ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVIII 1969 2

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

Об n-кратной полноте для одного класса полиномиальных операторных пучков

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/X 1968)

В работах М. В. Келдыша ([1]) и других авторов установлен ряд критерий об n-кратной полноте системы собственных и присоединенных (с. и п.) элементов для различных классов полиномиальных операторных пучков.

В настоящей заметке рассматривается некоторый класс полиномиальных операторных пучков, к которым известные критерии не применимы. Тем не менее для этого класса тоже удается установить n-кратную полноту системы с. и п. функций в соответствующем гильбертовом пространстве.

Рассмотрим следующий операторный пучок

$$L(\lambda) = \mathfrak{M}_n + \lambda\mathfrak{M}_{n-1} + \cdots + \lambda^{n-1}\mathfrak{M}_1 + \lambda^n E. \tag{1}$$

Здесь $\mathfrak{M}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$ по формуле ([2])

$$\mathfrak{M}_j = L_0^{-1} L_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

где

$$L_j = \sum_{i_1+\cdots+i_m=2\nu} a^j_{i_1,\cdots,i_m} \frac{\partial^{2\nu}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}, \quad (j=0, 1, 2, \cdots, n),$$

однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка 2ν, причем оператор L_0 эллиптический ([3]). L_0^{-1} оператор, обратный оператору L_0 при нулевых граничных условиях

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \cdots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0; \tag{2}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$ — соболевское пространство функций, имеющих в области Ω суммируемые с квадратом обобщенные производные до порядка ν и удовлетворяющие граничным условиям (2) в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.

В дальнейшем предполагается, что область Ω есть m-мерный эллипсоид с граничной поверхностью $\partial\Omega$ ($\Gamma(x)=0$ — уравнение этой поверхности).

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций полиномиального операторного пучка* (1) *n-кратно полна в гильбертовом пространстве* $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство H, равное ортогональной сумме n экземпляров пространства $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$:

$$H = \underbrace{\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega) \times \cdots \times \overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)}_{n}.$$

В пространстве H рассмотрим оператор $\mathfrak{M}$, заданный с помощью операторной матрицы

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & E \\ -\mathfrak{M}_n & -\mathfrak{M}_{n-1} & -\mathfrak{M}_{n-2} & \cdots & \cdots & -\mathfrak{M}_1 \end{pmatrix},$$

E — единичный оператор в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$.

Как известно ([4]), n-кратная полнота системы с. и п. функций операторного пучка (1) равносильна полноте корневых векторов операторной матрицы $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве H.

Перейдем к доказательству полноты системы корневых векторов оператора $\mathfrak{M}$ в H.

Обозначим через R_N — пространство всех полиномов от $x=(x_1, \cdots, x_m)$, степени которых не превышают N (N — произвольное натуральное число).

Через $\overset{0}{R}_N$, обозначим пространство всех тех полиномов из R_N, которые удовлетворяют граничным условиям (2) на поверхности эллипсоида Ω. Тогда пространство всех полиномов, удовлетворяющих граничным условиям (2), есть

$$\overset{0}{R} = \bigcup_{N=2\nu}^{\infty} \overset{0}{R}_N.$$

Лемма 1. *Если полином $p=p(x)\in\overset{0}{R}$ имеет степень n, то он имеет вид*

$$p(x) = \Gamma^{\nu}(x)\cdot q(x),$$

где $\Gamma(x)$ левая часть уравнения поверхности эллипсоида Ω, а $q(x)$ полином степени $n-2\nu$.

Доказательство. Обозначим через Δ^{ν} полигармонический оператор

$$\Delta^{\nu} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right)^{\nu}.$$

В эллипсоиде Ω рассмотрим первую краевую задачу для этого оператора

$$\Delta^{\nu} u(x) = \Delta^{\nu} p(x), \tag{3}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \cdots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

$u(x)$ — искомая функция, а $p(x)$ — заданный полином из пространства $\overset{0}{R}$.

Ищем $u(x)$, заведомо удовлетворяющей граничным условиям (2), в виде

$$u(x) = \Gamma^{\nu}(x)\, q(x),$$

где $q(x)$ неизвестный полином степени $n-2\nu$. Тогда из уравнения

$$\Delta^{\nu}\{\Gamma^{\nu}(x)\cdot q(x)\} = \Delta^{\nu} p(x),$$

приравнивая соответствующие коэффициенты, получим неоднородную алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $q(x)$, причем число уравнений и коэффициентов совпадают. Детерминант этой системы отличен от нуля, поскольку соответствующая однородная система имеет только нулевое решение в силу единственности решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения. Поэтому неоднородная система имеет единственное решение.

Таким образом решение задачи (3), (4) имеет вид

$$u(x) = \Gamma^{\nu}(x)\cdot q(x),$$

где $q(x)$ уже известный полином степени $n-2\nu$.

Но тогда из (3) опять в силу единственности решения первой краевой задачи заключаем

$$p(x) = \Gamma^{\nu}(x)\cdot q(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого N каждый из операторов $\mathfrak{M}_j = L_0^{-1} L_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ отображает пространство $\overset{0}{R}_N$ в себя.*

Лемма 3. *Для любого N операторная матрица $\mathfrak{M}$ отображает пространство $\overset{0}{R} = \underbrace{\overset{0}{R}_N \times \cdots \times \overset{0}{R}_N}_{n}$ в себя.*

Согласно известной теореме из алгебры и в силу леммы 3, система корневых векторов оператора $\mathfrak{M}$ образует базис в конечномерном пространстве $\overset{0}{R}_N$ для любого N. Поэтому каждый вектор из пространства $\overset{0}{R} = \bigcup\limits_{N=2\nu}^{\infty} \overset{0}{R}_N$ есть линейная комбинация корневых векторов оператора $\mathfrak{M}$. Таким образом, полнота системы корневых векторов оператора $\mathfrak{M}$ в H будет установлена, если мы покажем, что замыкание пространства $\overset{0}{R}$ в метрике H совпадает с пространством H. Легко усмотреть, что для этого достаточно доказать всюду плотность пространства полиномов $\overset{0}{R}$ в $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$ в метрике этого пространства,

$$\overline{\overset{0}{R}} = \overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega). \tag{*}$$

Последнее соотношение без нарушения общности установим для m-мерного единичного шара Ω_0 с центром в начале координат.

Покажем сначала, что полиномами пространства $\overset{0}{R}$, удовлетворяющими граничным условиям (2), можно равномерно аппроксимировать вместе с их производными до порядка ν гладкие финитные функции в Ω_0.

Пусть $\varphi(x_1\cdots, x_m)$ гладкая финитная в Ω_0 функция, тогда существует такое достаточно малое число $\delta>0$, что $\varphi(x_1,\cdots, x_m)=0$ при $1-\delta\leqslant r\leqslant 1$. Согласно известной теореме, обобщающей теорему Вейерштраса из теории аппроксимации, для любого $\varepsilon>0$ существует такой полином $Q(x)\in\overset{0}{R}$, что

$$\max_{0<r<1} |\varphi(x_1,\cdots,x_m)-Q(x_1,\cdots,x_m)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{8}$$

$$\max_{0<r<1}\left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}-\frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{9}$$

$$(i_1+\cdots+i_m=k,\quad k=1,2,\cdots,\nu).$$

Из (8) и из финитности φ следует:

$$\max_{1-\delta<r\leqslant 1} |Q(x_1,\cdots, x_m)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{10}$$

$$\max_{1-\delta<r\leqslant 1}\left|\frac{\partial^k Q}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{11}$$

$$(i_1+\cdots+i_m=k,\ k=1,2,\cdots,\nu).$$

Составим полином

$$P(x_1,\cdots,x_m)=\{1-[1+(r^2-1)^{2\nu+1}]^M\}\cdot Q(x_1,\cdots,x_m),$$

который, очевидно, при каждом целом положительном M имеет вид (7) и следовательно принадлежит пространству $\overset{0}{R}$. Легко заметить, что, выбирая M достаточно большим, получим:

$$\max_{0<r<1-\delta} |[(r^2-1)^{2\nu+1}+1]^M\cdot Q(x_1\cdots,x_m)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{12}$$

$$\max_{0<r<1-\delta}\left|\frac{\partial^k\{[(r^2-1)^{2\nu+1}+1]^M\cdot Q}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

Наконец, в силу (8), (10), (12) имеем:

$$\max_{0<r<1}|\varphi(x_1,\cdots,x_m)-P(x_1,\cdots,x_m)|\leqslant\max_{0<r<1}|\varphi(x_1,\cdots,x_m)-$$
$$-Q(x_1,\cdots,x_m)|+\max_{0<r<1-\delta}|[(r^2-1)^{2\nu+1}+1]^M\cdot Q|+$$
$$+\max_{0<r<1}\left|\frac{\partial^k\varphi(x_1,\cdots,x_m)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}-\frac{\partial^k P(x_1\cdots,x_m)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right|<\varepsilon.$$

Аналогично в силу (9), (11), (13) имеем:

$$\max_{0 \leqslant r \leqslant 1} \left| \frac{\partial^k \varphi(x_1, \cdots, x_m)}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_m^{l_m}} - \frac{\partial^k p(x_1, \cdots, x_m)}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_m^{l_m}} \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, полиномами из пространства $\overset{0}{R}$ можно аппроксимировать гладкие финитные в Ω функции в смысле сходимости $C(\Omega)$ и следовательно в метрике пространства $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$.

Но, как известно, гладкие финитные функции сами в свою очередь образуют плотное множество в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$. Соотношение (*) и следовательно теорема доказаны.

В заключение заметим, что в работе ([5]) нами фактически установлена двукратная полнота системы собственных функций для квадратичного операторного пучка (1) при $n=2$, $\nu=1$.

Приведем одно применение доказаной теоремы.

Рассмотрим в эллипсоиде Ω следующую смешанную задачу;

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} L_0 u + \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} L_1 u + \cdots + \frac{\partial}{\partial t} L_{n-1} u + L_n u = 0, \tag{14}$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \cdots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1} u}\Big|_{t=0} = \varphi_{n-1}(x), \tag{15}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial u}\Big|_{\partial\Omega} = \cdots = \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial n^{\nu-1}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{16}$$

где $u = u(t, x)$, $x = (x_1 \cdots, x_m)$, $0 \leqslant t < +\infty$.

Предполагается, что начальные функции $\varphi_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ принадлежат пространству $\overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega)$.

Применяя с обеих сторон уравнения (14) оператор L_0^{-1}, мы можем задачу (14)—(16) переписать в операторной форме

$$\frac{d^n}{dt^n} u + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \mathfrak{M}_1 u + \cdots + \frac{d}{dt} \mathfrak{M}_{n-1} u + \mathfrak{M}_n u = 0, \tag{14}$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi_0, \ \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = \varphi_1, \cdots, \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_{n-1}, \tag{15}$$

$$u(x, t) \in \overset{0}{W}{}_2^{(\nu)}(\Omega) \text{ для всех } t \in [0, +\infty), \tag{16}$$

Как показано в работах ([1,3]), из n-кратной полноты системы с. и п. функций полиномиального операторного пучка (1) следует полнота так называемых элементарных решений задачи (14)—(16).

Таким образом из вышедоказанной теоремы следует существование полной системы элементарных решений для смешанной задачи в случае эллипсоидальных областей.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Պոլինոմիալ օպերատորային փնջերի մի դասի համար n-ապատիկ լրիվության մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է պոլինոմիալ օպերատորային փնջերի մի դաս, որոնց նկատմամբ n-ապատիկ լրիվության հայտնի հայտանիշները կիրառելի չեն։

Այնուամենայնիվ հաջողվում է և այդ դասի համար ապացուցել սեփական և միակցված ֆունկցիաների n-ապատիկ լրիվությունը էլիպսոիդյալ տիրույթներում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. В. Келдыш*, ДАН, СССР № 77, (1951). [2] *Г. В. Вирабян*, Кандидатская диссертация, 1965. [3] *К. Миранда*, Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., 1957. [4] *М. Г. Крейн, Г. К. Лангер*, Труды межд. симп. по прим. т. ф. к. п. в механике сплошной среды, Изд. „Наука", 1965. [5] *Г. В. Вирабян*, ДАН АрмССР, т. XLIII, № 1 (1966).