Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 51 – 62.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В. Г. ДИЛАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
E-mail: *vachagan.dilanyan02@gmail.com*

Аннотация. Для любой ортонормированной системы функций $\{\varphi_n\}$ на $(0,1)$, точечно ограниченной функцией $f \in L^2(0,,1)$, то есть такой, что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$, существует ортонормированная система $\{\psi_n\}$ с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, такая что для любой последовательности $a_n \in \ell^2$ ряды $\sum a_n\varphi_n$ и $\sum a_n\psi_n$ сходятся почти всюду одновременно.

MSC2020 numbers: 42C05; 42C10.

Ключевые слова: Общий ортогональный ряд, система Хаара, эквивалентность почти всюду.

1. Введение

В работах Б. С. Кашина [1] и К. Тандори [2] доказаны, соответственно, следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Существует ортонормированная система* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с точным множителем Вейля* $\log^2 n$*, такая что* $|\psi_n(x)| \equiv 1,\ n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.2. *Если последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что при всевозможных ортонормированной системы* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $|\psi_n(x)| \equiv 1$*,* $n = 1, 2, \ldots$*, ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x) \tag{1.1}$$

сходятся почти всюду (п.в.), то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Комитета высшего образования и науки Республики Армения (номер гранта 21AG-1A045)

также сходятся п.в., где $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *ортонормированная система с условием*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M, \;\; n = 1, 2, \ldots . \tag{1.3}$$

Определение 1.1. *Пусть* $X, Y \subset \mathbb{R}$ — *некоторые интервалы, и* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in X$, $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, $y \in Y$, — *ортогональные системы. Системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ *называются эквивалентными, если для любой* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ *ряды* (1.1) *и* (1.2) *сходятся почти всюду одновременно на соответствующих областях определения. Более того, системы* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ *называются сильно эквивалентными, если выполняется неравенство*

$$\frac{1}{C}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\|_2 \leqslant \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\psi_k(y)\right|\right\|_2 \leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\|_2$$

для некоторой абсолютной константы $C > 0$.

Замечание 1.1. *Сильная эквивалентность — транзитивное отношение.*

Следующая теорема доказана Г. А. Карагуляном в работе [3].

Теорема 1.3. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, — *ортонормированная система с* (1.3). *Тогда существует ортонормированная система* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *с* $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *такая что для любой последовательности* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ *множества сходимости рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k(x)$ *совпадают почти всюду для* $x \in (0, 1)$.

Замечание 1.2. *Совпадение множеств сходимости рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k$ *является более сильным свойством, чем эквивалентность систем* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

В настоящей работе мы рассматриваем ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию, более слабому, чем (1.3). А именно, вместо (1.3) предполагается, что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$ для некоторой неотрицательной функции $f \in L^2(0, 1)$. Мы показываем, что существует ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$, такая что $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, и системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются сильно эквивалентными.

Наш подход состоит из нескольких шагов. Сначала мы конструируем интервал

J и ортонормированную систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, определённую на J, которая сильно эквивалентна системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, но $\tilde{\varphi}_n(y)$ удовлетворяет условию (1.3). Затем, применяя линейное преобразование, мы приводим эту систему к другой ортонормированной системе $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, сохраняя сильную эквивалентность. Далее, используя Теорему 1.3, мы конструируем ортонормированную систему $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $(0,1)$ с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, которая эквивалентна системе $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Наконец, используя некоторые свойства $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, мы доказываем, что выполняется неравенство (3.7), тем самым устанавливая сильную эквивалентность между $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Некоторые леммы

Пусть I — интервал, состоящий из интервалов $I_1, I_2, \dots$, и пусть J — интервал, состоящий из интервалов $J_1, J_2, \dots$. Пусть $b_1, b_2, \dots$ — положительные числа такие, что $|J_k| = b_k^2 |I_k|$. Пусть $\gamma_k \colon I_k \to J_k$ — линейные, возрастающие и сюръективные функции, то есть $\gamma_k'(x) = b_k^2$, и пусть $\gamma(x) = \gamma_k(x)$ при $x \in I_k$. Определим оператор $\Gamma \colon L^2(I) \to L^2(J)$ по формуле $\Gamma u(y) := \frac{u(\gamma^{-1}(y))}{b_k}$, где $u \in L^2(I)$ и $y \in J_k$.

Лемма 2.1. *(a) Пусть $u(x), v(x) \in L^2(I)$. Пусть $\tilde{u}(y) = \Gamma u(y)$ и $\tilde{v}(y) = \Gamma v(y)$ при $y \in J$. Тогда*

$$\int_I u(x)v(x)\,dx = \int_J \tilde{u}(y)\tilde{v}(y)\,dy.$$

(b) Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система на I и $\tilde{u}_n(y) = \Gamma u_n(y)$. Тогда система $\{\tilde{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ является ортонормированной на J и эквивалентна системе $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. (a)

$$\int\limits_J \tilde{u}(y)\tilde{v}(y)\,dy = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{J_l} \tilde{u}(\gamma_l(x))\tilde{v}(\gamma_l(x))\,d\gamma_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{I_l} \frac{u(x)}{b_l} \cdot \frac{v(x)}{b_l} \gamma_l'(x)\,dx$$
$$= \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{I_l} u(x)v(x)\,dx = \int\limits_I u(x)v(x)\,dx.$$

(b) Из пункта (a) непосредственно следует, что система $\{\tilde{u}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на J. Предположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$ сходится п.в. на I. Очевидно, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x_0)$ сходится при некотором $x_0 \in I$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{u}_k(\gamma(x_0))$ также сходится. Обратное утверждение доказывается аналогично.

$\square$

Определение 2.1. *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — множества, измеримые по Лебегу, и $\sigma\colon X \to Y$ — измеримая функция. Говорят, что функция σ сохраняет меру, если для любого измеримого подмножества $B \subset Y$ выполняется равенство*

$$|B| = |\sigma^{-1}(B)|,$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега.

Следующая лемма основана на элементарных свойствах меры Лебега.

Лемма 2.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество с конечной мерой, т.е. $|E| < \infty$, и для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим $E(x) = \{y \in E : y \leqslant x\}$. Определим*

$$\sigma : E \to [0, |E|] \quad \textit{по формуле} \quad \sigma(x) = |E(x)|.$$

Тогда σ является функцией, сохраняющей меру на E.

Следующая лемма доказана в работе [3].

Лемма 2.3. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x \in (0,1)$, — ортонормированная система с $|\varphi_k(x)| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любого целого числа $N \geqslant 1$ существует ортонормированная система $\{\tilde{\psi}_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и числа $N = m_0 < m_1 < \cdots < m_n$ такие, что*

$$\left\| 2M\tilde{\psi}_k(x) - \varphi_k(x) - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i \chi_i(x) \right\|_2 < \varepsilon, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

$$|\psi_k(x)| \equiv 1, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$$

где $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система Хаара, а $\{c_i\}_{i=N+1}^{m_n}$ — некоторые числа.

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L^2(0,1)$, а $f(x)$ — неотрицательная функция из $L^2(0,1)$, такая что $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда существует ортонормированная система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, с $|\psi_n(x)| \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$, такая что системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ являются сильно эквивалентными.*

Замечание 3.1. [4, Глава 8] *Если система* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\right)^{1/2}$$

для любой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2$, *то этого достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

сходился почти всюду на $(0,1)$.

Доказательство. Пусть $f(x)\in L^2(0,1)$ и определим

$$X_n=\{x\in(0,1): n-1\leqslant f(x)<n\},\qquad n=1,2,\dots.$$

Построим простую функцию $g(x)\in L^2(0,1)$ такую, что $g(x)\geqslant f(x)\geqslant\varphi_n(x)$, $n=1,2,\dots$. Положим

$$g(x)=n\quad\text{для любого } x\in X_n.$$

Очевидно, что $0<g(x)-f(x)\leqslant 1$, и

$$\|g-f\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X_n}|g(x)-f(x)|^2\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|X_n|=1.$$

Следовательно, $g(x)\in L^2(0,1)$. Это позволяет считать, что функция $f(x)$ является простой.

Предположим, что функция $f(x)$ является простой, $\mathrm{Im}(f)=\{b_1,b_2,\dots\}$, и положим $E_l:=f^{-1}(b_l)$. Ясно, что семейство $\{E_l\}_{l=1}^{\infty}$ образует разбиение интервала $(0,1)$. Пусть $\{I_l\}_{l=1}^{\infty}$ — семейство интервалов, таких что $|I_l|=|E_l|$, расположенных последовательно и образующих разбиение $(0,1)$. По лемме 2.2 построим сохраняющие меру отображения $\sigma_l\colon E_l\to I_l$, $l=1,2,\dots$, определённые на измеримых подмножествах E_l. Задавая $\sigma(x)=\sigma_l(x)$, $x\in E_l$, получаем, что для любого измеримого множества $A\subset(0,1)$ выполняется равенство

$$\int_A\varphi_n(x)\,dx=\int_{\sigma(A)}\varphi_n(\sigma(x))\,d\sigma(x).$$

Из последнего равенства следует, что система $\{\varphi_n(\sigma(x))\}_{n=1}^{\infty}$ также является ортонормированной на интервале $(0,1)$. Очевидно, что системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_n(\sigma(x))\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. Заметим, что функция $f(\sigma(x))$ является ступенчатой и $|\varphi_n(\sigma(x))|\leqslant f(\sigma(x))$. Поскольку указанные системы сильно эквивалентны, без ограничения общности можно считать, что функция $f(x)$ является ступенчатой.

Рассмотрим функцию $f(x)$ как ступенчатую. Обозначим через $I_1, I_2, \dots$ интервалы, на которых функция $f(x)$ постоянна, и пусть $b_1, b_2, \dots$ — соответствующие значения $f(x)$ на этих интервалах. Построим интервал J и ортонормированную систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$, $y \in J$, такую, что $|\tilde{\varphi}_n(y)| \leqslant 1$ и которая сильно эквивалентна системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть $J_1, J_2, \dots$ — интервалы такие, что $|J_l| = b_l^2 |I_l|$, и $\gamma_l \colon I_l \to J_l$ — линейные, возрастающие и сюръективные отображения, $l = 1, 2, \dots$. Расположим эти интервалы последовательно так, чтобы они образовывали единый интервал J, имеющий конечную меру, поскольку

$$|J| = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 |I_k| = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Определим

$$\tilde{\varphi}_k(y) = \Gamma\varphi_k(y) = \frac{\varphi_k(\gamma^{-1}(y))}{b_l}, \qquad y \in J_l.$$

Поскольку $|\varphi_k(x)| \leq b_l$ при $x \in I_l$, получаем, что $|\tilde{\varphi}_k(y)| \leq 1$ для любого $y \in J$. По лемме 2.1 система $\{\tilde{\varphi}_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является ортонормированной на интервале J и эквивалентной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Кроме того,

$$\Gamma\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right|\right)(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\Gamma\varphi_k(y)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\tilde{\varphi}_k(y)\right|, \qquad y \in J.$$

Отсюда, в сочетании с леммой 2.1, следует, что

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right|\right\|_2 = \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\tilde{\varphi}_k(x)\right|\right\|_2.$$

Следовательно, системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны.

Чтобы перенести систему $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ с интервала J на $(0,1)$, пусть $\alpha \colon J \to (0,1)$ — линейное отображение и определим

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x) = |J|^{\frac{1}{2}}\, \tilde{\varphi}_k(\alpha^{-1}(x)), \qquad x \in (0,1).$$

Тогда система $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована на $(0,1)$ и сильно эквивалентна системе $\{\tilde{\varphi}_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$.

По теореме Меншова-Марцинкевича (см. [4, Глава 8, Теорема 7]) существуют числа $0 = n_1 < n_2 < \dots$ такие, что ряд $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)$ сходится п.в. на $(0,1)$, причём

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=1}^{n_k} a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2 \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2. \tag{3.1}$$

Поскольку система $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система на $(0,1)$ и удовлетворяет оценке $|\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)| \leqslant |J|^{\frac{1}{2}} < \infty$, то по Лемме 2.3 существует система $\{\tilde{\tilde{\psi}}_i\}_{i=1}^{\infty}$ с $|\tilde{\tilde{\psi}}_i(x)| \equiv 1$ такая, что для любого $k = 1, 2, \dots$ система $\{\tilde{\tilde{\psi}}_i\}_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}$ ортонормирована и

$$\left\| 2M\tilde{\tilde{\psi}}_t(x) - \tilde{\tilde{\varphi}}_t(x) - \sum_{i=m_{t-1}+1}^{m_t} c_i \chi_i(x) \right\|_2 < \frac{1}{2^t(n_{k+1} - n_k)} \tag{3.2}$$

где $M = |J|^{\frac{1}{2}}$.

Затем мы используем теорему ортогонализации Хобби–Райса (см. [4, Глава 8, Теорема 4]): если $f_i \in L^2(0,1)$, $i = 1, 2, \dots, m$, — некоторые функции, то существует функция $\varepsilon(x)$ с $|\varepsilon(x)| \equiv 1$, ортогональная к этим функциям.

Из этой теоремы следует, что функции $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots$ можно выбрать последовательно с числами $0 = N_0 < N_1 < N_2 < \dots$ таким образом, что $|\varepsilon_k(x)| \equiv 1$ для $k = 1, 2, \dots$ и для любого $k = 1, 2, \dots$ выполняются условия

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x)\, \varepsilon_s(x)\tilde{\tilde{\psi}}_l(x)\, dx = 0, \tag{3.3}$$

$$\int_0^1 \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x)\, \chi_i(x)\, dx = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_k, \tag{3.4}$$

$$\left\| \varepsilon_k\tilde{\tilde{\psi}}_t - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} \chi_i \int_0^1 \varepsilon_k(y)\tilde{\tilde{\psi}}_t(y)\chi_i(y)\, dy \right\|_2 < \frac{1}{2^k(n_{k+1} - n_k)}, \tag{3.5}$$

где $n_k < t \leqslant n_{k+1}$, $n_s < l \leqslant n_{s+1}$, $s < k$.

Выбор $\varepsilon_1(x)$ и N_1, удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) для $k = 1$, очевиден. Предположим, что функции $\varepsilon_i(x)$ и числа N_i, $i = 1, 2, \dots, \nu$, уже выбраны. Тогда по теореме ортогонализации можно выбрать $\varepsilon_{\nu+1}$ с $|\varepsilon_{\nu+1}(x)| \equiv 1$, так чтобы условия (3.3) и (3.4) выполнялись для $k = \nu + 1$. Далее, взяв $N_{\nu+1}$ достаточно большим, обеспечивается выполнение условия (3.5) для $k = \nu + 1$.

Определим

$$\psi_t(x) = \varepsilon_k(x)\tilde{\tilde{\psi}}_t(x), \quad \text{для } n_{k-1} < t \leqslant n_k. \tag{3.6}$$

Очевидно, система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована и $|\psi_n(x)| \equiv 1$ для $n = 1, 2, \dots$.

Конструкция $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выше идентична конструкции $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в Теореме 1.3. Поэтому по Теореме 1.3 системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны.

Чтобы показать, что системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны, нужно доказать следующее неравенство

$$\frac{1}{C}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x)\right|\right\|_2 \leqslant \left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right|\right\|_2 \leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\tilde{\tilde{\varphi}}_k(x)\right|\right\|_2. \tag{3.7}$$

Теперь докажем левое неравенство в (3.7). По неравенству (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2 &\leqslant 2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2^2 + 2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2^2\\ &\leqslant 2C_0\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2 + 2\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Обозначим $\alpha_t(x) = 2M\tilde{\tilde{\psi}}_t(x) - \tilde{\tilde{\varphi}}_t(x) - \sum\limits_{i=m_{t-1}+1}^{m_t}c_i\chi_i(x)$. Тогда по (3.2) имеем

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2$$

$$\leqslant 2M\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\psi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.8}$$

$$+\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j}c_i\chi_i(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.9}$$

$$+\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\alpha_j(x)\right|\right)\right\|_2 \tag{3.10}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Теперь мы оцениваем (3.8), (3.9) и (3.10) отдельно. Используя (3.6), имеем

$$I_1 = \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right)\right\|_2 \leqslant 2\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 \tag{3.11}$$

Выражение (3.9) состоит из полинома в системе Хаара с коэффициентами a_jc_i. Кроме того,

$$\left(\sum_{i=m_j-1}^{m_j}c_j^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\sum_{i=m_j-1}^{m_j}c_i\chi_i(x)\right\|_2 \leqslant \left\|2M\tilde{\tilde{\psi}}_j(x)\right\|_2 + \left\|\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right\|_2 + \|\alpha_j(x)\|_2 \leqslant 2M+2.$$

Используя это неравенство, мы получаем, что для $n_k < n \leqslant n_{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n}\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j}(a_jc_i)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\sum_{i=m_{j-1}}^{m_j}(a_jc_i)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2 \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j} c_i^2$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j^2(2M+2)^2 = (2M+2)^2\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2 < \infty.$$

Таким образом, применяя хорошо известную теорему [4, Глава 3, Теорема 4], из последнего неравенства следует

$$I_2 \leqslant C_1\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.12}$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\alpha_j(x)\right| \leqslant \sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n}\alpha_j^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j^2(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$I_3 \leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}}\alpha_j^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_2 \tag{3.13}$$
$$\leqslant \left\|\Big(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right| \geqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)\right|$, то

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\psi_k(x)\right|\right\|_2 \geqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\psi_k(x)\right\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства вместе с (3.11), (3.12) и (3.13) получаем

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\left|\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right)\right\|_2 \leqslant C_2\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2,$$

откуда следует, что

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\tilde{\tilde{\varphi}}_j(x)\right|\right\|_2 \leqslant C\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2.$$

Теперь докажем правое неравенство в (3.7).

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 \leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 + \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}}\sum_{j=n_k+1}^{n}a_j\psi_j(x)\right)\right\|_2. \tag{3.14}$$

Для индексов, удовлетворяющих $n_k < t \leqslant n_{k+1}$ для $k = 1, 2, \ldots$, определим

$$p_t := \int_0^1 \varepsilon_k(y)\tilde{\tilde{\psi}}_t(y)\chi_i(y)\,dy \quad \text{и} \quad \beta_t(x) := \psi_t(x) - \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} p_i\chi_i(x).$$

Из (3.5) следует, что

$$\left\|\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)\right\|_2^2 \leqslant 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\psi_j(x)\right\|_2^2 + 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\beta_j(x)\right\|_2^2 \tag{3.15}$$
$$\leqslant 2\left\|\sum_{j=1}^{\infty}a_j\psi_j(x)\right\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2\sum_{j=1}^{\infty}\|\beta_j(x)\|_2^2 \leqslant 4\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2.$$

и

$$\begin{aligned}
\left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{j=1}^{n_k}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 &= \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\psi_j(x)\right|\right\|_2 \\
&= \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\left(\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)+\beta_j(x)\right)\right|\right\|_2 \\
&\leqslant \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l}p_i\chi_i(x)\right|\right\|_2 \\
&\quad + \left\|\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}}a_j\beta_j(x)\right|\right\|_2 = J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Теперь оцениваем J_1 и J_2 отдельно.

Заметим, что J_1 состоит из рядов функций Хаара, которые сходятся по (3.15). Следовательно, по теореме [4, Глава 3, Теорема 4] мы получаем

$$J_1^2 \leqslant C_3\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2. \tag{3.16}$$

Из (3.5) следует, что

$$J_2^2 \leqslant \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k-1} \left(\sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \cdot \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} \beta_j(x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 \tag{3.17}$$
$$\leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} \|\beta_j(x)\|_2^2 \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \sum_{j=n_l+1}^{n_{l+1}} a_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2.$$

Сочетая результаты в (3.16) и (3.17), мы получаем, что

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n_k} a_j \psi_j(x) \right| \right\|_2 \leqslant C_4 \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C_4 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right\|_2 \leqslant C_4 \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2.$$

Остаётся показать, что второе слагаемое в (3.14) удовлетворяет неравенству

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \psi_j(x) \right) \right\|_2 \leqslant C_5 \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2 \tag{3.18}$$

для некоторой абсолютной константы $C_5 > 0$. Согласно (3.2) и (3.6)

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \psi_j(x) \right) \right\|_2 = \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\psi}}_j(x) \right) \right\|_2$$
$$\leqslant \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right) \right\|_2$$
$$+ \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} c_i \chi_i(x) \right| \right) \right\|_2$$
$$+ \frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \alpha_j(x) \right| \right) \right\|_2.$$

Полученное выражение имеет ту же структуру, что и (3.8)–(3.10).

$$\frac{1}{2M} \left\| \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \left| \sum_{j=n_k+1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right) \right\|_2 \leqslant \frac{1}{M} \left\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\tilde{\varphi}}_j(x) \right| \right\|_2.$$

Последнее неравенство вместе с (3.12) и (3.13) подразумевает неравенство (3.18). Мы достигли того, что системы $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. Поскольку сильная эквивалентность — транзитивное отношение, то $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сильно эквивалентны. $\square$

Настоящее исследование выполнено под руководством Г. А. Карагуляна.

Abstract. For every orthonormal system of functions $\{\varphi_n\}$ on (0, 1), pointwise bounded by a function $f \in L^2(0, 1)$, that is, $|\varphi_n(x)| \leqslant f(x)$, it is possible to construct an orthonormal system $\{\psi_n\}$ with $|\psi_n(x)| \equiv 1$, such that the series $\sum a_n\varphi_n$ and $\sum a_n\psi_n$ converge almost everywhere simultaneously, for every $\{a_n\} \in \ell^2$.

Список литературы

[1] B. S. Kashin, "On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series", Jour. Anal. Math., **2**, no. 4, 249 –266 (1976).

[2] K. Tandori, "Über beschränkte orthonormierte Systeme", Jour. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **31**, no. 3–4, 279 – 285 (1978).

[3] G. A. Karagulyan, Equivalent orthonormal systems, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR Ser. Mat., **22**, no. 5, 510 – 513, 516 (1987).

[4] B. S. Kashin, A. A. Saakyan, Orthogonal Series, Translations of Mathematical Monographs, **75**, Silver, Ben, Translated from the Russian by Ralph P. Boas; Translation edited by Ben Silver, American Mathematical Society, Providence, RI (1989).

Поступила 12 августа 2025

После доработки 29 сентября 2025

Принята к публикации 10 октября 2025