_1+I_2+I_3.$$

Теперь мы оцениваем (3.8), (3.9) и (3.10) отдельно. Используя (3.6), имеем

$$I_1=\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right)\right\|_2\leqslant 2\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 \tag{3.11}$$

Выражение (3.9) состоит из полинома в системе Хаара с коэффициентами a_jc_i. Кроме того,

$$\left(\sum_{i=m_j-1}^{m_j}c_j^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left\|\sum_{i=m_j-1}^{m_j}c_i\chi_i(x)\right\|_2\leqslant\left\|2M\tilde{\tilde{\psi}}_j(x)\right\|_2+\left\|\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right\|_2+\|\alpha_j(x)\|_2\leqslant 2M+2.$$

Используя это неравенство, мы получаем, что для $n_k < n \leqslant n_{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n}\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j}(a_jc_i)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j}(a_jc_i)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j}c_i^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2(2M+2)^2 = (2M+2)^2\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2 < \infty.$$

Таким образом, применяя хорошо известную теорему [4, Глава 3, Теорема 4], из последнего неравенства следует

$$I_2 \leqslant C_1\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\alpha_j(x)\right| \leqslant \sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n}\alpha_j^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$I_3 \leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_2 \tag{3.13}$$

$$\leqslant \left\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right| \geqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)\right|$, то

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right|\right\|_2 \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)\right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства вместе с (3.11), (3.12) и (3.13) получаем

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2 \leqslant C_2\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2,$$

откуда следует, что

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2 \leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2.$$

Теперь докажем правое неравенство в (3.7).

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 \leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 + \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\psi_j(x)\right)\right\|_2. \tag{3.14}$$

Для индексов, удовлетворяющих $n_k < t \leqslant n_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots$, определим

$$p_t := \int\limits_0^1 \varepsilon_k(y)\tilde{\tilde{\psi}}_t(y)\chi_i(y)\,dy \quad \text{и} \quad \beta_t(x) := \psi_t(x) - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} p_i\chi_i(x).$$

Из (3.5) следует, что

$$\left\|\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)\right\|_2^2 \leqslant 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\psi_j(x)\right\|_2^2 + 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\beta_j(x)\right\|_2^2 \tag{3.15}$$

$$\leqslant 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\psi_j(x)\right\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\sum_{j=1}^{\infty}\|\beta_j(x)\|_2^2 \leqslant 4\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2.$$

и

$$\begin{aligned}
\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 &= \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2\\
&= \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\left(\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)+\beta_j(x)\right)\right|\right\|_2\\
&\leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)\right|\right\|_2\\
&\quad+\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\beta_j(x)\right|\right\|_2 = J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Теперь оцениваем J_1 и J_2 отдельно.

Заметим, что J_1 состоит из рядов функций Хаара, которые сходятся по (3.15). Следовательно, по теореме [4, Глава 3, Теорема 4] мы получаем

$$J_1^2 \leqslant C_3\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2. \tag{3.16}$$

Из (3.5) следует, что

$$J_2^2 \leqslant \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k-1} \left(\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \cdot \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} \beta_j(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \tag{3.17}$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} \|\beta_j(x)\|_2^2 \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2.$$

Сочетая результаты в (3.16) и (3.17), мы получаем, что

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n_k} a_j \psi_j(x) \right| \right\|_2 \leqslant C_4 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_4 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right\|_2 \leqslant C_4 \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2 .$$

Остаётся показать, что второе слагаемое в (3.14) удовлетворяет неравенству

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \psi_j(x) \right) \right\|_2 \leqslant C_5 \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2 \tag{3.18}$$

для некоторой абсолютной константы $C_5 > 0$. Согласно (3.2) и (3.6)

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \psi_j(x) \right) \right\|_2 = \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\psi}}_j(x) \right) \right\|_2$$

$$\leqslant \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right) \right\|_2$$

$$+ \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} c_i \chi_i(x) \right| \right) \right\|_2$$

$$+ \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \alpha_j(x) \right| \right) \right\|_2 .$$

Полученное выражение имеет ту же структуру, что и (3.8)–(3.10).

$$\frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right) \right\|_2 \leqslant \frac{1}{M} \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2 .$$

Последнее неравенство вместе с (3.12) и (3.13) подразумевает неравенство (3.18). Мы достигли того, что системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. Поскольку сильная эквивалентность — транзитивное отношение, то $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. □

Настоящее исследование выполнено под руководством Г. А. Карагуляна.

Abstract. For every orthonormal system of functions $\{\varphi_n\}$ on (0, 1), pointwise bounded by a function $f \in L^2(0, 1)$, that is, $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$, it is possible to construct an orthonormal system $\{\psi_n\}$ with $|\psi_n(x)| \equiv 1$, such that the series $\sum a_n\varphi_n$ and $\sum a_n\psi_n$ converge almost everywhere simultaneously, for every $\{a_n\} \in \ell^2$.

Список литературы

[1] B. S. Kashin, "On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series", Jour. Anal. Math., **2**, no. 4, 249 –266 (1976).

[2] K. Tandori, "Über beschränkte orthonormierte Systeme", Jour. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **31**, no. 3–4, 279 – 285 (1978).

[3] G. A. Karagulyan, Equivalent orthonormal systems, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR Ser. Mat., **22**, no. 5, 510 – 513, 516 (1987).

[4] B. S. Kashin, A. A. Saakyan, Orthogonal Series, Translations of Mathematical Monographs, **75**, Silver, Ben, Translated from the Russian by Ralph P. Boas; Translation edited by Ben Silver, American Mathematical Society, Providence, RI (1989).

Поступила 12 августа 2025

После доработки 29 сентября 2025

Принята к публикации 10 октября 2025

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 61, номер 1, 2026

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 61, No. 1, 2026

Contents