Известия НАН Армении, Математика, том 61, н. 1, 2026, стр. 3 – 23.

О МАКСИМАЛЬНЫХ КРИВЫХ n-КОРРЕКТНЫХ МНОЖЕСТВ

А. А. АКОПЯН, Г. К. ВАРДАНЯН, Н. К. ВАРДАНЯН

Ереванский государственный университет[1]
Институт математики НАН РА
E-mails: *hakop@ysu.am; gagik.vardanyan2000@gmail.com; vardanyan.navasard@gmail.com*

Аннотация. Предположим, что $\mathcal{X}$ — n-корректное множество узлов на плоскости, то есть допускающее корректную интерполяцию многочленами двух переменных суммарной степени не выше n. Тогда алгебраическая кривая q степени $k \le n$ может проходить не более чем через $d(n,k) := \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-k}{2}$ узлов множества $\mathcal{X}$. Кривая q степени $k \le n$ называется максимальной, если она проходит ровно через $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$. В частности, максимальная прямая — это прямая, проходящая через $d(n,1) = n+1$ узел множества $\mathcal{X}$. Максимальные кривые являются важным инструментом для изучения n-корректных множеств. Мы приводим новые свойства максимальных кривых, а также обобщения известных свойств.

MSC2020 number: 41A05; 41A63; 14H50.

Ключевые слова: двумерная интерполяция; n-корректное множество; GC_n-множество; алгебраическая кривая; максимальная кривая; максимальная прямая.

1. Введение

Обозначим пространство двумерных многочленов через Π. Пространство двумерных многочленов суммарной степени не выше n обозначим через Π_n. Имеем

$$N_n = \dim \Pi_n = \binom{n+2}{2}.$$

Для удобства положим

$$N_n = 0, \quad \text{если } n < 0. \tag{1.1}$$

Пусть $\mathcal{X}_s = \{(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)\}$ — множество из s различных узлов на плоскости.

[1]Работа Г. Варданяна была поддержана Комитетом высшего образования и науки Республики Армения (проект 21AG-1A045). Работа Н. Варданяна поддержана базовым финансированием ЕГУ.

Задача нахождения многочлена $p \in \Pi_n$, удовлетворяющего условиям

$$p(x_i, y_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.2}$$

для данных $\bar{c} := \{c_1, \ldots, c_s\}$, называется *задачей интерполяции.*

Определение 1.1. *Множество узлов $\mathcal{X}_s$ называется* n-разрешимым*, если для любых данных $\bar{c}$ существует многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям* (1.2).

Определение 1.2. *Множество узлов $\mathcal{X}_s$ называется* n-корректным*, если для любых данных $\bar{c}$ существует* единственный *многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям* (1.2).

Условия (1.2) дают систему из s линейных уравнений с N неизвестными, которыми являются коэффициенты многочлена p. n-корректность означает, что линейная система имеет единственное решение при любых значениях правой части $\bar{c}$. Таким образом, необходимым условием корректности является равенство $s = N$.

Поэтому n-корректность имеет смысл рассматривать только для множеств узлов $\mathcal{X}_N$. В этом случае справедливо следующее

Предложение 1.1. *n-корректность множества $\mathcal{X} := \mathcal{X}_N$ эквивалентна каждому из следующих условий:*

(i) *Множество $\mathcal{X}$ является n-разрешимым.*

(ii) $p \in \Pi_n,\ p|_{\mathcal{X}} = 0 \implies p = 0.$

Здесь $p|_{\mathcal{X}}$ обозначает ограничение многочлена p на множество $\mathcal{X}$.

Определение 1.3. *Многочлен $p \in \Pi_n$ называется* n-фундаментальным многочленом *для точки $A := (x_k, y_k) \in \mathcal{X}$, если $p|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0$ и $p(A) = 1$.*

Указанный фундаментальный многочлен мы обозначаем $p_k^\star = p_A^\star = p_{A,\mathcal{X}}^\star$. Отметим, что иногда n-фундаментальным называют многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям $p|_{\mathcal{X}\setminus\{A\}} = 0$ и $p(A) \neq 0$, поскольку он равен ненулевому постоянному множителю, умноженному на $p_A^\star$.

Определение 1.4. *Множество узлов $\mathcal{X}$ называется* n-независимым*, если для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существует n-фундаментальный многочлен $p_{A,\mathcal{X}}^\star$. В противном случае множество $\mathcal{X}$ называется* n-зависимым.

Очевидно, фундаментальные многочлены линейно независимы. Поэтому необходимым условием n-независимости множества $\mathcal{X}$ является: $\#\mathcal{X} \leq N$. Если множество узлов $\mathcal{X}_s$ является n-независимым, то следующая формула Лагранжа даёт многочлен $p \in \Pi_n$, удовлетворяющий условиям (1.2):

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{s} c_i p_i^\star(x,y). \tag{1.3}$$

Это влечёт

Предложение 1.2. *Множество узлов $\mathcal{X}$ является n-независимым тогда и только тогда, когда оно является n-разрешимым.*

В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 1.3 ([1], лемма 2.2)**.** *Любое n-независимое множество узлов $\mathcal{X}_s$ мощности $s < N$ можно дополнить до n-корректного множества $\mathcal{X}_N$.*

Плоская алгебраическая кривая степени n, $n \geq 1$, — это множество нулей некоторого ненулевого двумерного многочлена степени n. Для упрощения обозначений мы будем использовать одну и ту же букву, например p, для обозначения как самого многочлена p, так и кривой, задаваемой уравнением $p(x,y) = 0$. В частности, через ℓ мы обозначаем линейный многочлен из Π_1 и прямую, определяемую уравнением $\ell(x,y) = 0$.

Отметим, что в выражениях вида $\mathcal{X} \setminus p$, или $\mathcal{X} \cap p$, под многочленом $p \in \Pi_n$ мы понимаем его множество нулей.

Говорим, что узел A n-корректного множества $\mathcal{X}$ использует прямую ℓ, если

$$p^\star_{A,\mathcal{X}} = \ell r, \text{ где } r \in \Pi_{n-1}.$$

Рассмотрим теперь особый тип n-корректных множеств, удовлетворяющих так называемому свойству геометрической характеристики (GC) (см. [2],[3]), введённому Чангом и Яо:

Определение 1.5 ([2])**.** *n-корректное множество $\mathcal{X}$ называется GC_n-*множеством*, если n-фундаментальный многочлен каждого узла $A \in \mathcal{X}$ является произведением линейных множителей.*

В n-корректных множествах n-фундаментальный многочлен, как и любой интерполяционный многочлен, единствен. Поэтому сразу получаем, что в приведённом определении n-фундаментальный многочлен является произведением ровно n линейных множителей.

Таким образом, каждый узел GC_n-множества использует ровно n прямых.

Определение 1.6. *Пусть $\mathcal{X}$ — множество узлов. Говорим, что прямая ℓ является* k-узловой прямой*, если она проходит ровно через k узлов множества $\mathcal{X}$.*

Следующее предложение хорошо известно (см., например, [4] Предложение 1.3):

Предложение 1.4. *Если многочлен $p \in \Pi_n$ обращается в нуль в $n+1$ точке прямой ℓ, то $p|_\ell = 0$ и $p = \ell q$, где $q \in \Pi_{n-1}$.*

Поэтому не более $n+1$ узлов n-независимого множества могут быть коллинеарны. $(n+1)$-узловая прямая ℓ называется *максимальной прямой* ([5]).

Обозначим множество максимальных прямых n-корректного множества $\mathcal{X}$ через $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Приведём некоторые основные свойства максимальных прямых.

Предложение 1.5. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Тогда справедливо:*

(i) *Любые две максимальные прямые пересекаются в узле множества $\mathcal{X}$.*
(ii) *Любые три максимальные прямые не проходят через одну точку.*
(iii) $\#\mathcal{M}(\mathcal{X}) \leq n+2$.

Далее приведём гипотезу Гаски–Маэсту (кратко GM-гипотезу):

Гипотеза([6], Разд.5) Для любого GC_n-множества существует хотя бы одна максимальная прямая.

GM-гипотеза очевидна для $n = 2$. До настоящего времени она подтверждена для степеней $n = 3, 4, 5$ (см. [6], [7], [8] соответственно).

Относительно обобщения GM-гипотезы на максимальные кривые см. в [9].

Далее мы будем использовать следующий результат Карнисера и Гаски, касающийся GM-гипотезы:

Теорема 1.1 ([10], Теорема 4.1)**.** *Если гипотеза Гаски–Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то любое GC_n-множество обладает по крайней мере тремя максимальными прямыми.*

Следствие 1.1. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество. Если гипотеза Гаски–Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то каждый узел множества $\mathcal{X}$ использует максимальную прямую.*

Действительно, в силу теоремы 1.1 существуют три максимальные прямые, которые, согласно предложению 1.5, (ii), не проходят через одну точку. Поэтому для любого узла $A \in \mathcal{X}$ существует максимальная прямая, не проходящая через него. Таким образом, в силу предложения 1.4, узел A использует эту прямую.

Определение 1.7. *Для данного n-корректного множества $\mathcal{X}$ говорим, что узел $A \in \mathcal{X}$ использует алгебраическую кривую q степени $k \leq n$, если q делит фундаментальный многочлен:*

$$p^{\star}_{A,\mathcal{X}} = qr, \text{ где } r \in \Pi_{n-k}.$$

Положим для $n, k \geq 0$,

$$d(n,k) := N_n - N_{n-k}. \tag{1.4}$$

Заметим, что при $0 \leq k \leq n+2$ имеем:

$$d(n,k) = (n-k+2) + (n-k+3) + \cdots + (n+1) \quad \left[= \frac{k(2n+3-k)}{2}\right]. \tag{1.5}$$

А при $k \geq n+1$, в силу соотношения (1.1), имеем $d(n,k) = N_n$. Заметим теперь, что если $0 \leq k \leq \min(m,n)$, то

$$d(n,m) - d(n,k) = d(n-k, m-k). \tag{1.6}$$

Действительно,

$$d(n,m) - d(n,k) = N_n - N_{n-m} - (N_n - N_{n-k}) = N_{n-k} - N_{n-m} = d(n-k, m-k).$$

Далее, если $m \leq n$ и $0 \leq k \leq n-m+2$, то

$$d(n,m) - mk = d(n-k, m). \tag{1.7}$$

Действительно,

$$d(n,m) - mk = (n-m+2) + (n-m+3) + \cdots + (n+1) - mk$$

$$= (n-m-k+2) + (n-m-k+3) + \cdots + (n-k+1) = d(n-k, m-k).$$

Следующее предложение является обобщением предложения 1.4:

Предложение 1.6 ([11], Предложение 3.1)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество и q — алгебраическая кривая степени $k \leq n$ без кратных компонент. Тогда:*

(i) *Любое подмножество на q, содержащее более $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, является n-зависимым.*

(ii) *Любое подмножество на q, содержащее ровно $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, является n-независимым тогда и только тогда, когда*

$$p \in \Pi_n \ \text{ и } \ p|_{\mathcal{X}} = 0 \implies p = qr, \ \text{ где } r \in \Pi_{n-k}.$$

Для прямых имеем $d(n,1) = n+1$, и любые $n+1$ точек на прямой n-независимы.

Для коник (алгебраических кривых степени 2) имеем $d(n,2) = 2n+1$. Хорошо известно, что множество $\mathcal{X}$ из $\leq 2n+1$ точек является n-независимым тогда и только тогда, когда в нём нет $n+2$ коллинеарных точек (см. [12] для случая кратностей). Если $\mathcal{X}$ лежит на неприводимой конике, то на одной прямой может лежать не более 2 точек множества $\mathcal{X}$. Таким образом, любое множество из $\leq 2n+1$ точек, лежащих на неприводимой конике, является n-независимым.

Для кубических кривых (степени 3) и кривых более высоких степеней ситуация сложнее. В частности, не любое множество из $d(n,3) = 3n$ узлов, лежащих на кубике, является n-независимым (см. [13]).

Далее нам понадобится следующее

Предложение 1.7 ([1], Предложение 3.5)**.** *Пусть q — алгебраическая кривая степени $k \leq n$ без кратных компонент, а $\mathcal{X}_s \subset q$ — n-независимое множество мощности s, $s < d(n,k)$. Тогда $\mathcal{X}_s$ можно дополнить до максимального n-независимого множества $\mathcal{X}_d \subset q$ мощности $d = d(n,k)$.*

2. Максимальные кривые

Предложение 1.6 подразумевает, что на любой кривой q степени $k \leq n$ лежит не более $d(n,k)$ n-независимых узлов. Это мотивирует следующее

Определение 2.1 ([11], Определение 3.1)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Кривая f степени $k \leq n$, проходящая через $d(n,k)$ узлов множества $\mathcal{X}$, называется* максимальной кривой.

Поскольку $d(n,n) = N-1$, каждый фундаментальный многочлен множества $\mathcal{X}$ является максимальной кривой степени n.

Отметим, что очевидно кривая f из определения 2.1 не имеет кратных компонент.

Следующее предложение даёт характеристику максимальных кривых:

Предложение 2.1 ([11], Предложение 3.3)**.** *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Тогда кривая $f \in \Pi$ степени $k \leq n$ является максимальной кривой для*

$\mathcal{X}$ *тогда и только тогда, когда она используется каждым узлом множества* $\mathcal{X} \setminus f$.

Отметим, что это, в силу формулы Лагранжа (1.3), следует непосредственно из предложения 1.6.

Предложение 2.1 и последующее следствие 2.1, принадлежащие Л. Рафаэляну [11], раскрывают основное значение максимальных кривых в теории двумерной полиномиальной интерполяции.

Следствие 2.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть* $\mathcal{X}$ — n*-корректное множество. Тогда:* $f \in \Pi_k$ *является максимальной кривой* $\iff$ $\mathcal{X} \setminus f$ *является* $(n-k)$*-корректным множеством.*

Для полноты приведём

Доказательство. ($\Leftarrow$) Обозначим $\mathcal{B} := \mathcal{X} \setminus f$. Имеем

$$N_{n-k} = \#\mathcal{B} = N_n - \#(\mathcal{X} \cap f). \tag{2.1}$$

Отсюда получаем, что $\#(\mathcal{X} \cap f) = N_n - N_{n-k} = d(n,k)$, т. е. f — максимальная кривая степени k.

($\Rightarrow$) В силу предложения 2.1 для любого $A \in \mathcal{X} \setminus f$ имеем

$$p^\star_{A,\mathcal{X}} = q_A f, \text{ где } q \in \Pi_{n-k}.$$

Это подразумевает, что $q_A = p^\star_{A,\mathcal{B}}$. С другой стороны, $\#\mathcal{B} = N - d(n,k) = N_{n-k}$. Поэтому, в силу предложения 1.1(i), $\mathcal{B}$ является $(n-k)$-корректным. □

Следствие 2.2. *Пусть* $\mathcal{X}$ — n*-корректное множество,* f *и* fh — *максимальные кривые, где* $\deg f = k$ *и* $\deg h = m$*. Тогда кривая* h *является максимальной кривой для* $(n-k)$*-корректного множества* $\mathcal{X} \setminus f$.

Доказательство. Для любого $A \in \mathcal{X} \setminus (fh)$ имеем

$$p^\star_{A,\mathcal{X}} = fhr_A, \tag{2.2}$$

где $r_A \in \Pi_{n-m-k}$. Обозначим $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus f$. Тогда из (2.2) сразу получаем, что

$$p^\star_{A,\mathcal{Y}} = hr_A \ \forall A \in \mathcal{Y} \setminus h.$$

Это, в силу предложения 2.1, завершает доказательство. □

Следствие 2.3. *Пусть* $\mathcal{X}$ — n*-корректное множество,* f_1 *и* f_2 — *максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что* $\deg f_i = k_i,\ i = 1,2$*, где* $k_1 + k_2 \le n$*. Тогда:*

(i) *Кривая* $f_1 f_2$ *является максимальной кривой степени* $k_1 + k_2$.

(ii) *Кривая* f_2 *является максимальной кривой для* $(n - k_1)$*-корректного множества* $\mathcal{X} \setminus f_1$.

Доказательство. Сначала отметим, что $\deg f_2 = k_2 \leq n - k_1$. Тогда любой узел $A \in \mathcal{X} \setminus (f_1 \cup f_2)$ использует обе кривые f_1 и f_2. Поскольку эти кривые не имеют общих компонент, получаем

$$p^{\star}_{A,\mathcal{X}} = f_1 f_2 r, \text{ где } r \in \Pi_{n-k_1-k_2}. \tag{2.3}$$

Это, в силу предложения 2.1, подразумевает (i).

Теперь (ii) сразу следует из предложения 2.2. □

Отметим, что следствие 2.3 (ii) было доказано в ([11],Предл.3.4).

Замечание 2.1. *В силу соотношения* (2.3) *сразу получаем, что если* f_1 *и* f_2 *— максимальные кривые без общих компонент и* $\deg f_i = k_i, \ i = 1, 2,$ *где* $k_1 + k_2 \geq n + 1,$ *то* $\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2$.

3. Пересечение двух максимальных кривых

Обозначим через $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ множество точек пересечения кривых f_1 и f_2. Обозначим также $\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) := \mathcal{I}(f_1, f_2) \cap \mathcal{X}$.

Предложение 3.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть* $\mathcal{X}$ *—* n*-корректное множество,* f_1 *и* f_2 *— максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что* $\deg f_i = k_i, \ i = 1, 2,$ *где*

$$k_1 + k_2 \leq n. \tag{3.1}$$

Тогда кривые f_1 *и* f_2 *пересекаются ровно в* $k_1 k_2$ *различных точках, которые все являются узлами множества* $\mathcal{X}$:

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = k_1 k_2.$$

Доказательство. В силу следствия 2.3(i) и соотношений (1.6), (1.7) имеем $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{f_1 f_2 \cap \mathcal{X}\} = d(n, k_1) + d(n, k_2) - d(n, k_1 + k_2) = d(n, k_1) - d(n - k_2, k_1) = k_1 k_2$. □

Обозначим следующую треугольную решётку размерности n через

$$T_n := T_n^{i_0, j_0} = \{(i + i_0, j + j_0) : i, j \geq 0, \ i + j \leq n\},$$

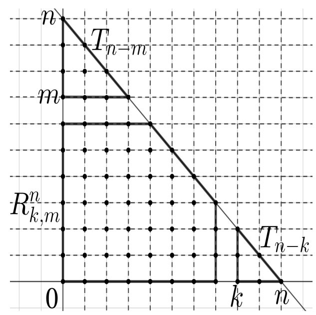

Рис. 1. Множество $R^n_{k,m}$ при $k+m \geq n+3$.

где $i_0, j_0 \geq 0$. Отметим, что $N_n = \#T_n$. Обозначим также следующую прямоугольную решётку размерности $k \times m$ через

$$R_{k,m} := \{(i,j) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Теперь положим (см. рис. 1)

$$R^n_{k,m} := R_{k,m} \cap T^{0,0}_n = \{(i,j) : 0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq m-1, i+j \leq n\}.$$

Тогда обозначим

$$H^n_{k,m} := \#R^n_{k,m}.$$

Отметим, что если $k+m \leq n+2$, то $R_{k,m} \subset T^{0,0}_n$ (см. рис. 2) и, следовательно,

$$R^n_{k,m} = R_{k,m}.$$

Поэтому получаем

$$H^n_{k,m} = km \text{ при } k+m \leq n+2. \tag{3.2}$$

Далее проверим, что

$$H^n_{k,m} = N_n - N_{n-k} - N_{n-m} \text{ при } k+m \geq n+1. \tag{3.3}$$

Действительно, это сразу следует из следующего разбиения $T^{0,0}_n$ на непересекающиеся части (см. рис. 1):

$$T^{0,0}_n = H^n_{k,m} \cup T^{k,0}_{n-k} \cup T^{0,m}_{n-m}.$$

Тогда рассмотрим простое соотношение:

$$(k-1, m-1) \notin R^n_{k,m} \iff k+m \geq n+3.$$

Это подразумевает, что

$$H^n_{k,m} \leq km-1 \iff k+m \geq n+3. \tag{3.4}$$

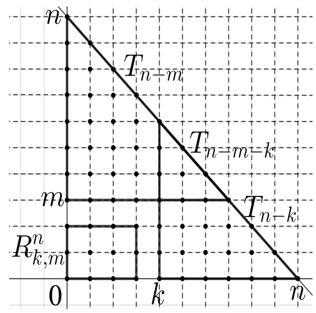

Рис. 2. Множество $R^n_{k,m}$ при $k+m \le n+2$.

Отметим, что в случае $k+m \le n$ имеет место соотношение:

$$H^n_{k,m} = N_n - N_{n-k} - N_{n-m} + N_{n-k-m}. \tag{3.5}$$

Действительно, оно следует из равенства (см. рис. 2)

$$\#H^n_{k,m} = \#T^{0,0}_n - \#T^{k,0}_{n-k} - \#T^{0,m}_{n-m} + \#T^{k,m}_{n-k-m}.$$

Отметим, что соотношение (3.5) выполняется всегда. В частности, соотношение (3.3) — его частный случай, поскольку $N_s = 0$, если $s < 0$.

Теперь предположим, что f_1 и f_2 — алгебраические кривые степеней k_1 и k_2 соответственно, пересекающиеся ровно в k_1k_2 различных точках: $\#\mathcal{I}(f_1, f_2) = k_1k_2$. Согласно теореме Кэли–Бахараха, мощность максимальных n-независимых подмножеств $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ равна $H^n_{k_1,k_2}$. Эта величина называется *функцией Гильберта множества* $\mathcal{I}(f_1, f_2)$ *для степени* n.

Таким образом, указанные кривые f_1 и f_2 могут иметь внутри n-корректного множества $\mathcal{X}$ не более $H^n_{k_1,k_2}$ точек пересечения.

Далее предположим, что $k_1 + k_2 \ge n+3$. Тогда, в силу (3.4), никакие кривые f_1 и f_2 степеней k_1 и k_2 соответственно не могут иметь k_1k_2 точек пересечения внутри n-корректного множества $\mathcal{X}$.

Следующее предложение, обобщающее предложение 3.1, утверждает, что для максимальных кривых имеет место указанный экстремальный случай.

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathcal{X}$ *—* n*-корректное множество,* f_1 *и* f_2 *— максимальные кривые без общих компонент. Предположим, что* $\deg f_i = k_i, \ i = 1, 2.$ *Тогда кривые* f_1 *и* f_2 *пересекаются ровно в* $H^n_{k_1,k_2}$ *узлах множества* $\mathcal{X}$*:*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = H^n_{k_1,k_2}.$$

Доказательство. Если $k_1 + k_2 \leq n$, то, в силу (3.2), утверждение следует из предложения 3.1.

Теперь предположим, что $k_1 + k_2 \geq n + 1$. Тогда, в силу замечания 2.1, имеем

$$\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2.$$

Это подразумевает, что

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{\mathcal{X}\}$$

$$= d(n, k_1) + d(n, k_2) - N = N - (N - d(n, k_1)) - (N - d(n, k_2))$$

$$= N - N_{n-k_1} - N_{n-k_2} = H^n_{k_1,k_2}.$$

Последнее равенство следует из (3.3). □

Замечание 3.1. *Отметим, что, в силу предложения 3.2 и соотношения* (3.2), *получаем, что предложение 3.1 выполняется при более слабом, чем* (3.1), *ограничении* $k_1 + k_2 \leq n + 2$ *(см.* [11], *Предложение 3.4). Также отметим, что, как мы упоминали ранее, предложение 3.1 не выполняется, если* $k_1 + k_2 \geq n + 3$.

Замечание 3.2. *Отметим, что* $\mathcal{X}_0 := T_n^{0,0}$ *—* n*-корректное множество. Рассмотрим кривые* $f(x, y) = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ *и* $g(x, y) = y(y-1)\cdots(y-m+1)$, *которые являются максимальными для* $\mathcal{X}_0$ *степеней* k *и* m *соответственно. Тогда имеем (см. случаи рис. 1 и 2)*

$$f \cap g \cap \mathcal{X}_0 = R^n_{k,m}.$$

Ниже рассматриваем пересечение двух максимальных кривых, имеющих общую компоненту. Следующее предложение утверждает, в частности, что наибольший общий делитель таких максимальных кривых сам является максимальной кривой.

Предложение 3.3. *Пусть* $\mathcal{X}$ *—* n*-корректное множество,* $f_1 = hg_1$ *и* $f_2 = hg_2$ *— любые максимальные кривые, наибольший общий делитель которых равен* h. *Предположим, что* $\deg h = m$ *и* $\deg g_i = s_i,\ i = 1, 2,$ *где*

$$s := s_1 + s_2 + m \leq n. \tag{3.6}$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Кривая* $g_1 g_2 h$ *является максимальной кривой степени* s.

(ii) *Кривая* h *является максимальной кривой степени* m.

(iii) *Кривые g_1 и g_2 являются максимальными кривыми степеней s_1 и s_2 соответственно для $(n-m)$-корректного множества $\mathcal{X} \setminus h$.*

(iv) $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1, g_2) = s_1 s_2$ *и* $h \cap g_1 \cap g_2 \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

(v) *Кривые f_1 и f_2 пересекаются ровно в $d(n,m) + s_1 s_2$ узлах множества $\mathcal{X}$:*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = d(n,m) + s_1 s_2. \tag{3.7}$$

Доказательство. Предположим, что $A \in \mathcal{X} \setminus g_1 g_2 h$. Тогда $f_1(A) f_2(A) \neq 0$. Следовательно, оба многочлена f_1 и f_2 делят $P^{\star}_{A,\mathcal{X}}$. Это сразу подразумевает, что $g_1 g_2 h$ делит $P^{\star}_{A,\mathcal{X}}$. Поэтому, в силу предложения 2.1, получаем (i).

Далее имеем

$$\begin{aligned}\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(hg_1, hg_2) = \#(\mathcal{X} \cap h) + \#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1, g_2) - \#(h \cap g_1 \cap g_2 \cap \mathcal{X})) \\ \leq \#(\mathcal{X} \cap h) + \#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1, g_2) \leq d(n,m) + \#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1, g_2) \leq d(n,m) + s_1 s_2.\end{aligned}$$

Отметим, что в последнем неравенстве использована теорема Безу.

Теперь заметим, что если в указанных трёх неравенствах достигается равенство, или, другими словами, если выполняется (3.7), то легко заключаем, что $\#(h \cap g_1 \cap g_2 \cap \mathcal{X}) = 0$ (первое неравенство), h — максимальная кривая степени m (второе неравенство) и $\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(g_1, g_2) = s_1 s_2$ (третье неравенство). Таким образом, (iv) и (ii) будут доказаны, если выполняется (3.7).

Более того, применяя следствие 2.2, получим также (iii), поскольку $hg_1 = f_1$ и $hg_2 = f_2$ — максимальные кривые.
Поэтому достаточно доказать только равенство (3.7), т. е. утверждение (v).

Напомним, что выше было установлено неравенство:

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) \leq d(n,m) + s_1 s_2.$$

Наконец, предположим от противного, что равенство (3.7) не выполняется. Тогда, в силу указанного неравенства, получаем

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) < d(n,m) + s_1 s_2. \tag{3.8}$$

Далее, в силу следствия 2.1, имеем, что $\mathcal{Y} := \mathcal{X} \setminus f_1$ — $(n-m-s_1)$-корректное множество.

Кривая f_2 — максимальная кривая степени $m+s_2$ и проходит через $d(n, m+s_2)$ узлов множества $\mathcal{X}$. Таким образом, f_2 проходит через $d(n, s_2+m) - \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$. С другой стороны, в силу (3.8), (1.6) и (1.7) имеем

$$d(n, s_2+m) - \mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) > d(n, m+s_2) - d(n,m) - s_1 s_2 = d(n-m, s_2) - s_1 s_2$$

$$= d(n-m-s_1, s_2).$$

Следовательно, f_2 проходит через более чем $d(n-m-s_1, s_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$.

Далее имеем $h(A) \neq 0 \ \ \forall A \in \mathcal{Y}$. Поэтому, учитывая равенство $f_2 = hg_2$, получаем, что кривая g_2 степени s_2 также проходит через более чем $d(n-m-s_1, s_2)$ узлов множества $\mathcal{Y}$. В силу (3.6) это противоречие.

Таким образом, (v) доказано. $\square$

Теперь приведём обобщение предложения 3.3, в котором ограничение (3.6) снято. Отметим, что в этом случае утверждение (i) доказать нельзя.

Предложение 3.4. *Пусть $\mathcal{X}$ — n-корректное множество, $f_1 = hg_1$ и $f_2 = hg_2$ — любые максимальные кривые, наибольший общий делитель которых равен h. Предположим, что* $\deg h = m$, *и* $\deg g_i = s_i, \ i = 1, 2$. *Тогда кривые f_1 и f_2 пересекаются ровно в*

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = d(n, m) + H^{n-m}_{s_1, s_2} \tag{3.9}$$

узлах множества $\mathcal{X}$.

Доказательство. Случай $s_1 + s_2 + m \leq n$ рассмотрен в предложении 3.3. Теперь предположим, что

$$s_1 + s_2 + m \geq n + 1. \tag{3.10}$$

Сначала проверим, что

$$\mathcal{X} \subset g_1 \cup g_2 \cup h = f_1 \cup f_2. \tag{3.11}$$

Действительно, предположим обратное: $A \in \mathcal{X} \setminus g_1 g_2 h$. В доказательстве предложения 3.3 мы показали, что тогда $g_1 g_2 h$ делит $P^{\star}_{A,\mathcal{X}}$, что в силу (3.10) приводит к противоречию.

Теперь, в силу (3.11), (1.6) и (1.4), получаем

$$\#\mathcal{I}_{\mathcal{X}}(f_1, f_2) = \#\{f_1 \cap \mathcal{X}\} + \#\{f_2 \cap \mathcal{X}\} - \#\{\mathcal{X}\}$$

$$= d(n, m+s_1) + d(n, m+s_2) - N = d(n,m) + d(n-m, s_1) + d(n, m+s_2) - N$$

$$= d(n,m) + d(n-m, s_1) - N_{n-m-s_2} = d(n,m) + N_{n-m} - N_{n-m-s_1} - N_{n-m-s_2}$$

$$= d(n,m) + H^{n-m}_{s_1, s_2}.$$

В последнем равенстве использовалось соотношение (3.3). $\square$

Замечание 3.3. *Отметим, что, в силу равенства* (3.9) *и соотношения* (3.2), *получаем, что утверждение (v) предложения 3.3 выполняется при более слабом, чем* (3.6), *ограничении:*

$$s_1 + s_2 + m \leq n + 2.$$

Более того, учитывая доказательство предложения 3.3, получаем, что утверждения (ii–iv) предложения 3.3 также верны при том же более слабом ограничении.

4. Пересечение трёх максимальных кривых

Предложение 4.1 ([11], Предложение 3.4)**.** *Пусть* $\mathcal{X}$ — n – *корректное множество и* f_1, f_2 *и* f_3 — *три максимальные кривые, такие что любые две из них не имеют общих компонент. Предположим также, что* $\deg f_i = k_i,\ i = 1, 2, 3,$ *и* $k_1 + k_2 + k_3 \leq n + 2$. *Тогда* $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = \emptyset$.

Доказательство. В силу следствия 2.1 имеем, что $\mathcal{Y}_1 := \mathcal{X} \setminus f_1$ — $(n - k_1)$-корректное множество. Далее, согласно следствию 2.2, имеем, что f_2 и f_3 — максимальные кривые в $\mathcal{Y}_1$, и $k_2 + k_3 \leq n - k_1 + 2$. Тогда, в силу предложения 3.1 и замечания 3.1, имеем $f_2 \cap f_3 \subset \mathcal{Y}_1 = \mathcal{X} \setminus f_1$. Это подразумевает, что $f_1 \cap f_2 \cap f_3 = \emptyset$.□

В следующих двух предложениях находим $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$ в случае

$$k_1 + k_2 + k_3 > n + 2.$$

Предложение 4.2. *Пусть множество* $\mathcal{X}$ *и кривые* f_1, f_2 *и* f_3 *такие, как в предложении 4.1 и* $k_1 + k_2 + k_3 \geq n + 1$. *Тогда имеем следующие три выражения для* $\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$:

(i) $N - d(n, k_1) - d(n, k_2) - d(n, k_3) + H^n_{k_1,k_2} + H^n_{k_2,k_3} + H^n_{k_1,k_3}$,

(ii) $N - N_{n-k_1} - N_{n-k_2} - N_{n-k_3} + N_{n-k_1-k_2} + N_{n-k_2-k_3} + N_{n-k_1-k_3}$,

(iii) $N - d(n - k_1, k_2) - d(n - k_2, k_3) - d(n - k_3, k_1)$.

Доказательство. Сначала проверим, что

$$\mathcal{X} \subset f_1 \cup f_2 \cup f_3. \tag{4.1}$$

Действительно, предположим обратное: $A \in \mathcal{X} \setminus f_1 f_2 f_3$. Тогда $f_1 f_2 f_3$ делит $P^\star_{A,\mathcal{X}}$, что в силу условия $k_1 + k_2 + k_3 \geq n + 1$ приводит к противоречию.

Теперь обозначим $\gamma = \#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X})$. В силу (4.1) имеем

$$N = \#[(f_1 \cup f_2 \cup f_3) \cap \mathcal{X}] = \#(f_1 \cap \mathcal{X}) + \#(f_2 \cap \mathcal{X}) + \#(f_3 \cap \mathcal{X})$$

$$-\#(f_1\cap f_2\cap\mathcal{X})-\#(f_2\cap f_3\cap\mathcal{X})-\#(f_1\cap f_3\cap\mathcal{X})+\gamma$$
$$=d(n,k_1)+d(n,k_2)+d(n,k_3)-H^n_{k_1,k_2}-H^n_{k_2,k_3}-H^n_{k_1,k_3}+\gamma.$$

Это доказывает утверждение (i).

Далее продолжим, используя равенство (3.5):

$$N=d(n,k_1)+d(n,k_2)+d(n,k_3)-3N+2N_{n-k_1}+2N_{n-k_2}+2N_{n-k_3}$$
$$-N_{n-k_1-k_2}-N_{n-k_2-k_3}-N_{n-k_1-k_3}+\gamma.$$

Далее, в силу определения $d(n,k)$, имеем

$$N=(N-N_{n-k_1})+(N-N_{n-k_2})+(N-N_{n-k_3})-3N+2N_{n-k_1}+2N_{n-k_2}+2N_{n-k_3}$$
$$-N_{n-k_1-k_2}-N_{n-k_2-k_3}-N_{n-k_1-k_3}+\gamma$$
$$=N_{n-k_1}-N_{n-k_1-k_2}+N_{n-k_2}-N_{n-k_2-k_3}+N_{n-k_3}-N_{n-k_1-k_3}+\gamma$$
$$=d(n-k_1,k_2)+d(n-k_2,k_3)+d(n-k_3,k_1)+\gamma.$$

В последнем равенстве, доказывающем утверждение (iii), снова использовалось определение $d(n,k)$. Отметим, что предыдущее равенство доказывает утверждение (ii). □

Следующее предложение даёт более ясное выражение для $\#(f_1\cap f_2\cap f_3\cap\mathcal{X})$. Обозначим $\sigma:=k_1+k_2+k_3-(n+2)$.

Предложение 4.3. *Пусть множество $\mathcal{X}$ и кривые f_1,f_2 и f_3 такие, как в предложении 4.1 и $k_1+k_2+k_3\geq n+1$, т. е. $\sigma\geq -1$. Тогда имеем следующие два выражения для $\#(f_1\cap f_2\cap f_3\cap\mathcal{X})$:*

(i) $\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)-N_{k_1+k_2-n-3}-N_{k_2+k_3-n-3}-N_{k_3+k_1-n-3}$,

(ii) $\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1)$, *при условии что* $k_i+k_j\leq n+2\ \forall\ 1\leq i<j\leq 3$.

Доказательство. Сначала докажем (ii). Из предложения 4.2(iii), в силу (1.5) и условия в (ii), получаем, что

$$\#(f_1\cap f_2\cap f_3\cap\mathcal{X}) \tag{4.2}$$
$$=N-\frac{1}{2}k_2(2n-2k_1-k_2+3)-\frac{1}{2}k_3(2n-2k_2-k_3+3)-\frac{1}{2}k_1(2n-2k_3-k_1+3)$$
$$=N-\frac{1}{2}[(k_1+k_2+k_3)(2n+3)]-\frac{1}{2}[k_1^2+k_2^2+k_3^2+2k_1k_2+2k_2k_3+2k_3k_1]$$
$$=N-\frac{1}{2}[(k_1+k_2+k_3)(2n+3)]-\frac{1}{2}[k_1+k_2+k_3]^2$$
$$=N-\frac{1}{2}[(k_1+k_2+k_3)(2n+3-k_1-k_2-k_3)]$$
$$=\frac{1}{2}[(n+2)(n+1)]-\frac{1}{2}[(n+2+\sigma)(n+1-\sigma)]=\frac{1}{2}\sigma(\sigma+1). \tag{4.3}$$

Теперь перейдём к доказательству (i), которое является обобщением (ii). Для этого введём величину $\widetilde{d}(n,k)$ для всех $n,k \geq 0$:

$$\widetilde{d}(n,k) := (n-k+2)+(n-k+3)+\cdots+(n+1) \ \left[= \frac{k(2n+3-k)}{2}\right]. \tag{4.4}$$

Тогда проверим, что

$$\widetilde{d}(n,k) = d(n,k) - N_{-n+k-3}, \ \forall n,k \geq 0. \tag{4.5}$$

Действительно, если $0 \leq k \leq n+2$, то, в силу (1.5), $\widetilde{d}(n,k) = d(n,k) = d(n,k) - N_{-n+k-3}$. А если $k \geq n+3$, то $\widetilde{d}(n,k) = N_n - N_{-n+k-3} = d(n,k) - N_{-n+k-3}$.

Далее заметим, что доказательство утверждения (ii), точнее преобразования, начинающиеся со строки после (4.2) и заканчивающиеся строкой (4.3), в силу (4.4), показывают, что

$$N - \widetilde{d}(n-k_1,k_2) - \widetilde{d}(n-k_2,k_3) - \widetilde{d}(n-k_3,k_1) = \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1), \tag{4.6}$$

где $0 \leq k_i \leq n, \ i = 1,2,3.$

После подготовительной работы перейдём к доказательству утверждения (i). Используя предложение 4.2(iii) и соотношение (4.5), получаем

$$\begin{aligned}\#(f_1 \cap f_2 \cap f_3 \cap \mathcal{X}) &= N - d(n-k_1,k_2) - d(n-k_2,k_3) - d(n-k_3,k_1)\\ &= N - \widetilde{d}(n-k_1,k_2) - \widetilde{d}(n-k_2,k_3) - \widetilde{d}(n-k_3,k_1)\\ &\quad -N_{k_1+k_2-n-3} - N_{k_2+k_3-n-3} - N_{k_3+k_1-n-3}.\end{aligned}$$

Теперь, в силу соотношения (4.6), получаем

$$= \frac{1}{2}\sigma(\sigma+1) - N_{k_1+k_2-n-3} - N_{k_2+k_3-n-3} - N_{k_3+k_1-n-3}. \qquad \square$$

5. Максимальные кривые в GC_n-множествах

Предложение 5.1. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество и f — максимальная кривая степени k, $1 \leq k \leq n$. Тогда f является произведением k различных прямых. Кроме того, если гипотеза Гаски—Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно, то по крайней мере одна из указанных k прямых является максимальной прямой.*

Доказательство. Рассмотрим узел $A \in \mathcal{X} \setminus f$. Согласно Предложению 2.1 имеем

$$p_A^\star = fq, \ \text{где } q \in \Pi_{n-k}.$$

С другой стороны, поскольку $\mathcal{X}$ является GC_n-множеством, то

$$p_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_n, \ \text{где } \ell_i \in \Pi_1. \tag{5.1}$$

Из этих двух равенств сразу следует, что f является произведением k прямых из правой части (5.1), скажем

$$f = \ell_1 \cdots \ell_k. \tag{5.2}$$

Теперь предположим, что гипотеза Гаски—Маэсту верна. Докажем, что по крайней мере одна из прямых в (5.2) является максимальной прямой. Предположим, для противоречия, что ℓ_i не является максимальной прямой $\forall 1 \le i \le k$.

В силу гипотезы GM рассмотрим максимальную прямую α_1 в $\mathcal{X}$. Она не является компонентой f. Поэтому, согласно Предложению 3.1, прямая α_1 пересекает максимальную кривую f ровно в k узлах. Таким образом, она пересекает каждую прямую $\ell_i,\ 1 \le i \le k$, в одном узле.

Теперь, согласно Следствию 2.3, кривая f является максимальной также в GC_{n-1}-множестве $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \setminus \alpha_1$.

Далее рассмотрим максимальную n-узловую прямую α_2 в $\mathcal{X}_1$. Она не является компонентой f. В самом деле, предположим для противоречия, что эта прямая является компонентой f, скажем $\alpha_2 = \ell_1$, тогда очевидно прямая ℓ_1 является $(n+1)$-узловой прямой в $\mathcal{X}$, то есть максимальной прямой в нём. Таким образом, α_2 также пересекает каждую прямую $\ell_i,\ 1 \le i \le k$, в узле множества $\mathcal{X}_1$.

Далее положим $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$, и так далее.

Продолжая этот процесс, получаем максимальные прямые α_i в $\mathcal{X}_i := \mathcal{X} \setminus (\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_{i-1}),\ i = 1, \ldots, n-k$, и кривая $f,\ \deg f = k$, является максимальной кривой также в GC_k-множестве $\mathcal{X}_{n-k}$. Поэтому f является фундаментальным многочленом некоторого узла $B \in \mathcal{X}_{n-k}$. Следовательно, по Следствию 1.1 одна из компонент f, скажем ℓ_1, является максимальной прямой в $\mathcal{X}_{n-k}$. Но тогда очевидно прямая ℓ_1 является $(n+1)$-узловой прямой в $\mathcal{X}$, то есть максимальной прямой в нём. $\square$

Далее охарактеризуем максимальные кривые в GC_n-множествах.

Предложение 5.2. *Пусть $\mathcal{X}$ — GC_n-множество. Предположим, что гипотеза Гаски—Маэсту выполняется для всех степеней до n включительно. Тогда f является максимальной кривой степени $k,\ 1 \le k \le n$, тогда и только тогда, когда*

$$f = \ell_1 \cdots \ell_k, \tag{5.3}$$

где множество $\ell_i \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n + 2 - i$ узлов множества $\mathcal{X},\ i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Применим индукцию по k. Случай $k = 1$ тривиален. Предположим, что f — максимальная кривая степени $k \geq 2$. Согласно Предложению 5.1 f является произведением k прямых, одна из которых — максимальная прямая. Обозначим последнюю прямую через ℓ_1. Таким образом,

$$f = \ell_1 g, \ \ g \in \Pi_{k-1}.$$

Теперь, в силу Следствия 2.2, заключаем, что g является максимальной кривой степени $k-1$ в GC_{n-1}-множестве $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X} \setminus \ell_1$. По индукционному предположению

$$g = \ell_2 \cdots \ell_k,$$

где множество $\ell_i \setminus (\ell_2 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n + 2 - i$ узлов множества $\mathcal{X}_1, \ i = 2, \ldots, k$, то есть множество $\ell_i \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{i-1})$ содержит ровно $n + 2 - i$ узлов множества $\mathcal{X}$.

($\Leftarrow$) Теперь предположим, что выполняется (5.3). Докажем, что f — максимальная кривая. В силу Предложения 2.1 достаточно доказать, что каждый узел $A \in \mathcal{X} \setminus f$ использует f. Снова применим индукцию по k. Случай $k = 1$ тривиален. По индукционному предположению $\ell_1 \cdots \ell_{k-1}$ является максимальной кривой, поэтому A её использует: $P_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_{k-1} g, \ \ g \in \Pi_{n-k+1}$. Далее, множество $\ell_k \setminus (\ell_1 \cup \cdots \cup \ell_{k-1})$ содержит ровно $n + 2 - k$ узлов множества $\mathcal{X}$. Отметим, что в этих узлах $P_A^\star$ обращается в нуль, в то время как $\ell_1, \ldots \ell_{k-1}$ в нуль не обращаются. Поэтому в этих $n - k + 2$ узлах обращается в нуль многочлен $g \in \Pi_{n-k+1}$. Теперь, применяя Предложение 1.4, получаем, что $g = \ell_k r$, где $r \in \Pi_{n-k}$. Следовательно, $P_A^\star = \ell_1 \cdots \ell_k r$, то есть A использует f. $\square$

Определение 5.1. *Конечное множество $\mathcal{L}$ прямых называется находящимся в* общем положении*, если*

(i) *нет двух параллельных прямых в $\mathcal{L}$, и*

(ii) *нет трёх прямых в $\mathcal{L}$, пересекающихся в одной точке.*

Пусть множество $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_{n+2})$ прямых находится в общем положении. Тогда множество $\mathcal{X}$ из $\binom{n+2}{2}$ точек пересечения этих прямых называется множеством Чанга—Яо степени n (см. [2], [3]). Отметим, что каждый фиксированный узел принадлежит ровно 2 прямым, а произведение оставшихся n прямых даёт фундаментальный многочлен этого узла. Таким образом, $\mathcal{X}$ является GC_n-множеством. Заметим, что прямые $\ell_i, \ i = 1, \ldots, n+2$, являются максимальными для $\mathcal{X}$. В силу Предложения 1.5(iii) никакая другая прямая не является максимальной для множества $\mathcal{X}$, то есть $\mathcal{L} = \mathcal{M}(\mathcal{X})$.

Следствие 5.1. *Предположим, что $\mathcal{X}$ — множество Чанга—Яо степени n с множеством максимальных прямых $\mathcal{L}$. Предположим также, что f — максимальная кривая степени k. Тогда f является произведением k максимальных прямых из $\mathcal{L}$. Кроме того, если f_1 и f_2 — максимальные кривые степеней k_1 и k_2 соответственно, не имеющие общих компонент, то $k_1 + k_2 \leq n + 2$.*

Действительно, в этом случае все прямые в правой части равенства (5.1) являются максимальными прямыми, следовательно, все прямые в правой части равенства (5.2) также являются максимальными прямыми. В заключение рассмотрим конструкции n-корректных множеств с максимальными кривыми, которые не являются произведениями прямых. Отметим, что в силу Предложений 1.3 и 1.7 любая алгебраическая кривая f степени $k \geq 1$ без кратных компонент является максимальной кривой степени k для некоторого n-корректного множества $\mathcal{X}$, где $n \geq k$. Рассмотрим тогда две произвольные алгебраические кривые без кратных компонент: f и g степеней m и k соответственно, пересекающиеся в mk различных точках:

$$\mathcal{I} := \mathcal{I}(f, g) = f \cap g, \ \#\mathcal{I} = mk.$$

Ниже для каждого значения $\delta = 0, 1$ мы приводим конструкцию n-корректного множества $\mathcal{X}$, $n = m + k - 2 + \delta$, для которого обе кривые f и g являются максимальными кривыми. С этой целью рассмотрим $(m-2+\delta)$-корректное множество в $f \setminus \mathcal{I}$ и $(k - 2 + \delta)$-корректное множество в $g \setminus \mathcal{I}$, обозначаемые $\mathcal{C}(f)$ и $\mathcal{C}(g)$ соответственно. Это можно сделать с помощью конструкции Берцоляри—Радона n-корректных множеств (см. [8], подраздел 1.3.1), а также используя тот факт, что можно найти прямые, пересекающие f и g соответственно в m и k различных точках (см. [14], Thm.2.2). Для множества узлов

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}(\delta) := \mathcal{I}(f, g) \cup \mathcal{C}(f) \cup \mathcal{C}(g)$$

справедливо следующее предложение (первое утверждение см. в [15], стр.78-84).

Предложение 5.3. *Пусть $\delta = 0$ или 1. Тогда $\mathcal{X} := \mathcal{X}(\delta)$ является n-корректным множеством, где $n = m + k - 2 + \delta$, а f и g — максимальные кривые степеней m и k соответственно.*

Доказательство. Сначала проверим, что $\#\mathcal{X} = \binom{n+2}{2}$. Действительно,

$$\#\mathcal{X} = \#\mathcal{I}(f,g) + \#\mathcal{C}(f) + \#\mathcal{C}(g) = mk + \binom{m+\delta}{2} + \binom{k+\delta}{2} = \binom{m+k+\delta}{2}.$$

Далее проверим, что $\mathcal{X}$ — n-корректное множество. Для этого, в силу предложения 1.1(ii), предположим, что $p \in \Pi_n,\ p|_{\mathcal{X}} = 0$, и докажем, что $p = 0$. Действительно, применяя основную теорему Макса Нётера, получаем $p = Af + Bg$, где $A \in \Pi_{k-2+\delta}$, $B \in \Pi_{m-2+\delta}$. Отсюда сразу следует, что $A|_{\mathcal{C}(g)} = 0$ и $B|_{\mathcal{C}(f)} = 0$. Поскольку множества $\mathcal{C}(f)$ и $\mathcal{C}(g)$ являются соответственно $(m-2+\delta)$- и $(k-2+\delta)$-корректными, получаем, что $A = B = 0$, а значит $p = 0$.

Наконец, имеем $\#(f \cap \mathcal{X}) = \#\mathcal{I} + N_{m-2+\delta} = d(n,m)$, и аналогично $\#(g \cap \mathcal{X}) = \#\mathcal{I} + N_{k-2+\delta} = d(n,k)$. Поэтому f и g являются максимальными кривыми степеней m и k соответственно. $\square$

Abstract. Suppose $\mathcal{X}$ is an n-correct set of nodes in the plane, that is, it admits a unisolvent interpolation with bivariate polynomials of total degree less than or equal to n. Then an algebraic curve q of degree $k \le n$ can pass through at most $d(n,k) := \binom{n+2}{2} - \binom{n+2-k}{2}$ nodes of $\mathcal{X}$. A curve q of degree $k \le n$ is called maximal if it passes through exactly $d(n,k)$ nodes of $\mathcal{X}$. In particular, a maximal line is a line passing through $d(n,1) = n+1$ nodes of $\mathcal{X}$. Maximal curves are an important tool for the study of n-correct sets. We present new properties of maximal curves, as well as extensions of known properties.

Список литературы

[1] H. Hakopian and S. Toroyan, "On the uniqueness of algebraic curves passing through n-independent nodes", New York J. Math., **22**, 441 – 452 (2016).

[2] K. C. Chung and T. H. Yao, "On lattices admitting unique Lagrange interpolations", SIAM J. Numer. Anal., **14**, 735 – 743 (1977).

[3] H. Hakopian and N. Vardanyan, "On the basic properties of GC_n-sets", Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **29**, 1 – 26 (2020).

[4] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann, "A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n = 4$", J. Approx. Theory, **159**, 224 – 242 (2009).

[5] C. de Boor, "Multivariate polynomial interpolation: conjectures concerning GC-sets", Numer. Algorithms, **45**, 113 – 125 (2007).

[6] M. Gasca and J. I. Maeztu, "On Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^k$", Numer. Math., **39**, 1 – 14 (1982).

[7] J. R. Busch, "A note on Lagrange interpolation in $\mathbb{R}^2$", Rev. Un. Mat. Argentina, **36**, 33 – 38 (1990).

[8] H. Hakopian, K. Jetter, and G. Zimmermann, "The Gasca-Maeztu conjecture for $n = 5$", Numer. Math., **127**, 685 – 713 (2014).

[9] H. Hakopian and L. Rafayelyan, "On a generalization of the Gasca-Maeztu conjecture", New York J. Math., **21**, 351 – 367 (2015).

[10] J. M. Carnicer and M. Gasca, "On Chung and Yao's geometric characterization for bivariate polynomial interpolation", In: Lyche, T., Mazure, M.-L., Schumaker, L.L. (eds.) Curve and surface design: Saint Malo 2002, 21 – 30, Nashboro Press, Brentwood (2003).
[11] L. Rafayelyan, "Poised nodes set constructions on algebraic curves", East J.Approx. **17**, 285 – 298 (2011).
[12] H. Hakopian, "On a class of Hermite interpolation problems", Adv. Comput. Math., **12**, 303 – 309 (2000).
[13] H. Hakopian and A. Malinyan, "Characterization of n-independent sets with no more than $3n$ points", Jaén J. Approx., **4**, 119 – 134 (2012).
[14] R. Walker, Algebraic Curves, Princeton, New Jersey (1950).
[15] H. Hakopian, "The multivariate fundamental theorem of Algebra, Bezout's theorem and Nullstellensatz", in: Approximation Theory (D. K. Dimitrov et al., eds.), 73 – 97, Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia, (2004).

Поступила 01 сентября 2025

После доработки 26 октября 2025

Принята к публикации 30 октября 2025