

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

С. Г. Симонян

Асимптотика ширины лакун в спектре оператора Штурма—Лиувилля с периодическим аналитическим потенциалом

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 16/II 1969)

1°. Введение. Рассмотрим уравнение

$$y'' + l^2 q(x) y = 0 \quad (1)$$

на всей оси $-\infty < x < +\infty$, где $q(x)$ — непрерывная положительная периодическая функция с периодом $l > 0$.

Известно, что непрерывная часть спектра оператора L , порожденного уравнением (1) и периодическими краевыми условиями, состоит из зон устойчивости с присоединенными к ним граничными точками зон неустойчивости. Дискретная часть спектра этого оператора отсутствует.

Назовем лакуной непрерывной части спектра самосопряженного оператора L любой смежный интервал замкнутого множества $S(L)$. Обозначим через Δ_λ ширину лакуны с центром в точке λ . В настоящей работе вычислена ширина лакуны Δ_λ при $\lambda \rightarrow +\infty$ для аналитических функций $q(x)$.

В теореме 1 $q(x)$ — целая функция: формулы для Δ_λ в этом случае были получены ранее в физической работе А. М. Дыхне⁽¹⁾. В пункте 3° получены новые формулы. В теореме 2 $q(x)$ — мероморфная функция, полученные формулы являются новыми. Оказывается, что асимптотика ширины лакун определяется комплексными нулями и полюсами функции $q(x)$. При доказательстве этих теорем использовались методы, изложенные М. А. Евграфовым и М. В. Федорюком^(2,3).

Известно, что решение уравнения (1) в виде Флоке можно написать так:

$$y(x, \lambda) = \alpha \exp(\mu_1(i) x) \varphi_1(x, \lambda) + \beta \exp(\mu_2(i) x) \varphi_2(x, \lambda), \quad (2)$$

где $\varphi_l(x, \lambda)$ ($l = 1, 2$) — периодические функции, μ_1 и μ_2 — характеристические показатели. Обозначим $\rho_l = \exp(\mu_l(i))$.

Л е м м а 1. Пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — два комплексно сопряженные, линейно независимые решения уравнения (1). Тогда уравнение для характеристических показателей можно записать в виде:

$$\rho^2 - 2\operatorname{Re} a\rho + 1 = 0, \quad (3)$$

где

$$a = \begin{vmatrix} y_1(l, i) & y_2(0, i) \\ y_1'(l, i) & y_2'(0, i) \end{vmatrix} [W'(y_1, y_2)]^{-1},$$

$W'(y_1, y_2)$ — вронскиан решений y_1 и y_2 .

Из (2) и решения уравнения (3):

$$\rho_{1,2} = \operatorname{Re} a \pm \sqrt{(\operatorname{Re} a)^2 - 1}$$

получаем условие

$$|\operatorname{Re} a| \geq 1, \quad (4)$$

которое определяет зоны неустойчивости или лакуны.

2°. Случай, когда $q(x)$ — целая функция. Нам необходимо перечислить некоторые определения и факты из топологии линий Стокса (2,3). Пусть $q(z)$ — целая функция. Нули $q(z)$ первого порядка называются простыми точками поворота. Линией Стокса (л. С.) для уравнения (1) называется линия, выходящая из точки поворота, вдоль

которой $\operatorname{Re} \xi(z_0, z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \sqrt{-q(t)} dt = 0$. Из простой точки поворота

та выходят 3 линии Стокса. Обозначим

$$\delta(z) = \frac{p''(z)}{(p(z))^{3/2}} - \frac{5}{32} \frac{(p'(z))^2}{(p(z))^{5/2}},$$

где $p(z) = -q(z)$ и положим

$$\gamma^\pm(z) = \inf_{\gamma^\pm(z)} \int |\delta(t)| |dt|, \quad \delta^\pm = \sup \gamma^\pm(z),$$

где $\gamma^\pm(z)$ — канонические пути. Обозначим через Φ совокупность всех л. С., через R_z — сферу Римана. Через Q_0 обозначим множество всех целых функций $q(z)$ удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\overline{\Phi} = \Phi$, $\overline{\Phi \setminus l} = \Phi \setminus l$;
- 2) $\lim_{z \rightarrow \infty} |\operatorname{Im} \xi(z_0, z)| = +\infty$, $z \in l$

для всякой бесконечной л. С. l , и то же самое верно для $-q(z)$.

- 3) все нули $q(z)$ простые,

- 4) $\delta^\pm < \infty$.

В (2) доказано, что если выполняются условия 1), 2), то всякая связная компонента множества $R_z \setminus \Phi$ является или областью типа полуплоскости, или полосы, т. е. $\xi(z)$ однолистка с D и $\xi(D)$ есть полоса (полуплоскость) вида $a < \operatorname{Re} \xi < b$ ($\operatorname{Re} \xi > a$ или $\operatorname{Re} \xi < a$).

Лемма 2. Пусть $q(z) \in Q_0$ и $q(x) > 0$ при $-\infty < x < +\infty$. Тогда существует область D_0 типа полосы, содержащая вещественную ось.

Доказательство проведено в (3). ∂D_n составляется из двух связанных компонент Γ^+ и Γ^- ($\operatorname{Im} z > 0$, $z \in \Gamma^+$), симметрично расположенных относительно вещественной оси, и $\Gamma^\pm$ — периодические по $\operatorname{Re} z$ кривые с периодом l .

Теорема 1. Пусть $q(z) \in Q_0$ и $q(x) > 0$ — периодическая функция с периодом $l > 0$. Пусть расстояние по $\operatorname{Re} z$ между соседними точками поворота на Γ^+ равно l . Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:

1) если λ_n — центр n -ой лакуны, то

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\varphi} + O(n^{-1}), \quad (n \rightarrow \infty), \quad \varphi = \int_0^l \sqrt{q(t)} dt. \quad (5)$$

2) Для ширины n -ой лакуны Δ_n с центром в точке λ_n справедлива формула:

$$\Delta_n = \frac{2}{\varphi} \exp\left(-\frac{n\pi\tau}{\varphi}\right) \left(1 + O(n^{-1})\right), \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

$$\tau = \operatorname{Re} \xi(z_0 \bar{z}_0) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{\bar{z}_0} \sqrt{-q(t)} dt > 0, \quad z_0 \in \Gamma^+ \text{ — точка поворота.}$$

Метод доказательства заключается в следующем: асимптотику решений $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ удовлетворяющих условиям леммы 1, мы продолжим в комплексную плоскость, что и дает возможность получить (5) и (6).

2°. Доказанную теорему можно распространять на тот случай, когда на Γ^+ на расстоянии l (по $\operatorname{Re} z$) лежат две точки поворота. Получаются следующие формулы:

1. Если λ_n — центр n -ой лакуны, то

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\varphi + \psi} + O(n^{-1}), \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

где

$$\varphi = \int_0^l \sqrt{q(t)} dt, \quad \psi = \operatorname{Im} \xi(z_0, z_1), \quad \psi > 0.$$

2) Ширина n -ой лакуны Δ_n с центром λ_n

$$\Delta_n = \frac{2 |\cos(\lambda_n \psi) + O(n^{-1})| \exp(-\lambda_n \tau)}{\sqrt{(\varphi + \psi)^2 (\tau + 1) - \psi^2 \sin^2(\lambda_n \psi) \exp(-2\lambda_n \tau)}}. \quad (10)$$

Замечание. При некоторых больших λ_n возможно, что в (10) множитель $\cos(\lambda_n \psi) + O(n^{-1})$ обращается в нуль. Это означает, что соответствующее собственное значение рассматриваемой задачи оказывается кратным, соответствующий отрезок зоны неустойчивости сводится к точке, т. е. соседние зоны устойчивости сольются в одну зону устойчивости.

3°. Пусть 1) $q(z)$ — мероморфная, с периодом $l > 0$ периодическая и, при $z = x$, $-\infty < x < +\infty$ положительная функция; 2) $q(z)$ имеет на Γ^+ только простые нули: $z_n = z_0 + nl$ ($n = 1, 2, \dots$) и простые полюсы: $\bar{z}_n = \bar{z}_0 + nl$ ($n = 1, 2, \dots$), причем линия Стокса, соединяющая z_n с $\bar{z}_n$ лежит внутри $\bar{D}_0$.

Теорема 2. Если $q(z)$ удовлетворяет условиям 1), 2), то для краевой задачи

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0; \quad y(0) - y(l) = 0, \quad y'(0) - y'(l) = 0. \quad (11)$$

справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\varphi} + O(n^{-1}), \quad (n \rightarrow \infty), \quad \varphi = \int_0^l \sqrt{q(t)} dt, \quad (12)$$

λ_n — центр n -ой лакуны в спектре (11), и

$$\Delta_n = \frac{8|\sin(\lambda_n \psi) + O(n^{-1})| \exp(-\lambda_n \tau)}{\sqrt{\varphi^2(1 + \tau) - 64 \cos^2(\lambda_n \psi) \exp(-2\lambda_n \tau)}}, \quad (13)$$

где Δ_n — ширина n -ой лакуны с центром в точке λ_n ,

$$\psi = \operatorname{Im} \xi(z_0, \bar{z}_0) > 0, \quad \tau = \operatorname{Re} \xi(z_0, \bar{z}_0) > 0.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Относительно формулы (13) вышеприведенное замечание сохраняет свою силу. Считаю своим приятным долгом выразить благодарность д. ф. м. н. Федорюку М. В. за постановку задачи и за постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Կ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Պարբերական գործակիցներով նորոգված — Լիովիլի օպերատորի սպեկտրի լակունի երկարության ասիմպտոտիկան

Դիտարկվում է

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0$$

համասարուժ աւրոդ՝ առանցքի վրա $-\infty < x < +\infty$, որտեղ $q(x) > 0$ անընդհատ պարբերական ֆունկցիա է $l > 0$ պարբերությամբ: Աշխատանքում հաշված է Լ. օպերատորի լակունի երկարության ասիմպտոտիկան, երբ $\lambda \rightarrow +\infty$: Քննարկված են հետևյալ դեպքերը. 1) $q(x)$ հանդիսանում է աւրոդ՝ ֆունկցիա, 2) $q(x)$ մերոմորֆ ֆունկցիա է: Վերջին դեպքի համար ստացված բանաձևերը ապացուցված են առաջին անգամ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

1 А. М. Дыхне, ЖЭТФ, т. 40, в. 5 стр. 1423—1426 (1961). 2 М. А. Евграфов, М. В. Федорюк, УМН т. XXI, в. 1 (127) стр. 3—50 (1966). 3 М. В. Федорюк, Диф. Ур. т. 1, № 5, 632—646 и № 11, 1525—1536, май, 1965. 4 Н. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа, Физматгиз, М., 1963.