

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

УДК 539.30

Академик АН Армянской ССР С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян

К вопросу теории упругости разномодульного материала

(Представлено 24/1 1969)

В работе доказывается, что для разномодульного материала, при наличии полученных авторами ранее связей между напряжениями и деформациями, элементарная работа внутренних сил является полным дифференциалом.

1. Для разномодульного упругого изотропного материала физические законы, связывающие напряжения с деформациями, имеют вид ⁽¹⁻³⁾:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + (a_{22} - a_{11})m_1^2\sigma_\beta, \\ e_{yy} &= a_{11}\varepsilon_y + a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_z) + (a_{22} - a_{11})m_2^2\sigma_\beta, \\ e_{zz} &= a_{11}\varepsilon_z + a_{12}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (a_{22} - a_{11})m_3^2\sigma_\beta, \\ e_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xy} + 2(a_{22} - a_{11})m_1m_2\sigma_\beta, \\ e_{xz} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{xz} + 2(a_{22} - a_{11})m_1m_3\sigma_\beta, \\ e_{yz} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{yz} + 2(a_{22} - a_{11})m_2m_3\sigma_\beta, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где наряду с известными обозначениями имеем также σ_β — одно из главных напряжений в данной точке, имеющее отличный от других главных напряжений (σ_α , σ_γ) знак; m_i — направляющие косинусы главного направления напряжений и деформаций β .

В зависимости от знаков главных напряжений для коэффициентов упругости a_{ik} имеем:

при $\sigma_\beta < 0, \sigma_\alpha > 0, \sigma_\gamma > 0$ $a_{11} = \frac{1}{E^+}, a_{22} = \frac{1}{E^-};$

при $\varepsilon_\beta > 0, \varepsilon_\alpha < 0, \varepsilon_\gamma < 0$ $a_{11} = \frac{1}{E^-}, a_{22} = \frac{1}{E^+}$

и для обоих случаев $a_{12} = -\nu^+/E^+ = -\nu^-/E^-$, где E^+ , ν^+ и E^- , ν^- — модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении и сжатии соответственно.

Относительное расположение главных направлений α, β, γ с осями координат x, y, z в данной точке определяется при помощи де-

вяти направляющих косинусов (см. схему), связанных между собой следующими зависимостями:

	α	β	γ
x	l_1	m_1	n_1
y	l_2	m_2	n_2
z	l_3	m_3	n_3

$$\begin{aligned}
 l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1 \quad (i = 1, 2, 3), \\
 l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0 \quad (lmn).
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Формулы преобразования компонентов деформации и напряжения в данной точке при переходе от одной системы координат к другой, связанные между собой схемой (1.2), при условии, что α, β, γ — главные направления напряжений и деформаций, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 e_{x,x} &= l_1^2 e_{\alpha\alpha} + m_1^2 e_{\beta\beta} + n_1^2 e_{\gamma\gamma}, \\
 e_{yz} &= 2(l_2 l_3 e_{\alpha\alpha} + m_2 m_3 e_{\beta\beta} + n_2 n_3 e_{\gamma\gamma}), \\
 \sigma_x &= l_1^2 \sigma_\alpha + m_1^2 \sigma_\beta + n_1^2 \sigma_\gamma, \\
 \tau_{yz} &= l_2 l_3 \sigma_\alpha + m_2 m_3 \sigma_\beta + n_2 n_3 \sigma_\gamma
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

(xyz, 123)

или

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= l_1^2 e_{x,x} + l_2^2 e_{y,y} + l_3^2 e_{z,z} + l_1 l_2 e_{x,y} + l_1 l_3 e_{x,z} + l_2 l_3 e_{y,z}, \\
 e_{\beta\gamma} &= 2(m_1 n_1 e_{x,x} + m_2 n_2 e_{y,y} + m_3 n_3 e_{z,z}) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) e_{x,y} + \\
 &+ (m_1 n_3 + m_3 n_1) e_{x,z} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) e_{y,z} = 0, \\
 \sigma_\alpha &= l_1^2 \sigma_x + l_2^2 \sigma_y + l_3^2 \sigma_z + 2(l_1 l_2 \tau_{xy} + l_1 l_3 \tau_{xz} + l_2 l_3 \tau_{yz}), \\
 \tau_{\beta\gamma} &= m_1 n_1 \sigma_x + m_2 n_2 \sigma_y + m_3 n_3 \sigma_z + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \tau_{xy} + \\
 &+ (m_1 n_3 + m_3 n_1) \tau_{xz} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \tau_{yz} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

($\alpha\beta\gamma$, lmn).

Законы упругости (1.1) в главных направлениях напряжений и деформаций запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 e_{\alpha\alpha} &= a_{11} \sigma_\alpha + a_{12} (\sigma_\beta + \sigma_\gamma), \\
 e_{\beta\beta} &= a_{22} \sigma_\beta + a_{12} (\sigma_\alpha + \sigma_\gamma), \\
 e_{\gamma\gamma} &= a_{11} \sigma_\gamma + a_{12} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta).
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Приведем также выражения для напряжений через компоненты деформации

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2A e_{x,x} + B\theta - B_3 (B + 2A m_1^2) \sigma_\beta, \quad \tau_{xy} = A (e_{xy} - 2B_3 m_1 m_2 \sigma_\beta), \\
 \sigma_y &= 2A e_{y,y} + B\theta - B_3 (B + 2A m_2^2) \sigma_\beta, \quad \tau_{xz} = A (e_{xz} - 2B_3 m_1 m_3 \sigma_\beta), \\
 \sigma_z &= 2A e_{z,z} + B\theta - B_3 (B + 2A m_3^2) \sigma_\beta, \quad \tau_{yz} = A (e_{yz} - 2B_3 m_2 m_3 \sigma_\beta),
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

где

$$A = \frac{1}{2(a_{11} - a_{12})}, \quad B = \frac{a_{12}}{(a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})}, \quad B_3 = a_{22} - a_{11},
 \tag{1.7}$$

$$\theta = e_{x,x} + e_{y,y} + e_{z,z} = e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma}.$$

Главное напряжение σ_β через деформации выражается следующим образом:

$$\sigma_\beta = \frac{(a_{11} + 2a_{12}) e_{\beta\beta} - a_{12}\theta}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{33} - 2a_{12}^2} = \frac{2Ae_{\beta\beta} + B\theta}{1 + B_3(2A + B)}. \quad (1.8)$$

Выражения для напряжений в главных направлениях напряжений и деформаций будут:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= A_{11}e_{\alpha\alpha} + A_{12}e_{\beta\beta} + A_{13}e_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_\beta &= A_{12}e_{\alpha\alpha} + A_{22}e_{\beta\beta} + A_{13}e_{\gamma\gamma}, \\ \sigma_\gamma &= A_{13}e_{\alpha\alpha} + A_{12}e_{\beta\beta} + A_{11}e_{\gamma\gamma}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad A_{22} = \frac{1}{\Delta} (a_{11}^2 - a_{12}^2), \quad A_{12} = -\frac{a_{12}}{\Delta} (a_{11} - a_{12}), \quad (1.10)$$

$$A_{13} = -\frac{a_{12}}{\Delta} (a_{22} - a_{12}), \quad \Delta = (a_{11} - a_{12})(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{33} - 2a_{12}^2).$$

2. Относительно рассматриваемого здесь материала принимается, что в пределах малых деформаций он является упругим. Предполагаем, что в процессе деформации работа внутренних сил U полностью переходит в потенциальную энергию деформации W , и наоборот, т. е.

$$U = W. \quad (2.1)$$

Для рассматриваемого материала, с энергетической точки зрения, весьма важно выяснить вопрос: является ли элементарная работа внутренних сил полным дифференциалом; так как только после положительного ответа на этот вопрос можно говорить о существовании потенциала упругих сил, или то же самое, что внутренние упругие силы имеют потенциал.

Удельная элементарная работа внутренних сил есть

$$\delta U = \sigma_x \delta e_{xx} + \sigma_y \delta e_{yy} + \sigma_z \delta e_{zz} + \tau_{xy} \delta e_{xy} + \tau_{xz} \delta e_{xz} + \tau_{yz} \delta e_{yz}. \quad (2.2)$$

Докажем, что, при приведенных выше зависимостях между напряжениями и деформациями, выражение (2.2) является полным дифференциалом.

Подставляя значения напряжений (1.6), с учетом (1.8), в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \delta U &= A\delta [e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + \frac{1}{2}(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2)] + \frac{1}{2}B(1 - BC)\delta\theta^2 - \\ &- 2ABC[e_{\beta\beta}\delta\theta + \theta(m_1^2\delta e_{xx} + m_2^2\delta e_{yy} + m_3^2\delta e_{zz} + m_1m_2\delta e_{xy} + m_1m_3\delta e_{xz} + \\ &+ m_2m_3\delta e_{yz})] - 4A^2Ce_{\beta\beta}(m_1^2\delta e_{xx} + m_2^2\delta e_{yy} + m_3^2\delta e_{zz} + m_1m_2\delta e_{xy} + \\ &+ m_1m_3\delta e_{xz} + m_2m_3\delta e_{yz}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$C = \frac{B_3}{1 + B_3(2A + B)} = \frac{(a_{22} - a_{11})(a_{11}^2 + a_{11}a_{12} - 2a_{12}^2)}{a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} - 2a_{12}^2}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) легко заметить, что выражение (2.2) будет полным дифференциалом, если последняя скобка в (2.3) будет представлять собой вариацию $e_{\beta\beta}$:

$$m_1^2 \delta e_{xx} + m_2^2 \delta e_{yy} + m_3^2 \delta e_{zz} + m_1 m_2 \delta e_{xy} + m_1 m_3 \delta e_{xz} + m_2 m_3 \delta e_{yz} = \delta e_{\beta\beta}. \quad (2.5)$$

Равенство (2.5) будет справедливым только в том случае, если для частных производных $e_{\beta\beta}$ по компонентам деформации имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{xx}} &= m_1^2, & \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{yy}} &= m_2^2, & \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{zz}} &= m_3^2, \\ \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{xy}} &= m_1 m_2, & \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{xz}} &= m_1 m_3, & \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{yz}} &= m_2 m_3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Приведем доказательство справедливости этих формул.

Вычислив частную производную $e_{\beta\beta}$ (1.4) по e_{xx} , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\beta\beta}}{\partial e_{xx}} &= m_1^2 + \left[2m_1 \frac{\partial m_1}{\partial e_{xx}} e_{xx} + 2m_2 \frac{\partial m_2}{\partial e_{xx}} e_{yy} + 2m_3 \frac{\partial m_3}{\partial e_{xx}} e_{zz} + \right. \\ &+ \left(m_1 \frac{\partial m_2}{\partial e_{xx}} + m_2 \frac{\partial m_1}{\partial e_{xx}} \right) e_{xy} + \left(m_1 \frac{\partial m_3}{\partial e_{xx}} + m_3 \frac{\partial m_1}{\partial e_{xx}} \right) e_{xz} + \\ &\left. + \left(m_2 \frac{\partial m_3}{\partial e_{xx}} + m_3 \frac{\partial m_2}{\partial e_{xx}} \right) e_{yz} \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Покажем теперь, что в (2.7) выражение, заключенное в квадратных скобках, равно нулю. Для этого продифференцируем тождество

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \quad (2.8)$$

по e_{xx} и, исходя из (1.2), рассмотрим следующую линейную однородную систему относительно m_1, m_2, m_3 :

$$m_1 \frac{\partial m_1}{\partial e_{xx}} + m_2 \frac{\partial m_2}{\partial e_{xx}} + m_3 \frac{\partial m_3}{\partial e_{xx}} = 0, \quad (2.9)$$

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_3 l_3 = 0, \quad m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0.$$

Из (2.8) видно, что m_1, m_2 и m_3 не могут обращаться в нуль одновременно. Поэтому для удовлетворения системы (2.9) достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \partial m_1 / \partial e_{xx} & \partial m_2 / \partial e_{xx} & \partial m_3 / \partial e_{xx} \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Так как последние строки этого определителя не могут быть пропорциональными, то равенство (2.10) выполнится, если первая строка будет представлять собой линейную комбинацию остальных двух строк, т. е.

$$\frac{\partial m_i}{\partial e_{xx}} = al_i + bn_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.11)$$

Подставляя теперь (2.11) в (2.7), замечаем, что выражение в квадратных скобках (2.7) действительно обращается в нуль в силу формул (1.4), где $e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} = 0$. Таким образом доказана справедливость первой из формул (2.6). Аналогичным образом доказывается справедливость и остальных формул (2.6).

Теперь, имея в виду формулы (2.6), нетрудно убедиться в справедливости равенства (2.5) и тем самым можно считать доказанным, что выражение (2.2) действительно является полным дифференциалом.

Из приведенных выше результатов и на основании (2.1) можно найти следующие выражения для удельной потенциальной энергии деформации

$$W = \frac{1}{2} (2A + B) (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + B (e_{xx}e_{yy} + e_{xx}e_{zz} + e_{yy}e_{zz}) + \\ + \frac{1}{2} A (e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2) - \frac{1}{2} C (2A e_{\beta\beta} + B\theta)^2, \quad (2.12)$$

или

$$W = \frac{1}{2} a_{11} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + a_{12} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \\ + (a_{11} - a_{12}) (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + \frac{1}{2} (a_{22} - a_{11}) \sigma_{\beta}^2, \quad (2.13)$$

или, наконец,

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x e_{xx} + \sigma_y e_{yy} + \sigma_z e_{zz} + \tau_{xy} e_{xy} + \tau_{xz} e_{xz} + \tau_{yz} e_{yz}). \quad (2.14)$$

Отметим, что формулы (2.12) — (2.14) для удельной потенциальной энергии деформации приведены в работе (³), где они были получены несколько по-иному.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՇՈՒՄՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ նյութի առաձգականության տեսության հարցի վերաբերյալ

Աշխատանքում ապացուցված է, որ տարամոդուլ նյութի համար հեղինակների կողմից առաջադրված առաձգականության օրենքների առկայության դեպքում ներքին ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքը իրենից ներկայացնում է լրիվ դիֆերենցիալ։ Դա հիմք է հանդիսանում ասելու այն մասին, որ ներքին առաձգական ուժերը ունեն պոտենցիալ։

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

¹ С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, Инж. ж., МТТ, 2, 1966. ² С. А. Амбарцумян, «Известия АН АрмССР», Механика, 2 (1966). ³ С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, Инж. ж., МТТ, 6 (1966).