Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 24 – 27.

БАЗИСЫ РИССА, ПОРОЖДЕННЫЕ СПЕКТОРОМ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА

Т. Н. АРУТЮНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *t.harutyunyan@ysu.am*

Аннотация. Мы доказываем, что если $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ есть множество собственных значений самосопряженного оператора Дирака на $(0,\pi)$, то система $\left\{\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$ есть базис Рисса в гильбертовом пространстве $L^2([0,\pi]), C^2)$.

MSC2020 numbers: 34A55; 34B24; 47E05.

Ключевые слова: оператор Дирака; собственные значения; базисы Рисса.

Пусть E есть 2×2 единичная матрица, а

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

известные матрицы Паули. Через $L(p,q,\alpha,\beta)$ мы обозначим краевую задачу

$$(1)\qquad ly=\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2 p(x)+\sigma_3 q(x)\right\}y=\lambda y,\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2,\end{pmatrix}\qquad \lambda\in C,$$

$$(2)\qquad y_1(0)\cos\alpha+y_2(0)\sin\alpha=0,\qquad \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

$$(3)\qquad y_1(\pi)\cos\beta+y_2(\pi)\sin\beta=0,\qquad \beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

Известно (см. [1] – [3]), что если $p,q\in L^1_R[0,\pi]$ (т.е. p и q есть действительные, суммируемые на $(0,\pi)$ функции), то задача $L(p,q,\alpha,\beta)$ имеет счетное множество собственных значений $\lambda_n(p,q,\alpha,\beta), n\in Z$, которые действительны, простые и имеют асимптотику

$$(4)\qquad \lambda_n=\lambda_n(p,q,\alpha,\beta)=n+\frac{\beta-\alpha}{\pi}+r_n,$$

где $r_n = r_n(p, q, \alpha, \beta) = o(1)$, при $n \to \pm\infty$, равномерно по всем p, q из ограниченных подмножеств $L^1_R[0, \pi]$. Через $L(p, q, \alpha, \beta)$ мы обозначаем также самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l = \sigma_1 \frac{d}{dx} + \sigma_2 p(x) + \sigma_3 q(x)$$

в гильбертовом пространстве двукомпонентных вектор-функций $L^2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ на области определения (см. детали в [3])

$$D = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2, \end{pmatrix}; y_k \in AC[0, \pi],\ (ly)_k \in L^2[0, \pi],\ k = 1, 2 \right\},$$

где y удовлетворяет (2) и (3).

Через $\phi(x, \lambda, \alpha)$ мы обозначаем решение задачи Коши

$$ly = \lambda y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Легко видеть, что собственные значения оператора $L(p, q, \alpha, \beta)$ те же, что и у краевой задачи $L(p, q, \alpha, \beta)$. Собственные значения $L(p, q, \alpha, \beta)$ есть решения уравнения

$$\Phi(\lambda) = \phi_1(\pi, \lambda, \alpha)\cos\beta + \phi_2(\pi, \lambda, \alpha)\sin\beta = 0.$$

Собственные функции есть $\phi_n(x) = \phi_n(x, \lambda_n, \alpha), n \in Z$, которые образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $L^2([0, \pi), C^2)$. Через a_n мы обозначаем квадраты L^2 норм этих собственных функций ϕ_n :

$$a_n = a_n(p, q, \alpha, \beta) := \int_0^\pi |\phi_n(x)|^2 dx.$$

Если мы обозначим через $h_n(x) := \frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_n(x)$, тогда мы получим ортонормированный базис в $L^2([0, \pi), C^2)$, т.е. для любого $f \in L^2([0, \pi), C^2)$

$$f(x) = \sum_{k \in Z} (f, h_k) \cdot h_k(x)$$

в смысле, что (см. [3], стр.93, Теорема 4.4)

$$\lim_{\substack{n, m > N \\ N \to \infty}} \|f - \sum_{k=-m}^{n} (f, h_k) h_k\| = 0.$$

Напомним, что если $\{h_k\}_{k \in Z}$ есть ортонормальный базис в гильбертовом пространстве H и A есть ограниченный и обратимый оператор в H, тогда $\{Ah_k\}_{k \in Z}$ образуют базис, который называется базисом Рисса (см. [4], стр. 373). Через

$\phi_0(x,\lambda,\alpha)$ мы будем обозначать решение задачи Коши (1), (5) в случае $p(x) = q(x) = 0$. Легко видеть, что

$$\phi_0(x,\lambda,\alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x+\alpha) \\ -\cos(\lambda x+\alpha) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно посчитать, что $\lambda_n(0,0,0,0) = n$ и что

$$\phi_0(x,n,0) = \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix}$$

есть собсвенные функции оператора $L(0,0,0,0)$.

И здесь возникает вопрос: Какими свойствами обладает система

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin\lambda_n x \\ -\cos\lambda_n x \end{pmatrix} \right\}_{n\in Z}?$$

Ответ таков:

Теорема. Если $p,q \in L^2_R[0,\pi]$, то система вектор-функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a_n}} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_n x+\alpha) \\ -\cos(\lambda_n x+\alpha) \end{pmatrix} \right\}_{n\in Z}$$

образует базис Рисса в гильбертовом пространстве $L^2([0,\pi),C^2)$.

Доказательство. Известно (см [3], Теорема 2.2, см. также [5] – [7]) что существует оператор преобразования $E+\mathbf{K}$, который переводит решение $\phi_0(x,\lambda,\alpha)$ в решение $\phi(x,\lambda,\alpha)$, т.е.

$$\phi(x,\lambda,\alpha) = \phi_0(x,\lambda,\alpha) + \int_0^x K(x,t)\phi_0(t,\lambda,\alpha)dt = (E+\mathbf{K})\phi_0(x,\lambda,\alpha),$$

где ядро матрицы $K(x,t)$ имеет свойства

$$\int_0^x |K(x,t)|dt \le e^{C(x)} - 1,$$

$(C(x) := \int_0^x |p(t)|dt + \int_0^x |q(t)|dt)$, при $p,q \in L^1_R[0,\pi]$, и

$$\int_0^\pi \int_0^\pi |K(x,t)|^2 dxdt < \infty,$$

при $p,q \in L^2_R[0,\pi]$ (см. [3], гл. 2). Мы видим, что $E+\mathbf{K}$ есть оператор Вольтерра. Таким образом, если $p,q \in L^1_R[0,\pi]$, то $E+\mathbf{K}$ есть ограниченный и обратимый оператор (см. [8], [9]). С другой стороны, мы имеем

$$\phi_n(x) = \phi(x,\lambda_n,\alpha) = (E+\mathbf{K})\phi_0(x,\lambda_n,\alpha)$$

и

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_n(x) = (E+\mathbf{K})\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n,\alpha).$$

Так как $E+\mathbf{K}$ обратимый и его обратный оператор $(E+\mathbf{K})^{-1}$ также есть оператор Вольтерра, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n,\alpha) = (E+\mathbf{K})^{-1}h_n(x) = Ah_n(x).$$

Таким образом система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}}\phi_0(x,\lambda_n\alpha)\}\right\}_{n\in Z} = \left\{\frac{1}{\sqrt{a_n}}\begin{pmatrix}\sin(\lambda_n x+\alpha)\\ -\cos(\lambda_n x+\alpha)\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$$

есть базис Рисса в $L^2([0,\pi],C^2)$. Теорема доказана.

Abstract. We prove, that if $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ is the set of eigenvalues of selfadjoint Dirac operator on $(0,\pi)$, then the system $\left\{\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\right\}_{n\in Z}$ is a Riesz bases in Hilbert space $L^2([0,\pi]),C^2)$.

Список литературы

[1] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва (1988).

[2] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и Их Приложения", Наука Думка, Киев.

[3] Т. Н. Арутюнян, Ю. Ашрафян, Спектральная Теория Операторов Дирака, Ереван, (2023); см. также https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.02761

[4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория Линейных Несамосопряженных Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Наука (1966).

[5] М. Г. Гасымов, В. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, **157**, 967 – 970 (1966).

[6] S. Albeverio, R. Hryniv and Yu. Mykytyuk, "Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potential", Russ. J. Math. Phys. **12**, 406 -423 (2005).

[7] Т. Н. Арутюнян, "Операторы преобразования для канонической системы Дирака", Диф. уравнения, **44**, 1011 – 1021 (2008).

[8] С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, Москва (1950).

[9] В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка", Труды ММО, **1**, 327 – 420 (1952).

Поступила 08 июля 2025

После доработки 20 октября 2025

Принята к публикации 26 октября 2025