Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 28 – 50.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОШИБКИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Н. БАБАЯН, М. ГИНОВЯН

Российско-Армянский Университет, Ереван, Армения,
Бостонский Университет, Бостон, США
E-mails: *nmbabayan@gmail.com; ginovyan@bu.edu*

Аннотация. В данной работе рассматривается задача линейного предсказания в среднеквадратическом смысле для класса стационарных обобщённых гауссовских процессов, обладающих спектральными плотностями. Особое внимание уделяется относительной ошибке предсказания при прогнозировании будущего значения процесса на основе конечного прошлого по сравнению с использованием всего прошлого, при условии, что рассматриваемый процесс является недетерминированным и «близким» к белому шуму. Устанавливается необходимое и достаточное условие, при котором относительная ошибка предсказания убывает до нуля с экспоненциальной скоростью. Наш подход основан на теории Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов. Ключевым фактом является то, что относительная ошибка прогнозирования может быть явно представлена с помощью так называемой «параметрической функции», которая служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности.

MSC2020 number: 60G25; 62M20; 60G10; 47B35.

Ключевые слова: стационарный обобщенный гауссовский процесс; спектральная плотность; ошибка прогнозирования; параметрическая функция; экспоненциальная скорость.

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем задачу среднеквадратичного линейного прогнозирования для класса стационарных обобщенных гауссовских процессов второго порядка, обладающих спектральной плотностью. Предполагается, что эти процессы являются среднеквадратично непрерывными, недетерминированными и «близкими» к белому шуму.

1.1. **Модель. Обобщенные стационарные процессы.** С физической точки зрения, понятие обычного стохастического процесса непрерывного времени $Y(t)$,

$t \in \mathbb{R}$, относится к измерению случайных величин в определенные моменты времени, без учета значений в другие моменты. Однако во многих случаях невозможно локализовать измерения в определенный момент времени. Как отмечают Гельфанд и Виленкин (см. [1], стр. 243), каждое фактическое измерение выполняется с помощью устройства, обладающего определенной степенью инерции (памяти). Следовательно, вместо измерения обычного процесса $Y(t)$ в отдельный момент времени устройство регистрирует определенное *«усредненное» значение* $X(\varphi)$:

$$X(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) Y(t) dt, \tag{1.1}$$

где $\varphi(t)$ — функция, характеризующая устройство. Более того, небольшие изменения в φ приводят к небольшим изменениям в $X(\varphi)$. Следовательно, мы получаем непрерывный линейный функционал, который приводит к понятию *обобщенного стохастического процесса*.

Пусть $D = D(\mathbb{R})$ — пространство бесконечно дифференцируемых вещественных функций $\varphi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ с конечной поддержкой (то есть функция $\varphi(t)$ исчезает за пределами некоторого замкнутого интервала, называемого поддержкой $\varphi(t)$ и обозначаемого $\mathrm{supp}\{\varphi\}$). Топология в D определяется следующим образом: мы говорим, что последовательность функций $\varphi_n(t) \in D$ сходится к функции $\varphi(t) \in D$ при $n \to \infty$, и записываем $\varphi_n \Rightarrow \varphi$ если $\mathrm{supp}\{\varphi_n\} \subset [a, b]$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и $\varphi_n^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ при $n \to \infty$, равномерно в $t \in [a, b]$ для всех $k = 0, 1, \ldots$.

Определение 1.1. Обобщенный стационарный процесс второго порядка $\{X(\varphi) = X(\varphi, \omega),\ \varphi \in D\}$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ является случайным линейным функционалом, таким что $E|X(\varphi)|^2 < \infty$ и для среднего функционала $m(\varphi)$ и ковариационного функционала $R(\varphi, \psi)$ выполняются условия стационарности:

$$\begin{aligned} &m(\varphi) := (X(\varphi), 1) = m(\tau_t \varphi), \quad \varphi \in D, \\ &R(\varphi, \psi) := (X(\varphi), X(\psi)) = R(\tau_t \varphi, \tau_t \psi), \quad \varphi, \psi \in D, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где τ_t — оператор сдвига: $[\tau_t \varphi](s) = \varphi(s + t)$, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L^2(P) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) := \{\xi = \xi(\omega) :\ E|\xi|^2 < \infty\}$, определенное как

$$(\xi, \eta) = E[\xi \overline{\eta}], \quad \xi, \eta \in L^2(P).$$

Мы предполагаем, что процесс $X(\varphi)$ является среднеквадратично непрерывным, то есть $E|X(\varphi_n) - X(\varphi)|^2 \to 0$ при $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ и обладает спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Таким образом, ковариационный функционал (1.2) является непрерывным по каждому из аргументов и допускает следующее спектральное представление (см., например, [1], стр. 264):

$$R(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda)\overline{\hat{\psi}(\lambda)} f(\lambda)\, d\lambda, \quad \varphi, \psi \in D,$$

где $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ являются преобразованиями Фурье от функций φ и ψ, соответственно, и для некоторого $p \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda^2)^p}\, d\lambda < \infty. \tag{1.3}$$

Обратите внимание, что в случае $p = 0$ речь идет об обычных процессах с непрерывным временем.

Определение 1.2. Вещественный обобщенный процесс $\{X(\varphi), \varphi \in D\}$ называется гауссовским со средним функционалом $m(\varphi)$ и ковариационным функционалом $R(\varphi, \psi)$,если его характеристический функционал $\Phi(\varphi) := E[\exp\{iX(\varphi)\}]$ имеет вид (Гельфанд и Н. Виленкин [1], стр. 261):

$$\Phi(\varphi) = \exp\left\{ im(\varphi) - \frac{1}{2}R(\varphi, \varphi) \right\}, \quad \varphi \in D.$$

Определение 1.3. Вещественный стационарный гауссовский обобщенный процесс $\varepsilon(\varphi)$ с нулевым средним значением и ковариационной функцией, равной дельта-функции (обобщенная функция, определяемая как $\delta(\varphi) = \varphi(0)$) называется белым шумом (Гельфанд и Н. Виленкин [1], стр. 261).

Белый шум является производной процесса Винера, и его характеристический функционал определяется следующим образом ([1], стр. 261):

$$\Phi_\varepsilon(\varphi) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi^2(t)dt \right\}, \quad \varphi \in D.$$

Поскольку дельта-функция является преобразованием Фурье с мерой Лебега, спектральная плотность белого шума равна $f(\lambda) = 1$.

Замечание 1.1. Очевидно, что класс обобщенных процессов включает в себя класс всех обыкновенных стационарных процессов с непрерывным временем. В то же время он также содержит нестандартные процессы, которые не определены в классическом смысле. Примером такого процесса является вышеописанный белый шум.

Замечание 1.2. Если $Y(t)$ является вещественным обыкновенным среднеквадратичным непрерывным стационарным процессом, таким что $E|Y(t)|^2 \leq p(t)$ для некоторого многочлена $p(t)$, то интеграл в (1.1) хорошо определен и определяет вещественный обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ ([1], стр. 257). С другой стороны, обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ заданный (1.1) однозначно определяет обычный процесс $Y(t)$, то есть, если $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются двумя обычными средне-непрерывными стационарными процессами, порождающими (1.1) один и тот же обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$, то $Y_1(t) = Y_2(t)$ с вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{R}$. В этом случае мы будем говорить, что обобщенный стационарный процесс $X(\varphi)$ является обычным процессом, и будем отождествлять процессы $X(\varphi)$ и $Y(t)$. Также обратите внимание, что для обычных стационарных процессов условие (1.3) выполняется при $p = 0$, и, наоборот, если условие (1.3) выполняется при $p = 0$, то процесс $X(\varphi)$ должен быть представлен в виде (1.1), где $Y(t)$ — обычный процесс (см. [2]).

1.2. **Проблема прогнозирования.** Пусть $H := H(X) \subset L^2(P)$ — гильбертово пространство, порожденное процессом $\{X(\varphi); \varphi \in \mathbb{D}\}$. Для $a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, обозначим $H_a^b := H_a^b(X)$ подпространство H, построенное случайными переменными $X(\varphi)$ с $\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset [a, b]$. Обозначим $P_{[a,b]}$ оператором ортогональной проекции $H(X)$ на подпространство $H_a^b(X)$, а $P_{[a,b]}^{\perp}$ ортогональной проекцией $H(X)$ на ортогональное дополнение $H_a^b(X)$, то есть, $P_{[a,b]}^{\perp}\xi = \xi - P_{[a,b]}\xi$ для $\xi \in H(X)$. Тогда для любого $r > 0$ проекция $P_{[-r,0]}X(\varphi)$ может рассматриваться как лучший среднеквадратичный линейный предсказатель случайной величины $X(\varphi)$ на основе прошлого длины $r : H_{-r}^0(X)$, и

$$\sigma^2(f; r) = \mathbb{E}|P_{[-r,0]}^{\perp}X(\varphi)|^2 = \mathbb{E}|X(\varphi) - P_{[-r,0]}X(\varphi)|^2$$

как его ошибку прогнозирования. Аналогично,

$$\sigma^2(f) = \mathbb{E}|P_{[-\infty,0]}^{\perp}X(\varphi)|^2$$

может рассматриваться как ошибка прогнозирования $X(\varphi)$ на основе бесконечного прошлого $H_{-\infty}^0(X)$.

Определение 1.4. Обобщенный стационарный процесс $\{X(\varphi) : \varphi \in \mathbb{D}\}$ называется регулярным (или недетерминированным), если $\sigma^2(f) > 0$, и сингулярным (или детерминированным), если $\sigma^2(f) = 0$.

Следующее утверждение представляет собой спектральную характеристику регулярных и сингулярных обобщенных стационарных процессов, которое является версией хорошо известной альтернативы Колмогорова-Крейна для обычных процессов в непрерывном времени (см., например, Ибрагимов и Розанов [3], стр. 57, и Розанов [4, 5]).

Утверждение 1.1. *Для обобщенного стационарного процесса $\{X(\varphi) : \varphi \in \mathbb{D}\}$ со спектральной плотностью $f(\lambda)$, справедливы следующие утверждения.*

(a) $X(\varphi)$ *является регулярным тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} > -\infty. \tag{1.4}$$

(b) $X(\varphi)$ *является сингулярным тогда и только тогда, когда*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} = -\infty. \tag{1.5}$$

Пусть теперь H_1 и H_2 — два подпространства H, а P_1 и P_2 — ортогональные проекционные операторы в H на H_1 и H_2 соответственно. Рассмотрим функционал

$$\tau(H_1, H_2) = \mathrm{tr}[P_1 P_2 P_1],$$

где $\mathrm{tr}[A]$ обозначает след оператора A. Ясно, что

$$\tau(H_1, H_2) = \tau(H_2, H_1).$$

Заметим, что подпространства H_1 и H_2 ортогональны тогда и только тогда, когда $P_1P_2P_1 = 0$ (или, что эквивалентно, $P_2P_1P_2 = 0$) (см., например, [3], стр. 113).

Функционал $\tau(H_1, H_2)$ оценивает, насколько подпространства H_1 и H_2 далеки от взаимной ортогональности.

Замечание 1.3. Оператор $P_1P_2P_1$ известен как канонический оператор корреляции, соответствующий паре подпространств (H_1, H_2). Он был введен в теорию стохастических процессов Гельфандом и Ягломом [6]. Связь между этим оператором и задачей прогнозирования рассматривалась в работах Гельфанда и

Яглома [6], а также Яглома [7]. Оператор $P_1P_2P_1$ играет важную роль в характеристике различных классов регулярности стационарных гауссовских процессов. Подробное обсуждение этой темы можно найти в [3], Раздел IV.2.

Для $r, s \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ мы устанавливаем

$$\begin{aligned}\tau(f; r, s) &= \tau(H^0_{-r}, H^s_0),\\ \tau(f; s) &= \tau(H^0_{-\infty}, H^s_0),\\ \delta(f; r, s) &= \tau(f; s) - \tau(f; r, s).\end{aligned}$$

Очевидно, что $\delta(f; r, s)$ является неотрицательным и стремится к нулю при $r \to \infty$ для любого фиксированного s. Величина $\delta(f; r, s)$ служит естественной мерой точности прогнозирования случайной величины $\xi \in H^s_0$ на основе наблюдаемых значений $\eta \in H^0_{-r}$ (прошлое длиной r), по сравнению с их прогнозом на основе наблюдаемых значений $\eta \in H^0_{-\infty}$ (все прошлое).

Естественно определить величину

$$\delta(f; r) := \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\ \delta(f; r, s) \tag{1.6}$$

как *относительную ошибку прогнозирования* при прогнозировании случайной величины $\xi \in H^s_0$ с использованием прошлого длины r, по сравнению с прогнозом на основе всего прошлого. Очевидно, что $\delta(f; r) \geq 0$ и

$$\delta(f; r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

В данной работе мы сосредоточимся на оценке скорости, с которой ошибка предсказания $\delta(f; r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$, исходя из свойств спектральной плотности $f(\lambda)$. Мы предполагаем, что основной процесс $X(\varphi)$ является недетерминированным, то есть спектральная плотность $f(\lambda)$ от $X(\varphi)$ удовлетворяет условию (1.4). Кроме того, мы считаем, что $X(\varphi)$ «близко» к белому шуму в том смысле, что $f(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию (см. Месропян [8, 9], Солев [10]):

$$1 - f(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

Проблема асимптотического поведения среднеквадратичной погрешности прогнозирования для обычных стационарных процессов в непрерывном времени была рассмотрена в работах Аримото [11], Хаяси [12], Иноуэ и Касахара [13], и Касахара [14]. Эти авторы использовали метод «последовательных проекций на бесконечное прошлое и будущее», основанный на формуле Дима–Сежье и теореме фон Неймана о попеременных проекциях (см. Дима [15], Сежье [16], и Пурахмади [17], Раздел 9.6.3).

Наш подход к решению этой проблемы основан на теории Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов на единичной окружности (см., например, Солев [10], Ахиезер [18], Крейн [19, 20] и ссылки в них). Ключевым фактом является то, что относительная ошибка предсказания $\delta(f;r)$ может быть явно представлена с помощью так называемой «параметрической функции», которая служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности (см. Предложение 3.5 и Замечания 3.2 и 3.3). Некоторые аспекты этого подхода были рассмотрены в работах Месропяна [8, 9], Солева [10], Гиновяна и Микаеляна [21].

В частности, Месропян [9] доказал, что для стационарных обобщенных гауссовских процессов с короткой памятью, а именно, когда спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена вдали от нуля и бесконечности, асимптотическое поведение ошибки прогнозирования $\delta(f;r)$ определяется дифференциальными (гладкостными) свойствами спектральной плотности $f(\lambda)$. Были получены необходимые и достаточные условия для скорости убывания $\delta(f;r)$ до нуля при $r\to\infty$. В работе Гиновяна и Микаеляна [21] асимптотическое поведение $\delta(f;r)$ анализируется в случаях, когда спектральные плотности процессов имеют нули, указывающие на антиперсистентный процесс, или полюса, указывающие на процесс с длинной памятью. Используя технику усеченных операторов Винера-Хопфа, авторы получили явные выражения и асимптотические формулы для $\delta(f;r)$. Результаты Гиновяна и Микаеляна [21] показывают, что асимптотическое соотношение

$$\delta(f;r)\sim\frac{1}{r}\quad\text{при}\quad r\to\infty \tag{1.8}$$

выполняется всякий раз, когда спектральная плотность f основного процесса имеет по крайней мере одну особенность (либо нуль, либо полюс) степенного типа.

Основная цель данной статьи — установить необходимое и достаточное условие для экспоненциального убывания $\delta(f;r)$ к нулю при $r\to\infty$.

Остальная часть статьи организована следующим образом: В Разделе 2 мы представляем основной результат статьи — Теорему 2.1. В Разделе 3 мы обсуждаем несколько вспомогательных результатов из теории комплексных функций, включая целые функции экспоненциального типа, аналитические функции в полосе, пространства Харди и теорию Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов. Мы также доказываем результат, касающийся наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа. В Разделе 4 мы доказываем основной результат.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения. Под $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_\infty$ мы обозначаем нормы в пространствах $L^p(\mathbb{R})$ и $L^\infty(\mathbb{R})$, соответственно. Для функции $\varphi(z)$ комплексной переменной $z=\lambda+i\mu$, обозначим через $\varphi_\mu(\lambda)$ функцию $\varphi(\lambda+i\mu)$ для фиксированного действительного μ.

2. Основной результат

Мы предполагаем, что процесс $X(\varphi)$ является недетерминированным и «близок» к белому шуму, то есть спектральная плотность f процесса $X(\varphi)$ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.7).

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ обобщенного стационарного гауссовского процесса $X(\varphi)$ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.7), а $\delta(f;r)$ определяется как в уравнении (1.6). Тогда необходимым и достаточным условием для*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{\delta(f,r)} \leqslant e^{-b}, \quad b>0 \tag{2.1}$$

является то, что $f(\lambda)$ почти везде совпадает с непрерывной функцией, ограниченной от нуля и бесконечности, и функция $1/f(\lambda)$ допускает представление:

$$1/f(\lambda) = 1+\psi(\lambda), \tag{2.2}$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция в полосе $|\mathrm{Im} z|<b$, удовлетворяющая условию: $\psi_\mu(\lambda)=\psi(\lambda+i\mu)\in L^2(\mathbb{R})$ для любого μ в $|\mu|<b$.

Замечание 2.1. Аналог Теоремы 2.1 для дискретных процессов впервые был доказан Гренандером и Розенблаттом [22] (см. также Гренандер и Сегё [23]). Впоследствии он был расширен Ибрагимовым [24] (см. также Голинский [25]).

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе мы представляем несколько известных результатов из теории комплексных функций, включая целые функции экспоненциального типа, аналитические функции в полосе, пространства Харди и теорию Крейна о непрерывных аналогах ортогональных многочленов (см., например, Крейн [19, 20], Ахиезер [26], Хоффман [27], Никольский [28], Дим и МакКеан [29], а также Пэли и Винер [30]). Кроме того, мы доказываем результат, касающийся наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа, который служит непрерывным аналогом обратного утверждения теоремы Бернштейна. Эти результаты будут использованы в доказательстве Теоремы 2.1.

3.1. **Все функции экспоненциального типа.** Функция $\varphi(z)$ называется целой функцией экспоненциального типа r, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует константа A_ε такая, что

$$|\varphi(z)| \leq A_\varepsilon \exp\{(r+\varepsilon)|z|\}.$$

Класс всех целых функций экспоненциального типа не превышающих r обозначим через $\mathcal{E}_r$. Рассмотрим два класса целых функций. Класс Пэли-Винера целых функций экспоненциального типа не более r, обозначенный как PW_r, определяется как множество функций $\varphi(z) \in \mathcal{E}_r$ ограничения которых на $\mathbb{R}$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$. В частности,

$$PW_r := \{\varphi(z) \in \mathcal{E}_r : \|\varphi(\lambda)\|_2 < \infty, \quad z = \lambda + i\mu\}.$$

Мы также определим

$$B_r := \{\varphi(z) \in \mathcal{E}_r : \|\varphi(\lambda)\|_\infty < \infty, \quad z = \lambda + i\mu\}.$$

Для функций $\varphi(z) \in PW_r$ выполняются следующие неравенства Бернштейна (см., например, Ахиезер [26], Раздел 4.73, и Никольский [28], Разделы 3.2.2 и 3.3.5):

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \sqrt{r}\|\varphi\|_2, \tag{3.1}$$

$$\|\varphi'\|_2 \leq r\|\varphi\|_2, \tag{3.2}$$

$$\|\varphi_\mu\|_2 \leqslant e^{r|\mu|}\|\varphi\|_2. \tag{3.3}$$

Следующее утверждение, известное как теорема Пэли-Винера, характеризует пространство PW_r (см., например, Ахиезер [26], Раздел 4.72, стр.134).

Утверждение 3.1 (Пэли-Винер)**.** *Класс Пэли-Винера PW_r совпадает с множеством целых функций $\varphi(z)$ допускающих представление:*

$$\varphi(z) = \int_{-r}^{r} e^{itz}\check{\varphi}(t)\,dt,$$

где $\check{\varphi}(t) \in L^2(-r,r)$.

Для функции $\varphi(z)$ $(z = \lambda + i\mu)$ из класса B_r, выполняются следующие неравенства Бернштейна (см. [26], Раздел 4.73, и [28], Разделы 3.2.2 и 3.3.5):

$$\|\varphi'(\lambda)\|_\infty \leqslant r\|\varphi(\lambda)\|_\infty, \tag{3.4}$$

$$\|\varphi_\mu(\lambda)\|_\infty \leqslant e^{r|\mu|}\|\varphi(\lambda)\|_\infty, \tag{3.5}$$

$$\|\varphi'_\mu(\lambda)\|_\infty \leqslant re^{r|\mu|}\|\varphi(\lambda)\|_\infty. \tag{3.6}$$

3.2. **Аналитические функции в полосе. Пространства Харди.** Под A_a^b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, обозначаем множество функций $\varphi(z)$, $z = \lambda + i\mu$, которые являются аналитическими в полосе $a < \mu < b$, для которых нормы $\|\varphi_\mu\|_2$ равномерно ограничены в μ для $a < \mu < b$.

Пусть $\mathcal{H}^{2+}$ обозначает класс Харди в верхней полуплоскости, то есть, $\mathcal{H}^{2+}$ — это множество всех аналитических функций $\varphi(z)$ в верхней полуплоскости $\{z;\, \mathrm{Im}z > 0\}$ таких, что (см., например, Хоффман [27], стр. 121):

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(\lambda + i\mu)|^2\,d\lambda \le M < \infty, \quad \mu > 0,$$

где константа M не зависит от μ. Известно (см., например, Хоффман [27], стр. 123), что если $\varphi(z) \in \mathcal{H}^{2+}$, то почти для всех λ существует предел

$$\varphi(\lambda) = \lim_{\mu\to 0}\varphi(\lambda + i\mu)$$

и граничное значение $\varphi(\lambda)$ от $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям:

$$\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)|\frac{dt}{1+t^2} > -\infty, \tag{3.7}$$

$$\log|\varphi(\lambda + i\mu|) \le \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)|\frac{dt}{(\lambda - t)^2 + \mu^2}, \quad \mu > 0.$$

Аналогично можно определить класс Харди $\mathcal{H}^{2-}$ в нижней полуплоскости $\{z;\, \mathrm{Im}z < 0\}$. Заметим, что $\varphi(z) \in \mathcal{H}^{2+}$ тогда и только тогда, когда сопряженная функция $\varphi^*(z) := \overline{\varphi(\overline{z})}$ принадлежит классу $\mathcal{H}^{2-}$. Кроме того, классы $\mathcal{H}^{2+}$ и $\mathcal{H}^{2-}$ совпадают с A_0^∞ и $A_{-\infty}^0$, соответственно (см., например, Хоффман [27]).

Следующее утверждение, которое является еще одной хорошо известной теоремой Пэли-Винера, характеризует пространство $\mathcal{H}^{2+}$ с точки зрения преобразований Фурье (см., например, Хоффман [27], стр. 131, и Пэли и Винер [30], Теорема V, стр. 8).

Утверждение 3.2 (Пэли-Винера)**.** *Пространство $\mathcal{H}^{2+}$ совпадает с множеством аналитических в верхней полуплоскости $\{z; \mathrm{Im}z > 0\}$ функций $\varphi(z)$, допускающих представление*

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{itz}\check{\varphi}(t)\,dt, \quad \mathrm{Im}z > 0,$$

где $\check{\varphi}(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Функция $\varphi \in \mathcal{H}^{2+}$ называется внешней, если для $\mu > 0$

$$\log|\varphi(\lambda + i\mu|) = \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \log|\varphi(t)| \frac{dt}{(\lambda - t)^2 + \mu^2}.$$

Пусть $\varphi(\lambda)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условию (3.7). Тогда функция

$$g(\varphi, z) := \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{1+tz}{t-z} \cdot \frac{\log\varphi(t)}{1+t^2}\,dt\right\}$$

является внешней функцией из класса $\mathcal{H}^{2+}$ и ее граничное значение $g(\varphi, \lambda)$ удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = |g(\varphi, \lambda)|^2 \quad \text{для почти всех} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нам также понадобятся следующие два утверждения, доказательство которых можно найти в работе Хоффмана [27], стр. 123-124.

Утверждение 3.3. *Пусть $f(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) — измеримая функция, удовлетворяющая условию $f(\lambda)/(1+\lambda^2) \in L^1(\mathbb{R})$. На верхней полуплоскости $\{z; \mathrm{Im}z > 0\}$ определим функцию:*

$$F(z) = F(\lambda + i\mu) := \frac{\lambda}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{dt}{(t-\lambda)^2 + \mu^2}. \tag{3.8}$$

Тогда верны следующие утверждения.

(а) *Функция $F(z)$ является комплекснозначной гармонической функцией на верхней полуплоскости и имеет пределы по нетангенциальным направлениям, которые совпадают с f почти во всех точках $\mathbb{R}$.*

(б) *Если в представлении (3.8) функция f принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, то нормы $\|F_\mu\|_2$ равномерно ограничены в $\mu > 0$, где $F_\mu(\lambda) := F(\lambda + i\mu)$.*

Замечание 3.1. Если функция f является сжатием на $\mathbb{R}$ некоторой аналитической функции в полуплоскости $\Im z > -\varepsilon$, то из этого не следует, что функция $F(z)$ определённая формулой (3.8) является аналитической. Чтобы это обеспечить, необходимо наложить ограничение на поведение аналитической функции в бесконечности. Например, любая ограниченная аналитическая функция может быть восстановлена по своим граничным значениям с помощью формулы (3.8).

3.3. **Результат об асимптотике наилучшего приближения.** Для измеримой функции F в $\mathbb{R}$, обозначим через $E_r(F)$ ее наилучшую аппроксимацию функциями $\varphi_r(\lambda)$ из класса $\mathcal{E}_r$ в метрике пространства $L^2(\mathbb{R})$:

$$E_r(F) := \inf_{\varphi_r \in \mathcal{E}_r} \|F(\lambda) - \varphi_r(\lambda)\|_2. \tag{3.9}$$

Следующая теорема расширяет обратное утверждение теоремы Бернштейна (см. Ахиезер [26], Раздел 5.96, стр. 221) к пространству $L^2(\mathbb{R})$. Устанавливается связь между свойствами гладкости функции F и скоростью убывания ее наилучших аппроксимаций $E_r(F)$.

Теорема 3.1. *Необходимое и достаточное условие для*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{E_r(F)} \leqslant e^{-b}, \quad b > 0 \tag{3.10}$$

является то, что F может быть представлено как

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda) + \psi(\lambda), \tag{3.11}$$

где $\varphi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_{r_0}$ для некоторого r_0, и $\psi(z) \in A^b_{-b}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняется представление (3.11). Ясно, что $E_r(F) = E_r(\psi)$ для $r \geqslant r_0$. Кроме того, функция, которая дает наилучшее приближение для функции $\psi(\lambda)$, имеет следующий вид:

$$\varphi_r(\lambda) = \int_{-r}^{r} e^{it\lambda} \check{\psi}(t) dt,$$

где

$$\check{\psi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \psi(\lambda) d\lambda$$

является преобразованием Фурье от ψ. Следовательно, мы имеем

$$E_r^2(\psi) = \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 dt.$$

Из Теоремы IV Пэли и Винера [30] следует, что для любого $b' < b$ выполняются следующие соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{-2b't} dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b't} dt < \infty.$$

Следовательно, при константе $C > 0$ мы можем записать

$$\begin{aligned} E_r^2(\psi) &= \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 dt \leqslant \frac{1}{e^{2b'r}} \int_{|t|>r} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b'|t|} dt \\ &\leqslant e^{-2b'r} \left(\int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{2b't} dt + \int_{\mathbb{R}} |\check{\psi}(t)|^2 e^{-2b't} dt \right) \leqslant C e^{-2b'r}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\varlimsup_{r\to\infty} \sqrt[r]{E_r(F)} \leqslant e^{-b'}. \tag{3.12}$$

Поскольку число b' может быть выбрано сколь угодно близким к b, из (3.12) получаем желаемое соотношение (3.10).

Необходимость. Возьмем произвольное положительное число b' такое, что $b' < b$. Затем, согласно условию (3.10), выберем число r_0 таким, что для любого $r \geqslant r_0$ найдется функция $\Phi_r(z) \in \mathcal{E}_r$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\|F - \Phi_r\|_2 \leq e^{-rb'}. \tag{3.13}$$

Устанавливая

$$\varphi(z) := \Phi_{r_0}(z) \quad \text{и} \quad \varphi_k(z) := \Phi_{r_0+k}(z) - \Phi_{r_0}(z), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

с учетом (3.13), мы можем записать

$$\|\varphi_k\|_2 \leqslant \|\Phi_{r_0+k} - F\|_2 + \|F - \Phi_{r_0+k-1}\|_2 \leqslant e^{-(r_0+k-1)b'} \tag{3.14}$$

что означает, что $\varphi_k \in PW_{r_0+k}$.

Далее, из соотношений (3.1) и (3.14) следует, что

$$\|\varphi_k\|_\infty \leqslant 2\sqrt{r_0 + k}\, e^{-(r_0+k-1)b'}. \tag{3.15}$$

Следовательно, для функции F имеем следующее равномерно сходящееся разложение:

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\lambda).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z), \quad z = \lambda + i\mu, \quad |\mu| < b'. \tag{3.16}$$

С учетом соотношений (3.5) и (3.15) имеем

$$|\varphi_k(z)| \leqslant 2\sqrt{r_0+k}e^{-(r_0+k-1)b'}\, e^{(r_0+k)\mu}.$$

Следовательно, ряд в (3.16) равномерно и абсолютно сходится в любой полосе $|\mu| < b_1$, $b_1 < b'$. В результате сумма ряда в (3.16), обозначенная как $\psi(z)$, является аналитической функцией в полосе $|\mu| < b'$.

Далее, учитывая неравенства (3.3) и (3.14), мы приходим к выводу, что $\|\psi_\mu\|_2 < \infty$ для $|\mu| < b_1$, $b_1 < b'$.

Взяв число b^* такое, что $b' < b^* < b$, и повторив те же построения, которые мы применили для b', мы приходим к выводу, что функция $\psi(z)$ является аналитической не только в полосе $|\mu| < b'$, но и в полосе $|\mu| < b$. Кроме того,

$$\|\psi_\mu\|_2 < \infty, \quad |\mu| < b_1$$

справедливо не только для любого $b_1 < b'$, но и для любого $b' < b$. Теорема 3.1 доказана. □

3.4. **Функции Крейна. Формулы для ошибки прогнозирования** $\delta(f;r)$**.** В этом подразделе мы представляем формулы для ошибки прогнозирования $\delta(f;r)$. Для этого сначала определим и обсудим некоторые свойства *функций Крейна*, которые являются непрерывными аналогами ортогональных многочленов на единичной окружности и связаны со спектральной плотностью (весовой функцией) $f(\lambda)$ (см., например, Месропян [8], Солев [10], Ахиезер [18], Крейн [19, 20], и Гиновян и Микаелян [21]).

1. Функции Крейна. Пусть $f(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ неотрицательная функция, удовлетворяющая условию (1.7). Тогда преобразование Фурье $H(f;t)$ функции $1-f(\lambda)$, заданной формулой

$$H(t) := H(f;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}[1-f(\lambda)]e^{-it\lambda}\,d\lambda$$

хорошо определена. В гильбертовом пространстве $L^2(0,r)$ $(r > 0)$ рассмотрим следующий интегральный оператор, порожденный функцией $f(\lambda)$:

$$(W_r(f)\varphi)(t) = \varphi(t) + \int_0^r H(t-s)\varphi(s)\,ds, \quad 0 < t < r.$$

Оператор $W_r(f)$ называется усеченным оператором Винера-Хопфа (или усеченным оператором Тёплица), а порождающая функция $f(\lambda)$ овозначается символом $W_r(f)$.

Важно отметить, что для любого $r > 0$ оператор $W_r(f)$ является самосопряженным и компактным. Кроме того, хорошо известно (см. Ахиезер [18], Крейн [19]) что для любого положительного числа r, для эрмитового ядра $H(f; t-s)$ $(0 \le t, s \le r)$ существует эрмитовый резольвент:

$$\Gamma_r(t,s) = \overline{\Gamma_r(s,t)}, \quad 0 \le t, s \le r, \quad r > 0,$$

удовлетворяющий уравнению

$$\Gamma_r(t,s) + \int_0^r H(t-u)\Gamma_r(u,s)\,du = H(t-s), \quad 0 \le t, s \le r. \tag{3.17}$$

Кроме того, функция $\Gamma_r(t,s)$ является совместно непрерывной по r, t, s, непрерывно дифференцируемой по r, и удовлетворяет следующим условиям:

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(r-s, r-t) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_r(t,s) = -\Gamma_r(t,r)\Gamma_t(r,s), \tag{3.19}$$

где $0 \le t, s \le r$ и $0 \le r < \infty$.

Обозначим $\Gamma_r(t) := \Gamma_r(t,0)$ и для $0 \le r < \infty$ определим

$$P(r,\lambda) := e^{ir\lambda}\left(1 - \int_0^r \Gamma_r(t)e^{-it\lambda}\,dt\right). \tag{3.20}$$

Функции $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$, известные как функции Крейна, были первоначально введены Крейном в [19]), как непрерывные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности.

Заметим, что функции $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$ имеют экспоненциальный тип r и обладают следующим свойством ортонормированности:

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{P(s,\lambda)}P(t,\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \delta(t-s),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция.

Таким образом, функции Крейна уже нормированы и соответствуют унитарным ортогональным многочленам на единичной окружности.

Мы также вводим «обратные» функции $\{P_*(r,\lambda),\ r \ge 0\}$, которые являются [*]-преобразованиями функций $\{P(r,\lambda),\ r \ge 0\}$:

$$P_*(r,\lambda) := [*](P(r,\lambda)) = e^{ir\lambda}\overline{P(r,\lambda)} = 1 - \int_0^r \Gamma_r(0,s)e^{is\lambda}\,ds. \tag{3.21}$$

Заметим, что функции $\{P_*(r,\lambda),\ r \ge 0\}$ являются экспоненциального типа не превышающим r.

Определим преобразование:

$$\widehat{\varphi}(z) = \int_0^\infty \varphi(t)P(t,z)dt, \quad \varphi(t) \in L^2(0,\infty).$$

Кроме того, через $L^2_f(\mathbb{R})$ обозначим взвешенное L^2 пространство, построенное по мере $f(\lambda)d\lambda$, и определим $H^+(f) := \mathcal{H}^{2+} \cap L^2_f(\mathbb{R})$. Доказательство следующего предложения можно найти в работе Крейна [19].

Утверждение 3.4. *Для любой конечной функции $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, имеем*

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^\infty |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda.$$

Отображение $V : \varphi \to \hat{\varphi}$ порождает унитарную изометрию V из пространства $L^2(\mathbb{R}^+)$ на подпространство $H^+(f)$.

Определение 3.1. *Функция $a(r)$ определяемая как*

$$a(r) = \Gamma_r(0,r), \quad r > 0, \tag{3.22}$$

называется параметрической функцией, связанной с системой функций Крейна $\{P(r,\lambda),\, r \ge 0\}$.

Замечание 3.2. Параметрическая функция $a(r)$ связанная с функциями Крейна, служит непрерывным аналогом коэффициентов Верблунского (или параметров отражения), связанных с ортогональными многочленами на единичной окружности.

Замечание 3.3. Параметрическая функция $a(r)$ играет ключевую роль в теории прогнозирования обобщенных стационарных процессов. В Предложении 3.5 ниже мы показываем, что относительная погрешность прогнозирования $\delta(f;r)$ может быть явно представлена с помощью функции $a(r)$. Однако важно отметить, что даже для простых моделей нахождение $a(r)$ не является легкой задачей. Хорошо известным тривиальным случаем является модель белого шума, где $f(\lambda) \equiv 1$. В этом случае имеем $\Gamma_r(t,s) = 0$, $a(r) = 0$, $P(r,\lambda) = \exp(i\lambda r)$, и $P_*(r,\lambda) = 1$ (см., например, Сахнович [31]). В работе Гиновяна и Микаеляна [21] функции $\Gamma_r(t,s)$ и $a(r)$ были вычислены с помощью метода усеченных операторов Винера-Хопфа для двух нетривиальных моделей: в частности, моделей ARMA(1,1) и ARMA(2,2) с непрерывным временем.

Мы перечислим некоторые свойства параметрической функции $a(r)$ (см. Солев [10], Ахиезер [18] и Крейн [19, 20]).

1. Из уравнений (3.17), (3.19) и (3.22) следует, что параметрическая функция $a(r)$ является непрерывной и удовлетворяет следующему равенству:
$$\Gamma_r(0,0) = \Gamma_0(0,0) - \int_0^r |a(t)|^2\, dt = H(0) - \int_0^r |a(t)|^2\, dt.$$
2. Из уравнений (3.18) – (3.22), получаем следующую систему дифференциальных уравнений, известную как система Крейна. Эта система служит непрерывным аналогом рекуррентных отношений Сего-Левинсона- Дурбина в случае дискретного времени.

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r,\lambda) = i\lambda P(r,\lambda) - \overline{a(r)} P_*(r,\lambda), \quad P(0,\lambda) = 1, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} P_*(r,\lambda) = -a(r) P(r,\lambda), \qquad P_*(0,\lambda) = 1. \tag{3.24}$$

3. Условия $a(t) \in L^2(\mathbb{R})$ и (1.4) эквивалентны.

Если функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.4), то на любом компактном подмножестве открытой верхней полуплоскости $\{z : \mathrm{Im} z > 0\}$, существует равномерный предел:
$$\Pi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} P_*(r_n, \lambda),$$
для последовательности $r_n \to \infty$. Кроме того, $\Pi(\lambda)$ является внешней функцией из пространства Харди H^{2+}, с граничными значениями, удовлетворяющими

$$|\Pi(\lambda)|^{-2} = f(\lambda) \quad \text{п.в. в} \quad \mathbb{R}. \tag{3.25}$$

Также выполняются следующие соотношения:

$$1 - \Pi(z) = \int_0^\infty a(t) P(t,z) dt, \quad \mathrm{Im} z > 0 \quad \text{если} \quad a(t) \in L^2[0,\infty), \tag{3.26}$$

$$|\Pi(z)|^{\pm 1} \le \exp\left\{\int_0^\infty |a(t)| dt\right\}, \quad \mathrm{Im} z > 0 \quad \text{если} \quad a(t) \in L^1[0,\infty), \tag{3.27}$$

Кроме того, если $a(t) \in L^1[0,\infty)$, то функция $\Pi(\lambda)$ является непрерывной.

2. Формулы для ошибки предсказания $\delta(f;r)$. В следующем предложении представлены формулы для ошибки предсказания $\delta(f;r)$. Доказательство можно найти в работе Месропяна [8] (см. также Солев [10]).

Утверждение 3.5. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям (1.4) и (1.7), а $\delta(f;r)$ определяется как в уравнении (1.6). Тогда выполняются следующие равенства:*

$$\delta(f;r) = \int_r^\infty |a(t)|^2\, dt = \int_{\mathbb{R}} |\Pi(\lambda) - P_*(r,\lambda)|^2 f(\lambda)\, d\lambda. \tag{3.28}$$

Доказательство следующего предложения можно найти в работе Месропяна [9].

Утверждение 3.6. *Пусть спектральная плотность $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям* (1.4) *и* (1.7). *Если*

$$\int_0^\infty r^{-1/2}\delta^{1/2}(f,r)dr < \infty, \tag{3.29}$$

тогда $a(r) \in L^1[0,\infty)$ и $f(\lambda)$ почти всюду совпадает с непрерывной функцией, которая ограничена вдали от нуля и бесконечности. В частности, $0 < m \leqslant f(\lambda) \leqslant M < \infty$, где m и M — константы.

4. Доказательство Теоремы 2.1

Мы предположим, что условие (2.1) выполняется, и покажем, что $f(\lambda)$ ограничено от нуля и бесконечности, а функция $1/f$ допускает представление (2.2). Для этого сначала заметим, что при условии (2.1) ошибка предсказания $\delta(f,r)$ также удовлетворяет (3.29). Следовательно, с учетом Предложения 3.6, имеем

$$a(r) \in L^1[0,\infty). \tag{4.1}$$

Условие (4.1) подразумевает (3.27), что означает, что функция $\Pi(z)$, $\mathrm{Im} z \geqslant 0$, и, в частности, функция $\Pi(\lambda)$ ограничены от нуля и бесконечности.

Далее, поскольку $a(r)$ является непрерывной функцией, вместе с (4.1), мы также имеем $a(r) \in L^2[0,\infty)$, что подразумевает (3.26). Следовательно, с учетом (3.26) и Предложения 3.4, мы получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |1-\Pi(\lambda)|^2 f(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty |a(t)|^2 dt < \infty,$$

и, следовательно, учитывая (3.25), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |1-\Pi^{-1}(\lambda)|^2 d\lambda = \int_0^\infty |a(t)|^2 dt < \infty.$$

Таким образом, учитывая Предложение 3.3 и Замечание 3.1, мы приходим к выводу, что функция

$$u(z) := 1 - \Pi^{-1}(z)$$

принадлежит пространству H^{2+}.

Учитывая ограниченность функции $\Pi(z)$, функция

$$v(z) := \Pi(z) - 1 = \Pi(z)u(z).$$

также принадлежит пространству H^{2+}.

По теореме Пэли-Винера (Предложение 3.2), функция v может быть представлена в виде:

$$v(z) = \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt,$$

где $\check{v}(t) \in L^2[0, \infty)$, и следовательно

$$\Pi(z) = 1 + \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt. \tag{4.2}$$

Далее, с учетом Предложения 3.5, имеем

(4.3)

$$\delta(f, r) = \int_r^\infty |a(t)|^2 dt = \int_0^\infty |\Pi(\lambda) - P_*(r; \lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda \asymp E_r(\Pi) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

где обозначение $a(t) \asymp b(t)$ при $t \to t_0$ означает, что

$$0 < m \leqslant \varliminf_{t \to t_0} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant \varlimsup_{t \to t_0} \frac{a(t)}{b(t)} \leqslant M < \infty.$$

Из уравнения (4.2) следует, что целая функция наилучшего приближения из класса $\mathcal{E}_r$ для функции $\Pi(z)$, обозначенная как $\varphi_r(\Pi)$, задается следующим образом:

$$\varphi_r(\Pi) := 1 + \varphi_r(v) = 1 + \int_0^\infty e^{itz} \check{v}(t) dt.$$

Очевидно, что функции $|\varphi_r(v)|^2$ и $\varphi_r(v)$ принадлежат не только пространству D_{2r}, но и пространству $\mathcal{E}_r$.

Следовательно, мы можем записать

$$\begin{aligned}
&\||\Pi|^2 - |\varphi_r(\Pi)|^2\|_2 \leqslant \|\Pi\overline{\Pi} - \varphi_r(\Pi)\overline{\Pi} + \varphi_r(\Pi)\overline{\Pi} - \varphi_r(\Pi)\overline{\varphi_r(\Pi)}\|_2 \\
&\leqslant \|\overline{\Pi}(\Pi - \varphi_r(\Pi)\|_2 + \|\varphi_r(\Pi)(\overline{\Pi} - \overline{\varphi_r(\Pi)}\|_2 \leqslant \|\Pi\|_\infty \|\Pi - \varphi_r(\Pi)\|_2 + \\
&+ \|[1 + \varphi_r(v)][\overline{\Pi} - \overline{\varphi_r(\Pi)}]\|_2 = E_r(\Pi)(\|\Pi\|_\infty + 1 + \|\varphi_r(v)\|_\infty).
\end{aligned}$$

Далее, поскольку $\varphi_r(v) \in PW_r$, с учетом (3.1), имеем

$$\||\Pi|^2 - |\varphi_r(\Pi)|^2\|_2 \leqslant E_r(\Pi)[\|\Pi\|_\infty + 1 + \sqrt{r}\|\varphi_r(v)\|_2] = CE_r[\Pi],$$

где константа C не зависит от r.

Следовательно, с учетом (4.3), имеем

$$\varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{E_r(|\Pi|^2)} \leqslant \varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{E_r(\Pi)} = \varlimsup_{r \to \infty} \sqrt[r]{\delta(f, r)} \leqslant e^{-b}. \tag{4.4}$$

Далее, из (4.4) и Теоремы 3.1 следует, что функция $|\Pi(z)|^2$ допускает представление:

$$|\Pi(z)|^2 = \varphi(z) + \psi_1(z), \tag{4.5}$$

где $\varphi \in \mathcal{E}_{r_0}$, $r_0 \geq 0$, и $\psi_1(z) \in A^b_{-b}$.

Рассмотрим функцию

$$h(\lambda) := |\Pi(\lambda)|^2 - 1 = \frac{1}{f(\lambda)} - 1 = \frac{1 - f(\lambda)}{f(\lambda)}, \tag{4.6}$$

и заметим, что $h(\lambda)$ является непрерывной и по (1.7), $h(\lambda) \in L^1(\mathbb{R})$. Следовательно, $h(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$.

Теперь, с учетом (4.5) и (4.6), имеем

$$\varphi(\lambda) - 1 = h(\lambda) - \psi_1(\lambda). \tag{4.7}$$

Заметим, что функция в правой части (4.7) принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, и следовательно, $g(z) := \varphi(z) - 1 \in PW_{r_0}$. Следовательно, с учетом неравенства (3.3), мы приходим к выводу, что $g \in A^c_{-c}$ для любого $c > 0$. Таким образом, учитывая (4.5), получим

$$\frac{1}{f(\lambda)} = |\Pi(\lambda)|^2 = 1 + g(\lambda) + \psi_1(\lambda) = 1 + \psi(\lambda)$$

где $\psi(\lambda) \in A^b_{-b}$. Таким образом, мы доказали, что из (2.1) следует (2.2).

Теперь мы приступим к доказательству обратного следствия, а именно того, что из (2.2) следует (2.1). Для этого сначала заметим, что, учитывая (2.2) и (3.25), имеем

$$1 + \psi(\lambda) = |\Pi(\lambda)|^2 = \Pi(\lambda) \cdot \Pi^*(\lambda),$$

где $\Pi^*(z)$ — сопряженная функция к $\Pi(z)$.

Рассмотрим следующие две функции: $F_1(z) := \Pi(z)$ и

$$F_2(z) := \frac{1}{\Pi^*(z)} + \frac{\psi(z)}{\Pi^*(z)}. \tag{4.8}$$

Заметим, что $F_1(z)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости, в то время как $F_2(z)$ является аналитической функцией в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$, и, учитывая (4.8), они совпадают на действительной оси: $F_1(\lambda) = F_2(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следовательно, по теореме Мореры (см., например, Рудин [32], Раздел 10.17, стр. 209), мы можем сделать вывод, что $F_2(z)$ является аналитическим продолжением $F_1(z)$ в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$.

Действительно, определим функцию $F(z)$, которая равна $F_1(z)$ в верхней полуплоскости и F_2 в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$. Тогда интеграл от $F(z)$ по любому замкнутому контуру Γ в полуплоскости $\mathrm{Im} z > -b$ можно представить в виде суммы двух интегралов: один по части контура Γ в верхней полуплоскости и отрезку на действительной оси, пересекаемому контуром Γ, а другой по части контура Γ в полосе $-b < \mathrm{Im} z < 0$ и тому же отрезку действительной оси (но с противоположным направлением). По теореме Коши оба этих интеграла равны нулю.

Следует отметить, что, учитывая условие (2.2), Предложение 3.6 и формулу (3.27), функция $\Pi(z)$, $\mathrm{Im}z \geqslant 0$, ограничена вдали от нуля и бесконечности, а $\Pi(\lambda)$ является непрерывной (см. Месропян [9]).

По уравнению (4.2) имеем $\Pi(z) - 1 \in \mathcal{H}^{2+}$, из чего следует, что $\Pi^*(z) - 1 \in \mathcal{H}^{2-}$. Следовательно, учитывая, что обе функции $\Pi(z)$ и $\Pi^*(z)$ ограничены, мы приходим к выводу, что функция

$$\frac{1 - \Pi^*(z)}{\Pi^*(z)}$$

также принадлежит классу $\mathcal{H}^{2-}$.

Таким образом, с учетом (4.8), мы можем записать

$$F_2(z) = 1 + \frac{1 - \Pi^*(z)}{\Pi^*(z)} + \frac{\psi(z)}{\Pi^*(z)} = 1 + \psi_1(z), \tag{4.9}$$

где $\psi_1 \in A^b_{-b}$. Из уравнений (4.2), (4.3) и (4.9) следует, что функция $\psi_1(z) = F_2(z) - 1$ является аналитическим продолжением функции $v(z) = \Pi(z) - 1 = F_1(z) - 1$ в полосе $-b < \mathrm{Im}z < 0$.

Следовательно, имеем $\Pi(z) = 1 + v(z)$, где $v(z) \in A^0_{-b}$. Таким образом, учитывая Теорему 3.1, мы приходим к выводу, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{\delta(f,r)} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \sqrt[r]{E_r(\Pi)} \leqslant e^{-b}.$$

На этом доказательство Теоремы 2.1 завершено.

Abstract. The paper addresses the mean square linear prediction problem for a class of stationary generalized Gaussian processes possessing spectral densities. We are particularly interested in the relative prediction error when predicting a future value of the process using a finite past versus using the entire past, given that the underlying process is nondeterministic and “close” to white noise. We establish a necessary and sufficient condition for the relative prediction error to decrease to zero at an exponential rate. Our approach is based on Krein’s theory of continuous analogues of orthogonal polynomials. A key fact is that the relative prediction error can be explicitly represented through the so-called “parameter function”, which serves as a continuous analog of the Verblunsky coefficients (or reflection parameters) associated with orthogonal polynomials on the unit circle.

Список литературы

[1] I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, Generalized Functions, **4**, Applications of Harmonic Analysis: Equipped Hilbert Spaces, Academic Press, New York (1964).

[2] A. M. Yaglom, "Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes", Theory Probab. Appl. **2**, 273 – 320 (1957).

[3] I. A. Ibragimov and Yu. A. Rozanov, Gaussian Random Processes, Springer, New York (1978).

[4] Yu. A. Rozanov, Stationary Random Processes, Holden-Day, San Francisco (1967).

[5] Yu. A. Rozanov, "On the extrapolation of generalized stationary random processes", Theory Probab. Appl. **4**, 426 – 431 (1959).

[6] I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, "Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function", Uspehi Math. Nauk **12**, 3 – 52 (1957). [English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. **12**, 199 – 246 (1959)].

[7] A. M. Yaglom, "Stationary Gaussian processes satisfying the strong mixing condition and best predictable functionals", Bernoulli- Bayes-Laplace Anniversary Volume. (eds L. LeCam and J. Neyman), 241 – 252, Springer, Berlin (1965).

[8] N. Mesropian, "On prediction error for continuous-time stationary processes", Mezhvuz. Sb. Nauch. Trudov, Yerevan State University, **1**, 204 – 212 (1982).

[9] N. Mesropian, "The asymptotics of prediction error for continuous-time stationary processes", Uchen. Zapiski of Yerevan State University, **2**, 3 – 6 (1983).

[10] V. N. Solev, "Approximation of Gaussian measures generated by stationary processes", Zapiski Nauchn. Semin. LOMI, **79**, 44 – 66 (1978).

[11] A. Arimoto, "Approximation of the finite prediction for a weakly stationary process", Ann. Probab. **16**, 355 – 360 (1988).

[12] E. Hayashi, "Prediction from part of the past of a stationary process", Ill. J. Math. **27**, 571 – 577 (1983).

[13] A. Inoue and Y. Kasahara, "On the asymptotic behavior of the prediction error of a stationary process", in "Trends in Probability and Related Analysis" (Taipei, 1998), World Sci. Publishing, River Edghe, NJ, 207 – 218 (1999).

[14] Y. Kasahara, "The asymptotic behaviour of the prediction error for a continuous-time fractional ARIMA process", Appl. Probab. Trust **250**, 299 – 319 (2001).

[15] H. Dym, "A problem in trigonometric approximation theory, Ill", J. Math. **22**, 402 – 403 (1978).

[16] A. Seghier, "Prediction d'un processus stationnaire du second order de covariance connue sur intervalle fini", Ill. J. Math. **22**, 389 – 401 (1978).

[17] M. Pourahmadi, Fundamentals of Time Series Analysis and Prediction Theory, Wiley, New York (2001).

[18] N. I. Achieser, "The continual analog of some theorems on Toeplitz matrices", Ukr. Math. J. **16**, 445 – 462 (1964).

[19] M. G. Krein, "The continual analogs of theorems on polynomials orthogonal on the unit circle", Doklady AN SSSR, **105**, 637 – 640 (1955).

[20] M. G. Krein, "On the fundamental approximation problem of the theory of extrapolation and filtration of stationary random processes", Doklady AN SSSR, **94**(1), 13 – 16 (1954).

[21] M. S. Ginovyan and L. V. Mikaelyan, "Prediction error for continuous-time stationary processes with singular spectral densities", Acta Appl Math. **110**, 327 – 351 (2010).

[22] U. Grenander and M. Rosenblatt, "An extension of a theorem of G. Szegő and its application to the study of stochastic processes", Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 112 – 126 (1954).

[23] U. Grenander and G. Szegő, Toeplitz Forms and Their Applications, Univ. California Press, Berkeley (1958).

[24] I. A. Ibragimov, "On asymptotic behavior of the prediction error", Theory Probab. Appl. **9**(4), 695 – 703 (1964).

[25] B. L. Golinskii, "On asymptotic behavior of the prediction error", Theory Probab. Appl. 19(4), 724 — 739 (1974).

[26] N. I. Achieser, Theory of Approximation, Dover Publications, New York (1992).

[27] K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, N.J. (1962).

[28] S. M. Nikol'skii, Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, Springer, New York (1975).
[29] H. Dym and H. P. McKean, Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, Academic Press, New York (1976).
[30] R. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society, New York (1934).
[31] L. A. Sakhnovich, "Spectral theory of a class of canonical differential systems", Funct. Anal. Appl. **34**, 119 – 128 (2000).
[32] W. Rudin, Real and Complex Analysis, NcGRAW-HILL, New York (1970).

Поступила 25 августа 2025

После доработки 09 сентября 2025

Принята к публикации 15 октября 2025