ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIX 1969 1

УДК 533.6.

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 6/III 1969)

При рассмотрении вопроса об интенсивности волны при прохождении ударной волны AB около каустики и в других задачах, где кривизна волны в B бесконечна, решение линейной задачи около B записывается в виде ([1])

$$P = \mathrm{Re}\left\{\frac{2}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} a^{\frac{1}{12}} A_2 \int_0^{\infty} e^{i\omega(\tilde{T}-t)} v\left(a^{\frac{1}{3}} \omega^{\frac{2}{3}} y\right) \omega^{\frac{1}{6}} \frac{d\omega}{(-i\omega)^{k+1}}\right\}, \tag{1}$$

где P — давление в жидкости, $\tilde{T}$ — момент достижения волной точки B; k, a, A_2 — постоянные, y — расстояние от каустики, причем входящая в (1) функция Эйри v находится в виде ([1]), $y<0$,

$$v\left(a^{\frac{1}{3}} \omega^{\frac{2}{3}} y\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, a^{\frac{1}{6}} \omega^{\frac{1}{3}} (-y)^{\frac{1}{2}} \left\{e^{\frac{\pi i}{6}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(\omega\alpha) + e^{-\frac{\pi i}{6}} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(\omega\alpha)\right\}, \tag{2}$$

где $\omega\alpha = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} (-y)^{\frac{3}{2}} \omega$. Пользуясь асимптотическими выражениями для функции Эйри вдали от B можно найти на волне AB для изображения от P

$$\overline{P} = A_2 (-y)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{(-i\omega)^{k+1}} e^{i\omega X}, \quad X = \tilde{T} - t - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

причем $X=0$ есть уравнение волны AB и при вещественном A_2 и $k=0$ давление на падающей волне AB вдали B будет скачкообразно. Введя в (1) переменную $x=\omega\alpha$ и вводя обозначения

$$Y_1 = \int_0^{\infty} e^{ix\frac{\tilde{T}-t}{\alpha}} H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(x)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx, \quad Y_2 = \int_0^{\infty} e^{ix\frac{\tilde{T}-t}{\alpha}} H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(x)\, x^{-\frac{1}{2}}\, dx \tag{4}$$

при $k = 0$ формулу (1) можно записать в виде

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-y)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{Re}\,\left(e^{\frac{5\pi i}{12}}A_2Y_2 + e^{\frac{\pi i}{12}}A_2Y_1\right). \tag{5}$$

Для $\frac{\tilde{T}-t}{a} > 1$ контур интегрирования в (4) можно направить по мнимой полуоси $s > 0$, $\omega = e^{i\frac{\pi}{2}}s$. Тогда можно найти

$$Y_1 = \frac{2}{\pi}e^{\frac{7\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tilde{T}-t}{a}s}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds + 2e^{\frac{5\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tilde{T}-t}{a}s}I_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds,$$

$$Y_2 = \frac{2}{\pi}e^{-\frac{5\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tilde{T}-t}{a}s}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds. \tag{6}$$

Если $\frac{\tilde{T}-t}{a} < -1$, контур в (4) следует направить по полуоси $\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}s$, $s > 0$, причем

$$Y_1 = \frac{2}{\pi}e^{\frac{5\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{\frac{\tilde{T}-t}{a}s}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds,$$

$$Y_2 = \frac{2}{\pi}e^{-\frac{7\pi i}{12}}\int_0^\infty e^{\frac{\tilde{T}-t}{a}s}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds. \tag{7}$$

Воспользовавшись выражениями ([1])

$$\int_0^\infty e^{-sx}K_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds = \pi\sqrt{2\pi}\,P_{-\frac{1}{6}}(x), \quad \int_0^\infty e^{-sx}I_{\frac{1}{3}}(s)\,s^{-\frac{1}{2}}\,ds = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,Q_{-\frac{1}{6}}(x), \tag{8}$$

можно найти по (6)

$$Y_1 = 2\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{7\pi i}{12}}P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tilde{T}-t}{a}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{\frac{5\pi i}{12}}Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tilde{T}-t}{a}\right),$$

$$Y_2 = 2\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{5\pi i}{12}}P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tilde{T}-t}{a}\right) \tag{9}$$

и по (7)

$$Y_1 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{5\pi i}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{t-\widetilde{T}}{\alpha}\right),$$

$$Y_2 = 2\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{7\pi i}{12}} P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{t-\widetilde{T}}{\alpha}\right) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{5\pi i}{12}} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{t-\widetilde{T}}{\alpha}\right). \qquad (10)$$

В случае вещественного A_2 решение (5) вблизи B выражается через функции (9), (10) и найдено в ([1]). Для произвольного k можно получить решение в виде свертки ([1]), а затем вычислить полученные интегралы и записать давление в форме гипергеометрических функций, приведенных у Ландау и Лифшица ([2]).

Пусть теперь $A_2 = -iA_3$. Тогда, обозначая $F = P(-y)^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{A_3}$, из (5), (9), (10) можно найти $(\widetilde{T} - t = x)$,

$$F = \sqrt{3}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{\alpha}\right), \quad x > \alpha;$$

$$F = 2P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\alpha}\right), \quad -\alpha < x < \alpha; \quad F = P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\alpha}\right) x < -\alpha, \qquad (11)$$

причем ([3])

$$2P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{x}{\alpha}\right) = \sqrt{3}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \qquad (12)$$

и второе выражение F в (11) получено из второй формулы (9) и первой (10).

Для произвольного k решение найдется сверткой (11) с решением, являющимся оригиналом для

$$\frac{1}{(-i\omega)^k} \div \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)} \qquad (13)$$

в виде

$$F = \frac{1}{\Gamma(k)}\, 2\int_x^{\infty} (-x+\tau)^{k-1} P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) d\tau, \quad x > \alpha, \qquad (14)$$

$$F = \frac{1}{\Gamma(k)}\, 2\int_{\alpha}^{\infty} (-x+\tau)^{k-1} P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(k)}\, 2\int_x^{\alpha} P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{\alpha}\right)(-x+\tau)^{k-1}\, d\tau, \quad -\alpha < x < \alpha \qquad (15)$$

$$F=\frac{2}{\Gamma(k)}\int_{-a}^{\infty}P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{a}\right)(-x+\tau)^{k-1}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x}^{-a}P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{a}\right)(-x+\tau)^{k-1}d\tau,\quad x<-a \tag{16}$$

причем в силу (12) выражения (14) и (15) совпадают, хотя давление при $x=a$ логарифмически бесконечно. Избыток давления на отраженной волне $x=-a$ дается вторым слагаемым в (16) и вычисление позволяет найти его в виде

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x}^{-a}P_{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{\tau}{a}\right)(-x+\tau)^{k-1}d\tau=$$

$$=-(-a-x)^{k}\frac{1}{k\Gamma(k)}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1+k,\frac{a+x}{2a}\right). \tag{17}$$

Из (14), (15), (16) и (17) следует, что решение непрерывно при $k>0$, $x=a$ и $x=-a$.

При $x>a$ из (12) и (14), представляя $P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right)$ и $Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x}{a}\right)$ в виде рядов по степеням $\frac{a}{x}$ и понимая всюду конечные значения интегралов, можно найти решение через функции, данные в [2]

$$\int_{x}^{\infty}(-x+\tau)^{k-1}Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{\tau}{a}\right)d\tau=$$

$$=-A_4\cos\pi\left(\frac{4}{3}+k\right)F_1-2^{-1-k}\frac{\pi a^{\frac{1}{6}}}{k\sin\pi k}F_2, \tag{18}$$

$$\int_{x}^{\infty}(-x+\tau)^{k-1}Q_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{\tau}{a}\right)d\tau=$$

$$=-A_4\cos\pi\left(\frac{2}{3}+k\right)F_1-2^{-1-k}\frac{\pi a^{\frac{1}{6}}}{k\sin\pi k}F_2, \tag{19}$$

где

$$A_4=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}-k\right)}{2\pi}\Gamma^2(k)\,2^k a^{\frac{1}{6}}. \tag{20}$$

Решение при $x>a$, то есть впереди AB, найдется как $\frac{1}{\pi}$, умноженное на сумму (18) и (19), и имеет вид:

$$\frac{P}{A_3(-y)^{-\frac{1}{4}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)}\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(k)\,2^k\alpha^{\frac{1}{6}}}{\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)}\cos\pi k F_1 -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(k)}2^{-k}\frac{\alpha^{\frac{1}{6}}}{k\sin\pi k}F_2,\ x>\alpha. \tag{21}$$

Решения F_1 и F_2 приведены в [2] и имеют вид:

$$F_2 = |x|^{k-\frac{1}{6}}\left|1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right|^k F\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{12},\ \frac{k}{2}+\frac{7}{12},\ 1+k,\ 1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right), \tag{22}$$

$$F_1 = |x|^{k-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k}{2}+\frac{1}{12},\ -\frac{k}{2}+\frac{7}{12},\ -k+1,\ 1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right). \tag{23}$$

В силу непрерывности F по (15) на волне $x=\alpha$ за AB можно принять

$$\frac{P}{A_3(-y)^{-\frac{1}{4}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)}\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma(k)\,2^k\alpha^{\frac{1}{6}}}{\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)}\cos\pi k\, F_1 +$$

$$+\frac{2^{-k}A\alpha^{\frac{1}{6}}}{\Gamma(k)\,k\sin\pi k}F_2,\ -\alpha<x<\alpha. \tag{24}$$

Совершая аналитическое продолжение к волне $x=-\alpha$ [2], можно из (21) получить позади волны $x=-\alpha$

$$F = -\frac{2^k\sin\pi k\,\Gamma(k)\cos\pi k\,\alpha^{\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}-k\right)}\times$$

$$\times F_1 - \frac{\alpha^{\frac{1}{6}}2^{-k}}{k\Gamma(k)}F_2,\ x<-\alpha. \tag{25}$$

Аналитическое продолжение (23) дает впереди $x=-\alpha$,

$$F = \Gamma(k)\,2^k\alpha^{\frac{1}{6}}\times$$

$$\times\frac{\cos\pi k + 4A\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}-k\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\pi k\sin\pi\left(\frac{1}{6}+k\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}-k\right)}F_1 -$$

$$
-\frac{\alpha^{\frac{1}{6}}\, 2^{-k}(\cos\pi k + A)}{2k\Gamma(k)\sin^2\pi k} F_2, \quad x > -\alpha. \tag{26}
$$

Приравнивая выражения (25), (26) при $x = -\alpha$, можно найти

$$
A = -\cos\pi k, \tag{27}
$$

что находится в согласии с (25), (17). Интересно, что при $k - \frac{1}{2}$, равном целому числу, по (24) решение в области $-\alpha < x < \alpha$ равно нулю, что для плоской задачи в проводящей жидкости для медленной волны другим путем найдено в [4]. Для вещественных A_2 при $k = \frac{1}{2}$ (28) решение (1) соответствует окрестности каустики, образованной при ускорении конуса через звуковую скорость.

В задаче о проникании давления в жидкость вблизи соединения плоской волны AB и дифракционной BB_1 [5] давление запишется в виде

$$
P = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{r_0^*} dx' \int\limits_{\frac{x'}{V}}^{t-\frac{1}{a}\sqrt{(x-x')^2+y^2}} \frac{P_1(x', t')\,dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \dfrac{(x-x')^2+y^2}{a^2}}}, \tag{29}
$$

где ось x направлена по поверхности жидкости, ось y вглубь нее, a — скорость звука, граничное значение давления P_1 можно взять в виде:

$$
P_1(x', t') = \left(t' - \frac{x'}{V}\right)^{\alpha} t'^{\beta}, \tag{30}
$$

причем V есть начальная скорость точки A волны вдоль поверхности, $r_0^* = Vt_0$, где $t^0 = t'$ обращает в нуль знаменатель в (29). При $\beta = 0$, вводя новую переменную $\xi = t' - \frac{x'}{V}$ и обозначая $M = \frac{V}{a_0}$, $\delta = t - \frac{x}{V} - \frac{y\sqrt{M^2-1}}{V}$, где $\delta = 0$ есть уравнение AB, вблизи B можно получить из (29)

$$
P = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^{\sqrt{2t\delta}-\theta t} dx_4 \int\limits_0^{\delta - \frac{1}{2t}(x_4+t\theta)^2} \frac{\xi^{\alpha}\,d\xi}{\sqrt{2t\delta - (x_4+t\theta)^2 - 2t\xi}}, \quad x_4 = \frac{x'\sin\theta_0}{a}. \tag{31}
$$

Здесь введены полярные координаты $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, причем в точке B $\cos\theta_0 = \frac{a_0}{V}$ и обозначена разность $\theta - \theta_0$ через θ. Подобно этому в общей задаче об определении окрестности точки B соединения фронта волны AB, имеющей профиль $\frac{A(t-\tau)^{\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}\sqrt{K_1-K_2}}\sigma(t-\tau)$ с дифракционным фронтом волны BB_1 в обозначениях ([6]) можно получить для давления вблизи B значение:

$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda A a^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2a\delta}{K_1-K_2}}-\frac{\theta-\theta_0}{K_1-K_2}} dx_4\times$$

$$\times\int\limits_0^{a\delta-\frac{K_1-K_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{K_1-K_2}\right)^2}\frac{y_2^{\lambda-1}dy_2}{\sqrt{a\delta-\frac{K_1-K_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{K_1-K_2}\right)^2-y_2}},\qquad(32)$$

причем a — скорость звука в жидкости, $\delta=t-\tau+\frac{1}{2a}\frac{(\theta-\theta_0)^2}{K_1-K_2}$, $\delta=0$ есть уравнение AB вблизи B, $t=\tau$ — уравнение BB_1. Решение (32) верно в области $\tau<t$ и соответственно (29) в области

$$t>\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Вводя переменные интегрирования

$$\lambda_1=\frac{y_2}{a\delta-\frac{K_1-K_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{K_1-K_2}\right)^2},\quad \xi=\frac{x_4+\frac{\theta-\theta_0}{K_1-K_2}}{\sqrt{\frac{2a\delta}{K_1-K_2}}}\qquad(33)$$

решение (32) запишется в виде:

$$P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda A\delta^{\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}}\sqrt{\frac{2}{K_1-K_2}}\,\beta\left(\lambda,\frac{1}{2}\right)\int\limits_{\alpha_0}^{1}(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi,\qquad(34)$$

где $\alpha_0=-\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2a(K_1-K_2)\cdot\delta}}$ (35). При $\lambda=0$ получается известное решение через арктангенсы (34) можно записать также в виде гипергеометрической функции, если учесть, что

$$\int\limits_{\alpha_0}^{1}(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}d\xi=2^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}(1-\alpha_0)^{\lambda+\frac{1}{2}}F\left(-\lambda+\frac{1}{2},\lambda+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2},\lambda+\frac{3}{2},\frac{1-\alpha_0}{2}\right).\qquad(36)$$

Случай $\beta>0$ соответствует затуханию волны AB в точке B, причем

$t' \approx \frac{x'}{V}$. В частности $a = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ соответствует осесимметричной задаче для давления, решение которой ([5]) находится в виде эллиптических интегралов. В общем случае можно найти из (32), где добавлено x_4^β

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\lambda A a^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}} \beta\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2a\delta}{K_1 - K_2}} - \frac{\theta - \theta_0}{K_1 - K_2}} \times$$

$$\times x_4^\beta \left\{ a\delta - \frac{K_1 - K_2}{2} \left(x_4 + \frac{\theta - \theta_0}{K_1 - K_2} \right)^2 \right\}^{\lambda - \frac{1}{2}} dx_4. \tag{37}$$

Замена переменной (33) дает соотношение

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\lambda A \delta^\lambda}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}} \beta\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{K_1 - K_2}} \left(\frac{2a\delta}{K_1 - K_2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \int\limits_{\alpha_0}^{1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} (\xi - \alpha_0)^\beta \, d\xi. \tag{38}$$

Заменой переменной $1 - \xi = (1 - \alpha_0) y$ можно найти

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{\lambda A \delta^\lambda}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}} \beta\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{K_1 - K_2}} \left(\frac{2a\delta}{K_1 - K_2} \right)^{\frac{\beta}{2}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \times$$

$$\times (1 - \alpha_0)^{\lambda + \frac{1}{2} + \beta} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \beta)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2} + \beta\right)} \times$$

$$\times F\left(-\lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \frac{3}{2} + \beta, \frac{1 + \alpha_0}{2} \right). \tag{39}$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Հարվածային ալիքի շրջակայքի որոշումը եզակի գծի մոտ

Դիտարկվում է կամայական տեսքի ալիքային ճակատի որոշումը կաուստիկայի մոտ։ Գազարյանի կողմից ստացած ալիքի մասնավոր տեսքի համար լուծումը, ընդհանրացվում է կամայական ալիքի համար։ Լուծումը ստացված է հիպերգեոմետրիկ ֆունկցիաների այն տեսքով, որը ուսումնասիրված է Լանդաուի և Լիֆշիցի կողմից։ Դիտարկվում են մասնավոր դեպքեր, որոնք բերվում են մի շարք կիրառական խնդիրների։ Ուսումնասիրվում է երկու տարբեր բնույթի հարվածային ալիքների հատման խնդիրը, որի լուծումը կամայական պրոֆիլների համար ստացված է հիպերգեոմետրիկ ֆունկցիաներով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Л. Газарин*, Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Л., выпуск V, 1961. [2] *Л. Д. Ландау* и *Е. Лифшиц*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953. [3] *Н. Н. Лебедев*, Специальные функции и их приложения, М., 1953. [4] *Р. В. Половин*, *К. П. Черкасова*, Магнитная гидродинамика, № 1, 1966, [5] *А. Г. Багдоев*, Ученые записки Ерев. универ., № 3, 1968. [6] *В. М. Бабич*, Ученые записки ЛГУ, № 246, вып, 32, 1958.