ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVIII 1969 4

МАТЕМАТИКА

УДК 51.01:518.5

Г. Б. Маранджян

Иерархии рекурсивных функций и асимптотическая оптимальность

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 22/I 1969)

1. Понятие сложности натурального числа (НЧ) относительно частично-рекурсивной функции (ЧРФ) и понятие асимптотически оптимальной функции (АОФ) были введены А. Н. Колмогоровым ([1]). Некоторые свойства функций, являющихся АОФ для множества $Ч^1$ одноместных ЧРФ и сложностей НЧ относительно них исследованы в ([2]).

Язык ЧРФ позволяет охватить средства и возможности любых алгорифмических языков и поэтому рассмотрение кодирования НЧ при помощи этого языка вполне естественно. Вместе с тем, иногда предпочтительнее употреблять для кодирования языки, сравнительно бедные по своим выразительным возможностям. Наиболее характерной особенностью таких языков является то, что оказывается возможным построение таких АОФ для них, что сложности НЧ относительно этих АОФ вычислимы (с помощью функций, изобразимых, вообще говоря, в более богатых языках; напомним, что для сложностей НЧ относительно АОФ для $Ч^1$ принципиально невозможно даже построение удовлетворительных верхних и нижних вычислимых оценок ([2]), теоремы 7—9). Это обстоятельство, в свою очередь, открывает возможности для аналитического исследования функциональных соотношений между НЧ и их сложностями при конструктивном понимании термина „функция".

В настоящей заметке исследуются некоторые свойства АОФ, а также сложностей НЧ относительно них, для одной иерархии множеств обще-рекурсивных функций, отличающихся друг от друга богатством выразительных возможностей. Все термины и утверждения трактуются конструктивно ([3]).

2. Введем некоторые обозначения, используемые на протяжении остальной части статьи. Буквами x, y, a, b, c будут обозначаться переменные для натуральных чисел 0, 1, 2, 3,... Строчными греческими буквами φ, ψ, ξ будут обозначаться переменные для обще-рекурсивных функций. Символы $[\,]$, μ, $\simeq$ будут использоваться в том

смысле, в каком они используются в ([4]). Обозначения O', $<'_0$, C_a используются как в ([5]). Если A есть одноместная ЧРФ, а x — натуральное число, то выражение $!A(x)$ читается так: „имеет смысл $A(x)$" см. ([3]), стр. 293). Через l обозначена одноместная (элементарная по Кальмару ([6])) функция, такая, что $l(x) = [\log_2(x+1)]$ (см. ([1])).

Пусть φ есть одноместная обще-рекурсивная функция (ОРФ). Введем одноместную ЧРФ K_φ следующим образом: $K_\varphi(x) \simeq l(\mu y(\varphi(y) = x))$. Пусть x есть натуральное число. Тогда, если $!K_\varphi(x)$, то число $K_\varphi(x)$ называем *сложностью* натурального числа x относительно функции φ. Такое определение несколько отличается от определения сложности в ([1]). Если φ есть ОРФ и x принадлежит области значений функции φ, то сложность при новом определении совпадает со сложностью при первоначальном определении. Если же x не принадлежит области значений функции φ, то сложность числа x относительно φ при новом определении оказывается неопределенной (в ([1]) в последнем случае принимается $K_\varphi(x) = +\infty$)).

Пусть φ и ψ есть одноместные ОРФ и c есть натуральное число. Тогда $M(\varphi, \psi, c)$ будет использоваться для сокращенной записи следующего высказывания:

$$\forall x \exists y (\varphi(y) = \psi(x) \& l(y) \leqslant l(x) + c).$$

Пусть L^1 есть конструктивное множество одноместных ОРФ. Если одноместная ОРФ φ такова, что $\forall \psi (\psi \in L^1 \supset \exists c M(\varphi, \psi, c))$, то говорим, что φ есть *асимптотически оптимальная функция* для L^1 (ср. с ([1, 2])).

3. В работе ([5]) построена иерархия конструктивных множеств C_a ОРФ, связанная с некоторой системой обозначений для конструктивных трансфинитных чисел. Рассмотрим некоторые свойства этой иерархии, представляющие интерес с точки зрения кодирования натуральных чисел с помощью функций, принадлежащих множествам, занимающим различное положение в указанной иерархии. Через C_a^1 будем обозначать конструктивное множество одноместных функций из C_a, где a есть натуральное число, являющееся обозначением для трансфинитного числа в упомянутой системе обозначений для конструктивных трансфинитных чисел.

Согласно Основной теореме из ([1]), множество $Ч^1$ одноместных ЧРФ содержит АОФ для $Ч^1$. В теоремах 1 и 2 дается ответ на аналогичный вопрос для множеств C_a^1 обще-рекурсивных функций.

Теорема 1. *Каковы бы ни были $a \in O'$ и $b \in O'$ такие, что $a <'_0 b$, существует функция φ, являющаяся* АОФ *для C_a^1, такая, что $\varphi \in C_b^1$.*

Лемма 1. *Для каждого $a \in O'$, если φ есть* АОФ *для C_a^1, то не существует функции $\psi \in C_a^1$, мажорирующей функцию φ.*

Теорема 2. *Каково бы ни было $a \in O'$, не существует функции φ такой, что $\varphi \in C_a^1$ и φ есть* АОФ *для C_a^1.*

Доказательство теоремы 2 основывается на лемме 1.

Лемма 2. *Пусть $a \in O'$ и φ есть* АОФ *для C_a^1. Не может существовать функции ψ, принадлежащей C_a^1, такой, что $\forall x\,(K_\varphi(\psi(x)) \geqslant x)$.*

Таким образом, ни при каком $a \in O'$ множество C_a^1 не может содержать функции, которая по каждому натуральному числу x могла бы вычислять число, сложность которого относительно функции, являющейся АОФ для C_a^1, была бы больше x. Явления аналогичного рода иногда объединяют термином „эффект Яблонского". С этим же явлением связаны теоремы 3 и 7 в (2). В теореме 3 этот результат будет значительно усилен.

Пусть L^1 есть конструктивное множество одноместных ОРФ. Будем говорить, что функция φ L^1—прогнозируема, если $\varphi \in L^1$ и существует функция ψ такая, что $\psi \in L^1$ и выполнено следующее условие: $\forall xy\,(y < x \supset \neg(\varphi(y) = \varphi(\psi(x))))$. Примерами L^1-прогнозируемых функций могут служить введенная выше функция l, (а также n-кратная итерация ее), любая неповторяющаяся функция из L^1, любая функция из L^1, обращение которой (в смысле работы (7)) принадлежат L^1 и т. д. Следующая теорема устанавливает, что в рассматриваемых нами языках для кодирования натуральных чисел имеет место явление, более сильное, чем эффект Яблонского.

Теорема 3. *Каковы бы ни были $a \in O'$, функция φ, являющаяся* АОФ *для C_a^1 и C_a^1—прогнозируемая функция ψ, не может существовать функции $\xi \in C_a^1$ такой, что $\forall x\,(K_\varphi(\xi(x)) \geqslant \psi(x))$.*

Есть некоторая аналогия между этим результатом и результатом, сформулированным в теореме 8 из (2).

Будем применять обозначение $\varphi \sim \psi$ в качестве сокращения для суждения $\exists c\,(M(\varphi, \psi, c)\,\&\,M!(\psi, \varphi, c))$. Нетрудно видеть, что отношение $\sim$ рефлексивно, транзитивно и симметрично, т. е. является отношением эквивалентности.

Пусть φ, ψ и ξ есть одноместные ОРФ, такие, что $\varphi(x) = \xi(\psi(x))$. Тогда функцию φ будем обозначать через $\xi o \psi$.

Теорема 4. *Каковы бы ни были $a \in O'$ и функция φ, являющаяся* АОФ *для C_a^1, существуют* ОРФ *ψ и ξ такие, что выполняются следующие соотношения*: 1) $\psi \sim \varphi$; 2) $\xi \sim \varphi$; 3) $\varphi \sim \xi o \psi$.

Докажем теперь следующую теорему, аналогичную теореме 3 из (2).

Теорема 5. *Каковы бы ни были $a \in O'$,* ОРФ *φ, являющаяся* АОФ *для C_a^1 и функция $\psi \in C_a^1$, существует константа c такая, что выполняется следующее состношение $\forall x\,(K_\varphi(\psi(x)) \leqslant K_\varphi(x) + c)$.*

Теорема 6. *Каковы бы ни были $a \in O'$, функция φ, являющаяся* АОФ *для C_a^1 и функция $\psi \in C_a^1$, оценивающая сверху сложность натуральных чисел относительно функции φ, если существует функция $\xi \in C_a^1$ такая, что $\forall xy\,(\psi(\xi(x) + y) > x)$, то существует* *бесконечная конструктивная последовательность функций* ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3, $\cdots$ *из* C_a^1 *таких, что выполняются следующие условия:*

1) $\forall xyz\,(y < z \supset (K_\varphi(x) \leqslant \psi_z(x) \,\&\, \psi_z(x) \leqslant \psi_y(x) \,\&\, \psi_y(x) \leqslant \psi(x)))$,

2) *если* $y < z$, *то для бесконечного множества значений аргумента* x *имеет место строгое неравенство:* $\psi_z(x) < \psi_y(x)$.

Теорема, аналогичная данной, была уже доказана (см. ([2]), следствие 1 теоремы 9), для функций, асимптотически оптимальных для $Ч^1$.

Теорема 7. *Если* $a \in O'$, $b \in O'$ *и* $a <_O b$, *то* C_b^1 *содержит рекурсивную перестановку, асимптотически оптимальную для* C_a^1.

Заметим, что если φ есть АОФ для $Ч^1$, то φ не может принимать каждое из своих значений в точности один раз.

Доказательство теоремы 7 базируется на следующей лемме.

Лемма 3. *Существует примитивно-рекурсивный оператор* F, *который каждую одноместную* ОРФ φ *перерабатывает в рекурсивную перестановку* $\psi = F(\varphi)$, *такую, что имеет место* $M(\psi, \varphi, 1)$.

Если ЧРФ A и B являются АОФ для $Ч^1$, то, как доказано ([1]), для них имеет место отношение $A \sim B$. Как показывает следующая теорема, этот результат не переносится на обще-рекурсивные АОФ, более того, существуют „несравнимые“ АОФ, то есть такие φ и ψ, что обе функции являются АОФ для одного и того же множества функций и выполняется условие $\forall c\,(\neg M(\varphi, \psi, c) \,\&\, \neg M(\psi, \varphi, c))$.

Теорема 8. *Пусть* L^1 *есть конструктивное множество одноместных* ОРФ. *Если существует* ОРФ φ, *являющаяся* АОФ *для* L^1, *то существуют* ОРФ ψ_1 *и* ψ_2, *асимптотически оптимальные для* L^1, *такие, что* $\forall c\,(\neg M(\psi_1, \psi_2, c) \,\&\, \neg M(\psi_2, \psi_1, c))$.

Следствие. *Пусть* $a \in O'$, $b \in O'$ *и* $a <_O b$. *Тогда* C_b^1 *содержит несравнимые функции* ψ_1 *и* ψ_2, *являющиеся* АОФ *для* C_a^1.

Теорема 9. *Если* $a \in O'$, $b \in O'$ $a <_O b$, $\varphi \in C_b^1$ *и* φ *есть* АОФ *для* C_a^1, *то* $K_\varphi \in C_b^1$ *и* $K_\varphi \overline{\in} C_a^1$.

Можно показать, что теоремы 1—9, следствия из них и леммы 1—3 остаются справедливыми и для иерархии субпримитивно-рекурсивных функций Гжегорчика, если во всех формулировках заменить все вхождения „$a \in O'$“ на „$a \geqslant 3$“, „$a <_O b$“, на „$a < b$“, „C_a^1“ на „E_a^1“, где E_a^1 есть множество одноместных функций из множества E^a упомянутой иерархии.

В заключение автор приносит глубокую благодарность И. Д. Заславскому, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Հ. Բ. ՄԱՐԱՆՋՅԱՆ

Ռեկուրսիվ ֆունկցիաների ստորակարգություններ և ասիմպտոտիկ օպտիմալություն

Հոդվածում ուսումնասիրված են ընդհանուր ռեկուրսիվ ասիմպտոտիկ օպտիմալ ֆունկցիաների և նրանց նկատմամբ բնական թվերի բարդությունների որոշ հատկությունները։

Դիտարկվող ֆունկցիաները պատկանում են ռեկուրսիվ ֆունկցիաների որոշ դասերին, որոնք կազմում են մի կոնստրուկտիվ տրանսֆինիտ ստորակարգություն։ Ստացված արդյունքները համեմատված են մասնակի ռեկուրսիվ ասիմպտոտիկ օպտիմալ ֆունկցիաների և նրանց նկատմամբ բնական թվերի բարդությունների համար (2) հոդվածում ստացված արդյունքների հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Н. Колмогоров.* Три подхода к определению понятия „количество информации“, Проблемы передачи информации, т. 1. вып. 1. 3—11, М., 1965. [3] *Г. Б. Маранджян.* „Известия АН АрмССР“ сер., Математика, т. 4, вып. 1 (1969). [3] *Н. А. Шанин*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, LII, 226—311, М.—Л., 1958. [4] *С. К. Клини*, Введение в метаматематику, ИИЛ, М., 1957. [5] *S. C. Kleene.* Extension of an effectively generated class of functions, Colloquium Mathematicum, vol. VI, 67—78, 1958. [6] *L. Kalmár.* Egyszerü pe'lda eldönthetetlen aritmetikai proble'ma'ra, Matematikai e's Fizikai Lapok, 50, 1—23, 1943. [7] *J. Robinson.* General recursive functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1, № 6 (for 1950, publ. 1951), 703—718. [8] *A. Grzegorczyk.* Some classes of recursive functions; Rozprawy Matematiczne, IV, Warszawa, 1—46, 1953.