ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLIX 1969 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

П. Х. Татоян

Связи между средними значениями гармонически сопряженных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 2/IV 1969)

1°. Согласно одной теореме Рисса*, если $U(z)$ и $V(z)$ гармонически сопряженные функции в круге $|z|<R$ и $V(0)=0$, то при $p>1$

$$\left(\int_0^{2\pi}|V(r,\alpha)|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} \leq A_p\left(\int_0^{2\pi}|U(r,\alpha)|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $z=re^{i\alpha}$, $0\leq r<R$, а A_p зависит только от p и стремится к ∞ при $p\to\infty$ и $p\to 1$.

Отсюда сразу следует, что если $|U|^p$ $(p>1)$ интегрируема в круге, то $|V|^p$ тоже интегрируема, и (когда, вообще $V(0)\neq 0$)

$$\iint\limits_{|z|<R}|V(r,\alpha)|^p r dr d\alpha \leq 2^p A_p^p \iint\limits_{|z|<R}|U(r;\alpha)|^p r dr d\alpha + \pi 2^p |V(0)|^p\cdot R^2. \quad (1)$$

H-областью (или областью класса H) будем называть всякую область, для которой из интегрируемости $|U|^p$ (по области) следует интегрируемость $|V|^p$.

Понятно, что если $f=U+iV$, то требование интегрируемости $|V|^p$ равносильно требованию интегрируемости $|f|^p$.

Нетрудно видеть, что H-областью является и каждая область, для которой модуль производной функции, конформно отображающей круг на эту область, заключается между двумя положительными числами.

В настоящей работе мы указываем H-области (ограниченные или неограниченные, односвязные или многосвязные). Показываем, что возможность получить более общие H-области строго ограничены.

Пусть AOB область, указанная на рис. 1, где AO и BO дуги линии ограниченной кривизны. AB тоже дуга ограниченной кривизны

* См. напр. (стр. 404, 410).

с достаточно гладким сопряжением с дугами AO и BO. Эту область будем называть „остроконечным" сектором, если AO и BO касаются в точке O, в отличие от обыкновенного сектора, где AO и BO составляют в точке O положительный угол.

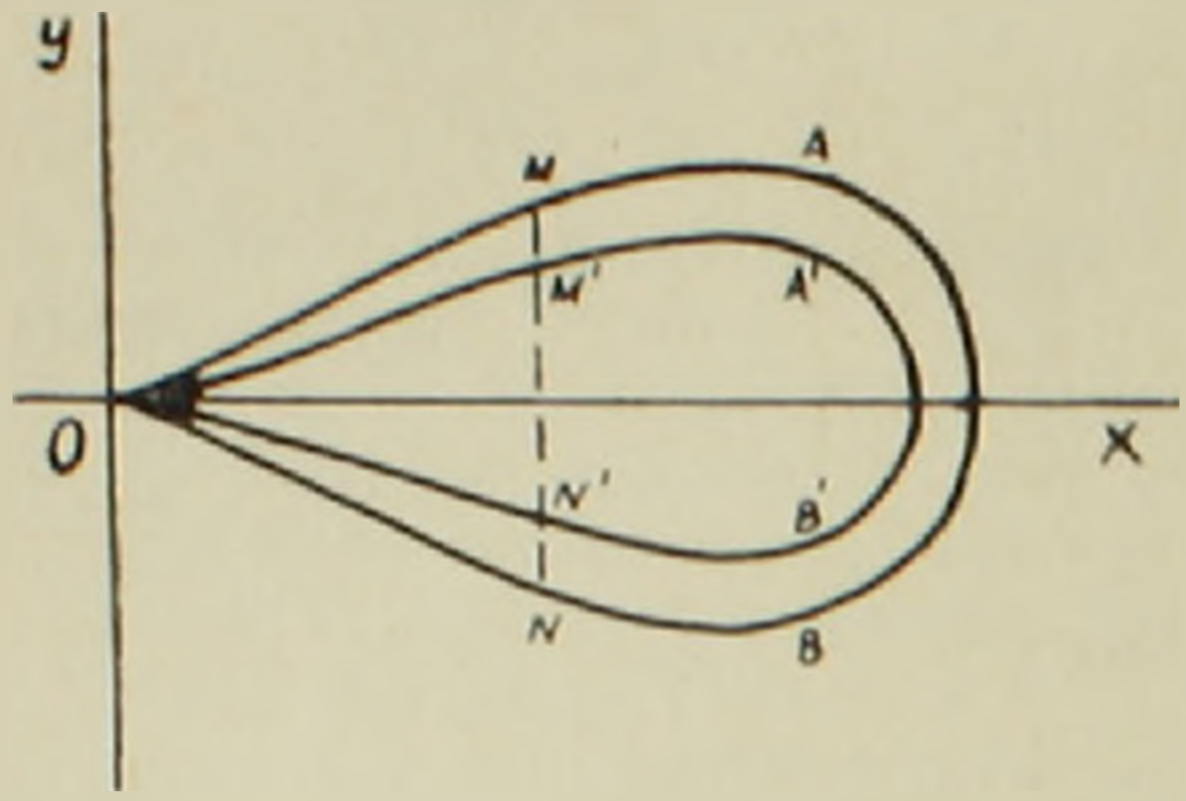

Рис. 1. Сектор AOB и подобный ему сектор $A'OB'$

Сектор $A'OB'$ будем называть подобным AOB подсектором (рис. 1), если $A'OB' \subset AOB$ и в некоторой окрестности точки O

$$\frac{M'N'}{MN} > c,$$

где MN расстояние точек дуг AO и BO, соответствующих одной и той же абсциссе, $M'N'$ — расстояние соответствующих точек на $A'O$ и $B'O$, а c и — положительное число(<1).

2°. Области, не принадлежащие классу H.

а) *Ограниченные области*. Пусть уравнения AO и BO будут

$$y = \pm x^s \qquad (s > 1).$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = V + iU = \frac{1}{z^\lambda} \qquad (\lambda > 0).$$

При данном $p > 0$ достаточно взять λ удовлетворяющим неравенством

$$\frac{s+1}{p} < \lambda < \frac{s+1}{p} + s - 1, \tag{2}$$

чтобы функция $|U|^p$ была интегрируема в данной области, а $|V|^p$ — нет.

Если же уравнения AO и BO будут (при малых x)

$$y = \pm \frac{x}{\underbrace{\log\log\cdots\log}_{k} \dfrac{1}{x}},$$

где k произвольное натуральное число, то можно взять функцию

$$f_k(z) = V_k + iU_k = \frac{1}{z^{\frac{2}{p}}\left(\log\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{p}}\cdots\left(\underbrace{\log\cdots\log}_{k-1}\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Вычисления показывают, что и здесь $|U_k|^p$ интегрируема, а $|V_k|^p$ — нет.

б) *Неограниченные области.* Здесь рассмотрим „бесконечный сектор“ (полосу), границу которого при больших x составляют линии

$$y = \pm x^s \qquad (s < 1).$$

В соответствии с этим будем брать функцию $\frac{1}{z^\lambda}$, причем

$$\frac{s+1}{s} - (1-s) < \lambda < \frac{s+1}{p}.$$

Если же границу области составляют (при больших x) линии

$$y = \pm \frac{x}{\underbrace{\log\cdots\log}_{k} x},$$

то будем брать функцию

$$\frac{1}{z^{\frac{2}{p}} (\log z)^{\frac{1}{p}} \cdots (\underbrace{\log\cdots\log}_{k-1} z)^{\frac{1}{p}}}.$$

Заключение то же, что и в случае а).

Думаем, что любой остроконечный сектор не принадлежит классу H, т. е. существуют гармонически сопряженные функции, и число $p > 1$ такое, что p-я степень модуля одной из этих функций интегрируема, а сопряженной—нет.

3° Справедлива

Теорема 1. *Пусть U и V гармонически сопряженные функции в данном секторе Δ (обыкновенном или остроконечном). Если*

1. $|U|^p$ *интегрируема в* Δ,

2. $|V|^{p'}$ *интегрируема в одном подобном подсекторе* $(0 < p' \leq \leq p)$, *то* $|V|^{p'}$ *интегрируема во всем секторе* Δ.

Эту теорему прежде всего мы применили для получения следующего результата.

Теорема 2. *Обыкновенный сектор принадлежит классу H.*

Теорема 1 применима и для нахождения таких областей, где из интегрируемости $|U|^p$, или из $|U| < \text{const}$ следует интегрируемость $|U|^{p'}$ $(0 < p' < p)$. Но этими вопросами здесь не будем заниматься.

В обыкновенном секторе Δ_0 $(0 = \sphericalangle AOB)$ между интегралами $|U|^p$ и $|V|^p$ имеет место соотношение

$$\iint\limits_{\Delta_0} |V(x, y)|^p \, dx\, dy < 2^p M(p, 0) \iint\limits_{\Delta_0} |U(x, y)|^p \, dx dy +$$

$$+ 2^p |V(x_0, 0)|^p. \text{ пл. } (\Delta_0)^*, \tag{3}$$

* Ср. этот результат с (1).

где $M(p; \theta)$, кроме сомножителя, стремящегося к ∞ при $p \to \infty$ и $p \to 1$, содержит и сомножитель $\left(\frac{1}{\theta}\right)^{p+1}$.

Думается, что, выполнив более точные вычисления с коэффициентами, последний показатель можно снизить на одну единицу, т. е. сделать равным p. Но на примере легко доказать, что большего достигнуть нельзя.

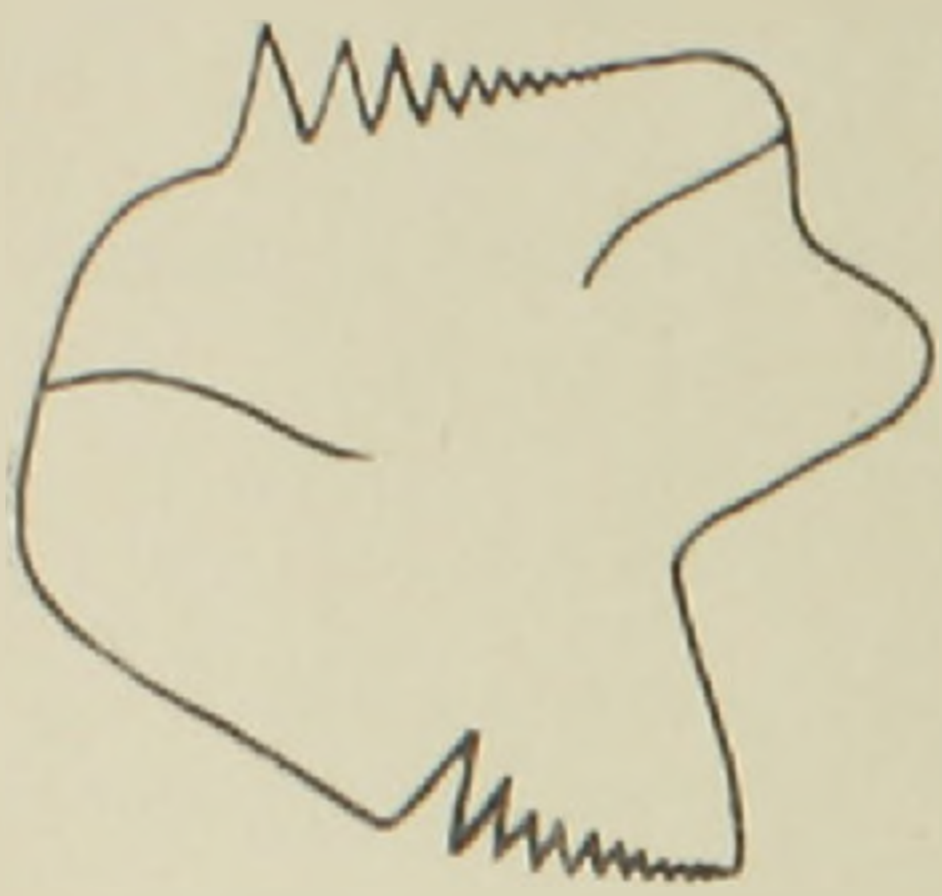

Рис. 2. Односвязная область P_θ (принадлежит классу H)

Угол θ может быть как меньше, так и больше π; в частности, он может стать равным 2π. Таким образом, каждый „многоугольник" (n-угольник) также является H-областью, если внутренние углы θ_k удовлетворяют неравенствам

$$0 < \theta_k \leqslant 2\pi \qquad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

причем сторонами многоугольника могут быть дуги ограниченной кривизны.

Пусть P многоугольник в только что обобщенном смысле. Используя соотношение (3), нетрудно получить новые H-области, если на отрезках сторон P строить новые сектора (в бесконечном числе) и вычеркнуть эти отрезки (рис. 2), причем все внутренние углы равномерно ограничены некоторым положительным числом, например числом θ_0, и новая область содержит P.

На сторонах полученной области можно опять построить сектора, и этот процесс повторить произвольное конечное число раз. Полученные таким образом области обозначим через P_θ. H-областью будет также каждая многосвязная (m-связная) область, которую известным способом проведения трансверсалей можно превратить в область P_θ. Эти области обозначим через $P_\theta^{(m)}$. Итак,

Область $P_\theta^{(m)}$ принадлежит классу H.

Как уже отметили, внутренние углы $P_\theta^{(m)}$ ограничены снизу положительным числом (числом θ_0). В противном случае область перестает принадлежать классу H. В простейшей области, имеющей вид, указанный на рис. 3, где $\theta_n \to 0$, существуют гармонически сопряженные функции, одна из которых интегрируема с квадратом, а другая — нет.

4°. Переходя к неограниченным областям, мы сначала рассматриваем внутренность угла, которую будем называть просто угол.

Теорема 3. *Угол принадлежит классу H.*

Мера угла может быть как меньше, так и больше π. В частном случае, когда $\theta = 2\pi$, область совпадает с плоскостью с размером вдоль полупрямой.

---

* Такой областью будет, например, круг с разрезом вдоль радиуса.

Кроме того, каждую сторону угла может заменить линия, каждой точки которой можно достичь с помощью цепи ограниченного числа кругов, первый из которых имеет свой центр на оси OX (предполагая, для простоты, что угол симметричен относительно оси OX).

Теперь легко видеть, что если область содержит бесконечно удаленную точку и ее граница удовлетворяет известным уже условиям, то она принадлежит классу H.

Как и в случае ограниченных областей, здесь тоже можно получить новые H-области, начиная построением секторов на сторонах угла, при условии, что внутренние углы не были меньше числа θ_0.

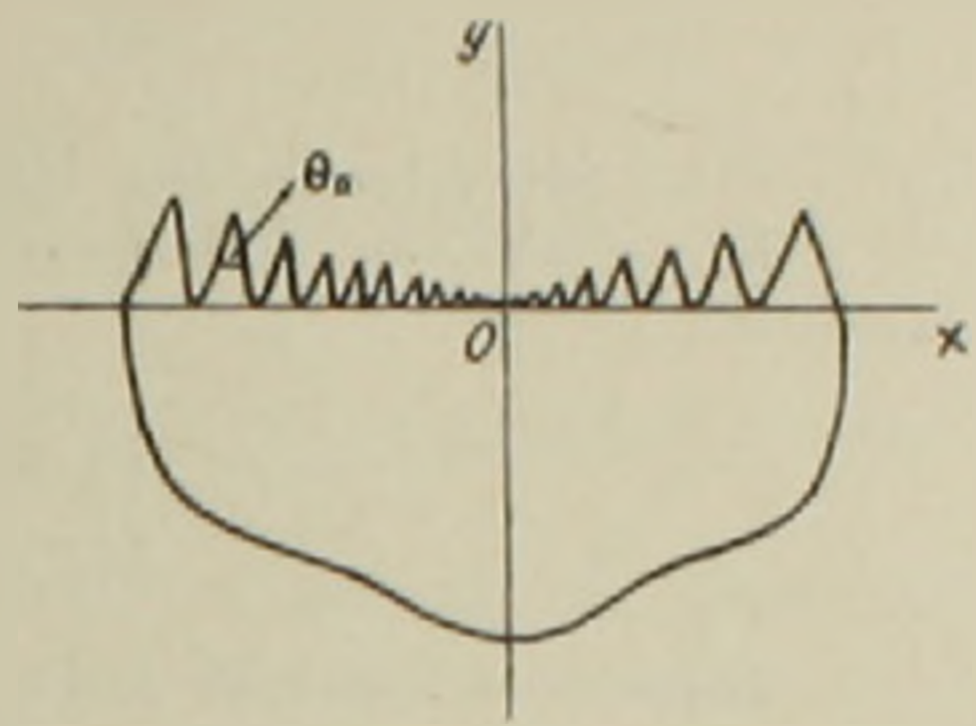

Рис. 3. Область, не принадлежащая классу H (здесь $\theta_n \to 0$)

Таким образом, если $P_{\theta_0}^{(m)}$ ограниченная область в плоскости (z), то преобразованием $t = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\left(\text{где } z_0 = -\dfrac{d}{c}\right.$ произвольная точка плоскости $\left.(z)\right)$ в плоскости (t) опять получаем H-область. Это преобразование можно последовательно повторить произвольное конечное число раз. Полученные таким образом области опять обозначим через $P_{\theta_0}^{(m)}$.

Каждая область $P_{\theta_0}^{(m)}$ (ограниченная или нет) принадлежит классу H.

Отсюда сразу получается:

Следствие. *Пусть $f_n(z) = U_n(z) + iV_n(z)$ последовательность в $P_{\theta_0}^{(m)}$ аналитических функций. Если*

1) $$\iint\limits_{P_{\theta_0}^{(m)}} |U_n(z) - U_0(z)|^p \, dxdy \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

где U_0 гармоническая в $P_{\theta_0}^{(m)}$ функция,

2) *$f_n(z)$ сходится в одной точке $P_{\theta_0}^{(m)}$,*

то

$$\iint\limits_{P_{\theta_0}^{(m)}} |f_n(z) - f_0(z)|^p \, dxdy \to 0,$$

где

$$U_0 = \mathrm{Reel}\,\{f_0(z)\}.$$

Ереванский государственный университет

Գ. Խ. ԹԱԹՈՅԱՆ

Կապեր հարմոնիկ համալուծ ֆունկցիաների միջին արժեքների միջև

Դիցուք $U(x, y)$-ը հարմոնիկ ֆունկցիա է D տիրույթում, և

$$\iint_D |U(x, y)|^p \, dx \, dy < \infty \qquad (p > 1)։$$

$V(x, y)$-ով նշանակենք $U(x, y)$-ի համալուծը։

Ասում ենք, որ D-ն պատկանում է H դասին, եթե վերոհիշյալ առնչությունից հետևում է

$$\iint_D |V(x, y)|^p \, dx \, dy < \infty։$$

Հոդվածում նշված են H դասին պատկանող տիրույթներ։ Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ ավելի ընդհանուր տիրույթներ ստանալու հնարավորությունները խիստ սահմանափակ են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, М., 1965.