

УДК 533.6

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев, Г. Г. Оганян

Определение параметров газа вблизи каустики

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 6/III 1969)

Пусть произвольное тонкое заостренное тело, имеющее в момент $t = 0$ звуковую скорость, в дальнейшем движется с положительным ускорением.

Вначале рассмотрим плоскую задачу.

При $t = 0$ тело занимает отрицательную ось Ox с вершиной в точке O и затем движется в сторону положительной оси Ox по закону $x_B = f(t)$ (рис. 1). При $f''(t) > 0$ лучи, вдоль которых движет-

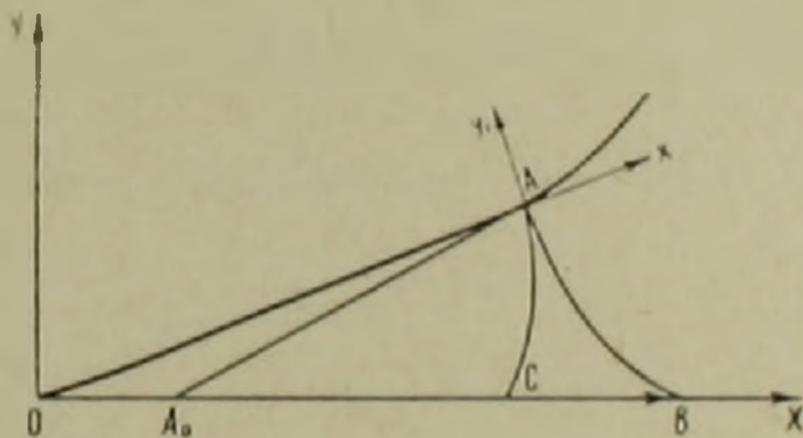


Рис. 1

ся фронт волны AB , имеют огибающую OA , называемую каустикой, причем в точке A давление бесконечно. Постановка данной задачи и решение вдали от каустики даны в (1).

Если ввести систему координат Ax_1y_1 с осью x_1 , направленной по касательной к каустике, и y_1 по нормали в сторону вогнутости каустики, для преобразования Лапласа по t от потенциала движения жидкости φ вблизи точки A получится

$$e^{st} \bar{\varphi} = - \frac{A_2 \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{s^2} a^{-\frac{1}{6}} 2k^{\frac{1}{6}} e^{i\left(kx - \frac{s}{4}\right)} \Phi(\eta), \tag{1}$$

где

$$k = is, \quad A_2 = 2^{-\frac{1}{2}} \frac{a^{\frac{1}{2}} \beta f'^{\frac{5}{2}}(t_0)}{\sqrt{f''(t_0)}} \cdot \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{4}},$$

a — начальная скорость звука в жидкости, s — параметр преобразования Лапласа, t_0 — момент прохождения волны AB через A_0 , β — угол наклона образующей тела к оси Ox в A_0 , R — радиус кривизны каустики

$$R = \left(\frac{3f''}{\sin^2 \theta f'} - f''' \right) \frac{\sin^3 \theta f'^5}{a^2 f''^3}, \quad \left(-\frac{1}{\tilde{x}'''} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \sin \theta \frac{f'^3}{a^{3/2} f''} \quad (2)$$

$$t - \tilde{x} = t + \frac{x_1}{a}$$

— время пробега фронта волны до каустики, причем в точке A $x_1 = 0$.
В формуле (1) $\Phi(\eta)$ есть функция Эйри

$$\eta = \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} y_1 a^{-\frac{2}{3}}, \quad (3)$$

причем давление на самой волне AB вдали от каустики запишется

$$P_{\text{геом}} = \rho a A_2 (-y_1)^{-\frac{1}{4}} \varepsilon(h), \quad (4)$$

где $h = x_1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (-y_1)^{\frac{3}{2}}$, ρ — начальная плотность жидкости, $\varepsilon(h)$ — единичная функция.

Изображение по Лапласу для давления P получается из (1), умноженного на $(-\rho a s)$.

В случае тела вращения изображение по Лапласу для давления вблизи A запишется:

$$e^{st} \bar{P} = A_2 \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{12}} a^{-\frac{1}{6}} \sqrt{\pi} k^{-\frac{4}{3}} i e^{s\tilde{x}} \Phi(\eta),$$

где

$$A_2 = \frac{\beta^2 f'^2}{a^{1/2}} \frac{\rho a}{\sin \theta} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tilde{x} = t - t_0 - \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}}{a}, \quad x_0 = f(t_0) \quad (5)$$

причем

$$P_{\text{геом}} = A_2 (-y_1)^{-\frac{1}{4}} h^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Как в плоской, так и в осесимметричной задаче можно найти

$$\bar{P} = \bar{P}_{\text{геом}} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{12}} a^{-\frac{1}{6}} 2k^{\frac{1}{6}} e^{i(k\tilde{x} - \frac{\pi}{4})} \Phi(\eta), \quad (7)$$

где $\bar{P}_{\text{геом}}$ — модуль изображения $P_{\text{геом}}$.

Обратное преобразование для (7) найдено в (2), где обозначено $P_{\text{геом}} \approx P_0 (t - T_1) a^{-\frac{1}{6}}$, $\tilde{x} = t - T_1$, $a = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (-y_1)^{\frac{3}{2}}$, причем в точке A $h = x_1$. Следуя (2) и записывая в общем случае

$$P_{\text{геом}} = A_1 (-y_1)^{-\frac{1}{4}} (-x_1)^{k_1} (-x_1), \quad (8)$$

где $A_1 = \rho a A_2$, из (7) можно найти для давления вблизи точки A (2)

$$\frac{P}{A_1 (-y_1)^{-\frac{1}{4}}} = k_1 \int_x^\infty (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \left(\frac{\tau}{a} \right) d\tau, \quad x > a \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{A_1 (-y)^{-\frac{1}{4}}} = & k_1 \int_a^\infty (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \left(\frac{\tau}{a} \right) d\tau + 2k_1 \int_x^a \times \\ & \times (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \left(\frac{\tau}{a} \right) d\tau, \quad -a < x < a \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{A_1 (-y_1)^{-1/4}} = & k_1 \int_a^\infty (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \left(\frac{\tau}{a} \right) d\tau + 2k_1 \int_{-a}^a (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \times \\ & \times \left(\frac{\tau}{a} \right) d\tau + 2k_1 \int_a^{-x} (-x + \tau)^{k_1-1} P_{-1/6} \left(-\frac{\tau}{a} \right) d\tau, \quad x < -a, \end{aligned} \quad (11)$$

где индекс при x опущен, причем всюду берется конечная часть интеграла.

Из формулы (9) можно найти впереди AB

$$P = A_3 F_1, \quad F_1 = |x|^{2k_2} F \left(-k_2, -k_2 + \frac{1}{2}, -2k_2 + \frac{5}{6}, 1 - \xi_1^3 \right), \quad (12)$$

где

$$\xi_1^3 = 1 - \frac{a^2}{x^2}, \quad k_1 = 2k_2 + \frac{1}{6},$$

$$A_3 = A_1 \frac{k_1}{2\pi} 2^{k_1} \Gamma^2(k_1) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k_1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right)} \frac{\sin \pi k_1}{\sin \pi \left(k_1 + \frac{1}{6}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

В области $-a < x < a$ по (10)

$$P = A_3 F_1 + A_1 (-y_1)^{-\frac{1}{4}} (a - x_1)^{k_1} F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, k_1 + 1, \frac{a - x}{2a} \right) \quad (13)$$

или, выражая через решения, зависящие от $(1 - \xi_1^3)$ (3), позади волны AB ,

$$P = A_3 F_1 + A_1 2^{-k_1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} F_2, \quad (14)$$

где

$$F_2 = |x|^{2k_2} |1 - \xi_1^3|^{-\frac{1}{6}} F\left(k_2 + \frac{1}{6}, k_2 + \frac{2}{3}, 2k_2 + \frac{7}{6}, 1 - \xi_1^3\right). \quad (15)$$

Совершая аналитическое продолжение (12) к линии AC⁽¹⁾, можно найти позади отраженной от каустики волны AC

$$P = P|_{AC} = F_2 A_1 2^{-k_1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \frac{\cos \pi k_1}{2 \sin \pi k_1}, \quad k_1 = \frac{1}{6} \text{ не целое,} \quad (16)$$

где

$$P|_{AC} = - \frac{2 A_1 k_1 2^{k_1} \Gamma^2(k_1) \cos 2\pi k_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{(1 - 2 \cos 2\pi k_1) \Gamma\left(\frac{1}{6} + k_1\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k_1\right)} \cdot F_1.$$

Аналитическое продолжение (14) к отраженной волне AC дает впереди нее

$$P = P|_{AC} = F_2 A_1 2^{-k_1} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \frac{1}{\sin \pi k_1}. \quad (17)$$

В отличие от случая плоской задачи, где $k_1 = 0$ и давление за падающей волной вдвое больше давления перед ней, а на отраженной волне имеется логарифмическая особенность, при $k_1 > 0$ давление на падающей и отраженной волнах непрерывно, что следует также из (11).

В силу равенства (1) $x^{1/3} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \xi_1^3\right) = -3^{-1/3} 2^{-2/3} F^*$, где F^* удовлетворяет уравнению

$$F^{*3} + 3 \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} y_1 F^* + 3x = 0 \quad (18)$$

решение (12) для $k_2 = \frac{1}{6}$, т. е. в случае конуса, запишется в виде

$$P = \frac{\rho f^{2/3} \beta^2}{2 \sin \theta} \left(\frac{2}{R}\right)^{1/3} F^*. \quad (19)$$

То же значение P получается из решения в форме запаздывающих потенциалов (1)

$$P = \frac{\rho f^{2/3} \beta^2}{2} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{V(x-x)^2 + y^2}, \quad (20)$$

где x_0 дается (5) при $\bar{x}(x_0) = 0$, а x_1 определяется условием $\bar{x}''(x_1) = 0$, причем $\bar{x}(x_1) = -\frac{x}{a}$. Тогда приближенно

$$0 = -\frac{x}{a} + \bar{x}'(x_1)(x_0 - x_1) + \frac{1}{3!} \bar{x}'''(x_1)(x_0 - x_1)^3, \quad (21)$$

где $\bar{x}(x_1)$ выражается через y_1 по формуле:

$$\bar{x}(x_1) = -\frac{y_1 f''}{f'^3 \sin \theta}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) с учетом (2) и делая замену $x_0 - x_1 = F^* \left(\frac{2}{R}\right)^{1/3} \frac{\sin \theta \cdot f'^3}{af''}$, можно для F^* получить (18), а (20), с учетом

$\bar{x}''(x_1) = 0$, перейдет в (19). Решение (12) для произвольного $k_1 > 0$ физически соответствует решению вблизи каустики задачи о движении плоского или осесимметричного тонкого тела со степенной зависимостью угла раствора от расстояния по оси от вершины.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԿՈՆԿ, Գ. Չ. ՕՂԱՆՅԱՆ

Գուգի սլուրամետրեների որոշումը կառուստիկայի մոտ

Գիտարկվում է հարվածային ալիքի որոշման խնդիրը այն շրջանում, որտեղ գծային ալիքի երևույթներ անվերջ էլ կապիտալ ձևափոխությունից հետո լուծումը ստացվում է էլիքի ֆունկցիայի տեսքով: Հետադարձ կապիտալ ձևափոխումը բերում է լուծումը հիպերգեոմետրիկ ֆունկցիաների տեսքի: Լուծումը կիրառված է մինչև ձայնային արագությունից գերձայնայինին կոնքանցման խնդրին: Այդ մասնավոր դեպքի համար լուծումը բերվում է խորանարդ հազասարման լուծելու: և նույն արդյունքը ստացվում է անմիջական ինտեգրալային բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. M. J. Lighthill, Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. Surveys in mechanics, 1956. 2 Ю. Л. Гурьян, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Л., № 5, 1961. 3 Л. Л. Ландау и Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.