ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVIII 1969 5

УДК 519.210

МАТЕМАТИКА

В. П. Потапов

Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/I 1969)

1°. В данной статье изучается вопрос о мультипликативной структуре однозначных аналитических в правой полуплоскости матриц-функций. Предполагается, что единственными особыми точками матрицы-функции $W(\lambda)$ являются полосы и что она обладает следующими тремя свойствами:

1. $W^*(\lambda) J W(\lambda) - J \geqslant 0, \ (Re\lambda > 0)$,

2. $\overline{W(\bar{\lambda})} \equiv W(\lambda)$,

3. $W'(\lambda) jJ W(\lambda) \equiv jJ$,

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

Такую матрицу-функцию будем называть *цепной*. Если же, дополнительно, предельные значения $W(i\tau)$ удовлетворяют условию

4. $W^*(i\tau) J W(i\tau) \equiv J$,

то $W(\lambda)$ назовем *цепной реактивной*.

Напомним, что, в соответствии с ([1-3]) матрица W, удовлетворяющая условию (1), называется *J-несжимающей*, а условию (4) — J - унитарной.

Здесь дается исчерпывающее описание простейшей цепной реактивной матрицы-функции $b(\lambda)$ —так называемого примарного множителя, и доказывается, что произвольная рациональная цепная реактивная матрица-функция может быть представлена в виде произведения конечного числа примарных множителей. Этот результат, имеющий принципиальное значение для теории синтеза электрических цепей, впервые был установлен И. В. Ковалишиной ([3]). Однако, данное там описание примарных множителей недостаточно прозрачно.

Исследование мультипликативной структуры цепной матрицы-функции опирается на несколько общих теорем, представляющих самостоятельный интерес.

2°. Теорема 1. *Регулярная в точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, $Re\lambda_l \neq 0$, $(l = 1, 2, \cdots, m)$, J-несжимающая матрица-функция $W(\lambda)$ удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\left\| \frac{W^*(\lambda_k) J W(\lambda_l) - J}{\bar{\lambda}_k + \lambda_l} \right\|_{k,\, l=1}^{m} \geqslant 0. \tag{1}$$

В том случае, когда точка λ_l лежит в левой полуплоскости, под $W(\lambda l)$ следует понимать продолжение „по симметрии":

$$W(\lambda_l) = J W^{*-1}(-\bar{\lambda}_l) J$$

независимо от того продолжаема или нет функция $W(\lambda)$ в левую полуплоскость. В паре точек, симметричных относительно мнимой оси, неопределенность раскрывается по обычным правилам.

Неравенство (1) является обобщением леммы Шварца. Соответствующее неравенство для матриц-функций с неотрицательной мнимой частью легко следует из известного интегрального представления.

Разумный переход к пределу в неравенстве (1) приводит к следующей теореме, играющей основную роль в разложении $W(\lambda)$ на множители.

Теорема 2. *J-несжимающая матрица-функция $W(\lambda)$, имеющая в точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ полюсы*

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_l C_l}{(\lambda - \lambda_l)^{s_l}} + \frac{b_l}{(\lambda - \lambda_l)^{s_l - 1}} + \cdots,$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & c \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_1} C_1^* J C_1 & \cdots\cdots & \frac{4\sigma_1\sigma_m}{\bar{\lambda}_1 + \lambda_m} C_1^* J C_m & \frac{2\sigma_1 C_1^*}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{4\sigma_m\sigma_1}{\bar{\lambda}_m + \lambda_1} C_m^* J C_1 & \cdots\cdots & \frac{4\sigma_m\sigma_m}{\bar{\lambda}_m + \lambda_m} C_m^* J C_m & \frac{2\sigma_m C_m^*}{\bar{\lambda}_m - \bar{\mu}} \\ \hline \frac{2\sigma_1 C_1}{\lambda_1 - \mu} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{2\sigma_m C_m}{\lambda_m - \mu} & \frac{W(\mu) J W^*(\mu) - J}{\mu + \bar{\mu}} \end{array}\right] \geqslant 0 \tag{2}$$

Наличие пар точек, симметричных относительно мнимой оси, приводит к изменению соответствующих элементов блока A. Неравенство (2) может быть записано и для случая полюса на мнимой оси, если старший коэффициент C будет удовлетворять условию $C^* J C = 0$. Изменения, происходящие при этом в блоке A, нарушая единообразие записи.

не имеют принципиального значения, и в дальнейшем оговариваться не будут.

Исследование неравенства (2) опирается на следующее элементарное предложение:

Лемма о блок-матрице. *Для того, чтобы матрица*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & c \end{pmatrix}$$

была эрмитово-неотрицательной необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий:

1. $A \geqslant 0$,
2. *Уравнение* $Ax = B$ *имеет решения,*
3. *Для любого решения* x *этого уравнения*

$$c - x^* A x \geqslant 0. \tag{3}$$

Будем теперь от произвольной J-несжимающей матрицы-функции $W(\lambda)$ отщеплять возможно более простые с аналитической точки зрения множители $b(\lambda)$ той же природы. Их простота характеризуется тем, что они имеют в заданных точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ *простые* полюсы и J-унитарны на мнимой оси. Такие множители будем называть *элементарными*. Если нормировать их условием $b(\infty) = J$, то

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_1}{\lambda - \lambda_1} a_1 + \frac{2\sigma_2}{\lambda - \lambda_2} a_2 + \cdots + \frac{2\sigma_m}{\lambda - \lambda_m} a_m.$$

В том частном случае, когда все вычеты $a_1, a_2, \cdots, a_m$ являются матрицами первого ранга, множитель $b(\lambda)$ будем называть *примарным* и записывать в виде

$$b(\lambda) = J + \frac{2\sigma_1}{\lambda - \lambda_1} Jf_1^* g_1 + \frac{2\sigma_2}{\lambda - \lambda_2} Jf_2^* g_2 + \cdots + \frac{2\sigma_m}{\lambda - \lambda_m} Jf_m^* g_m,$$

где f и g — вектора-строки.

Элементарный множитель $b(\lambda)$ играет роль дробно-линейной функции классической леммы Шварца. Имеет место

Теорема 3. *Для того, чтобы J-несжимающая матрица-функция $W(\lambda)$ была элементарным множителем, необходимо и достаточно, чтобы в блок-матрице* (2) *неравенство* (3) *становилось равенством*

$$c - x^* A x = 0.$$

Структура элементарного множителя описывается

Теоремой 4. *Для того, чтобы матрица-функция*

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_1}{\lambda - \lambda_1} a_1 + \frac{2\sigma_2}{\lambda - \lambda_2} a_2 + \cdots + \frac{2\sigma_m}{\lambda - \lambda_m} a_m$$

была элементарным множителем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{\lambda}_1+\lambda_1} a_1^* J a_1 & \cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_m}{\bar{\lambda}_1+\lambda_m} a_1^* J a_m \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{4\sigma_m\sigma_1}{\bar{\lambda}_m+\lambda_1} a_m^* J a_1 & \cdots & \dfrac{4\sigma_m\sigma_m}{\bar{\lambda}_m+\lambda_m} a_m^* J a_m \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{A}$$

$$\frac{4\sigma_k\sigma_1}{\bar{\lambda}_k+\lambda_1} a_k^* J a_1 + \frac{4\sigma_k\sigma_2}{\bar{\lambda}_k+\lambda_2} a_k^* J a_2 + \cdots + \frac{4\sigma_k\sigma_m}{\bar{\lambda}_k+\lambda_m} a_k^* J a_m = 2\sigma_k a_k^* J \tag{B}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m).$$

Особенно просто характеризуется примарный множитель:

Теорема 5. *Для того, чтобы матрица-функция*

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_1}{\lambda-\lambda_1} Jf_1^* g_1 + \frac{2\sigma_2}{\lambda-\lambda_2} Jf_2^* g_2 + \cdots + \frac{2\sigma_m}{\lambda-\lambda_m} Jf_m^* g_m$$

была примарным множителем, необходимо и достаточно, чтобы векторы $f_1, f_2, \cdots, f_m$ *удовлетворяли „острому" неравенству*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{4\sigma_1\sigma_1}{\bar{\lambda}_1+\lambda_1} f_1 J f_1^* & \cdots & \dfrac{4\sigma_1\sigma_m}{\bar{\lambda}_1+\lambda_m} f_1 J f_m^* \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{4\sigma_m\sigma_1}{\bar{\lambda}_m+\lambda_1} f_m J f_1^* & \cdots & \dfrac{4\sigma_m\sigma_m}{\bar{\lambda}_m+\lambda_m} f_m J f_m^* \end{bmatrix} > 0, \tag{A'}$$

а векторы $g_1, g_2, \cdots, g_m$ *удовлетворяли системе уравнений*

$$\frac{4\sigma_k\sigma_1}{\bar{\lambda}_k+\lambda_1} (f_k J f_1^*) g_1 + \frac{4\sigma_k\sigma_2}{\bar{\lambda}_k+\lambda_2} (f_k J f_2^*) g_2 + \cdots + \frac{4\sigma_k\sigma_m}{\bar{\lambda}_k+\lambda_m} (f_k J f_m^*) g_m = 2\sigma_k f_k \tag{B'}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m).$$

Построение элементарного множителя, отщепляющегося от данной J-несжимающей матрицы-функции $W(\lambda)$, дано в

Теореме 6. *Пусть J-несжимающая матрица-функция $W(\lambda)$ в точках $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ имеет полюсы*

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_l C_l}{(\lambda-\lambda_l)^{s_l}} + \frac{b_l}{(\lambda-\lambda_l)^{s_l-1}} + \cdots \quad (l = 1, 2, \cdots, m)$$

и пусть матрицы $X_1, X_2, \cdots, X_m$ найдены из системы уравнений

В (1), (2), (3) рассматривались лишь двучленные множители $b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0}{\lambda-\lambda_0} a$. Необходимость укрупнения диктуется тем, что цепной реактивный элементарный множитель в общем случае является суммой пяти слагаемых.

$$\frac{4\sigma_k\sigma_1}{\bar\lambda_k+\lambda_1} C_k^* J C_1 X_1 + \frac{4\sigma_k\sigma_2}{\bar\lambda_k+\lambda_2} C_k^* J C_2 X_2 + \cdots + \frac{4\sigma_k\sigma_m}{\bar\lambda_k+\lambda_m} C_k^* J C_m X_m = 2\sigma_k C_k^*,$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m).$$

Тогда

1) *матрица-функция*

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_1}{\lambda-\lambda_1} C_1 X_1 J + \frac{2\sigma_2}{\lambda-\lambda_2} C_2 X_2 J + \cdots + \frac{2\sigma_m}{\lambda-\lambda_m} C_m X_m J$$

является элементарным множителем,

2) *этот множитель отщепляется от* $W(\lambda)$ *слева*:

$$W(\lambda) = b(\lambda)\; W_1(\lambda),$$

3) *при этом отщеплении порядки полюсов в точках* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ понижаются на единицу.

Соответствующая теорема для примарных множителей утверждает понижение на единицу рангов старших коэффициентов.

3°. В заключение дадим полное описание структуры примарного реактивного множителя.

Так как цепная реактивная матрица-функция вместе с полюсом в точке $\lambda_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ $(\sigma_0 > 0, \tau_0 > 0)$ должна иметь полюсы и в симметрических точках $-\bar\lambda_0$, $\bar\lambda_0$, $-\lambda_0$, то под элементарным множителем здесь естественно понимать пятичлен

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0}{\lambda-\lambda_0} a_1 - \frac{2\sigma_0}{\lambda+\bar\lambda_0} a_2 + \frac{2\sigma_0}{\lambda-\bar\lambda_0} a_3 - \frac{2\sigma_0}{\lambda+\lambda_0} a_4.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$a_1 = a,\; a_2 = j\bar a j,\; a_3 = \bar a,\; a_4 = jaj.$$

Для примарного множителя матрица a-первого ранга:

$$a = Jf^*g,$$

и задача сводится к установлению необходимых и достаточных условий, накладываемых на векторы f и g, для того, чтобы множитель $b(\lambda)$ был цепной реактивной матрицей-функцией.

Внося соответствующие коррективы в формулировку теоремы 5, обусловленные наличием двух пар полюсов симметричных относительно мнимой оси, мы придем к

Теореме 7. *Пусть* $2n$-*мерный вектор* f *таков, что числа*

$$\alpha = fJf^*,\; \gamma = \frac{\sigma_0}{\bar\lambda_0} fJ\bar f^*,\; \delta = i\frac{\sigma_0}{\tau_0} fjJf^*$$

связаны соотношениями

$$|\gamma| < \alpha, \qquad |\delta| < \alpha. \tag{4}$$

Тогда матричное неравенство относительно комплексного параметра θ

$$\begin{pmatrix} \alpha & \theta & \gamma & \delta \\ \bar\theta & \alpha & \delta & \bar\gamma \\ \bar\gamma & \delta & \alpha & \bar\theta \\ \delta & \gamma & \theta & \alpha \end{pmatrix} > 0 \tag{5}$$

имеет бесконечное множество решений; и для каждого такого θ *вектор* g, *определяемый из системы уравнений*

$$\begin{aligned} &\alpha g + \theta \bar g j + \gamma \bar g + \delta g j = f, \\ &\bar\theta g + \alpha \bar g j + \delta \bar g + \bar\gamma g j = \bar f j, \\ &\bar\gamma g + \delta \bar g j + \alpha \bar g + \bar\theta g j = \bar f, \\ &\delta g + \gamma \bar g j + \theta \bar g + \alpha g j = f j, \end{aligned} \tag{6}$$

вместе с вектором f *порождает примарный реактивный множитель*

$$b(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0}{\lambda - \lambda_0} J f^* g - \frac{2\sigma_0}{\lambda + \bar\lambda_0}\, j J \bar f^* \bar g j + \frac{2\sigma_0}{\lambda - \bar\lambda_0} J \bar f^* \bar g - \frac{2\sigma_0}{\lambda + \lambda_0} j J f^* g j. \tag{7}$$

Наоборот, если $b(\lambda)$*—примарный реактивный множитель, то векторы* f *и* g *связаны уравнениями* (6), *в которых числа* $\alpha, \theta, \gamma, \delta$ *удовлетворяют „острому" матричному неравенству* (5) *и*

$$\alpha = f J f^*, \ \gamma = \frac{\sigma_0}{\bar\lambda_0} f J \bar f^*, \ \delta = i \frac{\sigma_0}{\tau_0} f j J f^*.$$

Мы не останавливаемся здесь на тех случаях, когда полюсы примарного реактивного множителя лежат на действительной или на мнимой оси, так как структура его намного проще.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Վ. Պ. ՊՈՏԱՊՈՎ

Ընդհանուր թեորեմներ անալիտիկ մատրից-ֆունկցիաների կառուցվածքի և նրանցից էլեմենտար արտադրիչների անջատման մասին

Հոդվածում ապացուցված են թեորեմներ J-չսեղմող մատրից-ֆունկցիայի պարզագույն արտադրիչների անջատման ու նրանց կառուցվածքի վերաբերյալ։ Տրվում է նաև պրիմար ռեակտիվ արտադրիչի սպառիչ նկարագիրը։ Վերջին արդյունքը սկզբունքային նշանակություն ունի էլեկտրական շղթաների սինթեզի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *В. П. Потапов*, Мультипликативная структура аналитических J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Московского матем. общества, т. 4, 125—236 (1955). 2 *И. В. Ковалишина* и *В. П. Потапов*, «Известия АН АрмССР», т. 18, № 6, 3—10 (1965) 3 *И. В. Ковалишина*, «Известия АН АрмССР», т. 1, № 2, 138—146 (1966).