ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVIII 1969 1

УДК 532.5

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

А. М. Бархударян

Установившиеся колебания диска вблизи экрана

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 1/VII 1968)

В статьях [1,2] дано решение задачи о прямолинейном и равномерном поступательном движении диска вблизи экрана. В настоящей работе дается решение задачи об установившихся колебаниях круглого, дискообразного и слабо изогнутого крыла в безграничном полупространстве жидкости, ограниченной плоскостью $z = -h$. Проекция крыла на плоскость xy имеет форму круга радиусом a с центром в начале координат.

Проекция крыла и разрез крыла показаны на рис. 1.

Первые производные от уравнений верхней и нижней поверхности крыла по x и y предполагаются малыми величинами. Задача

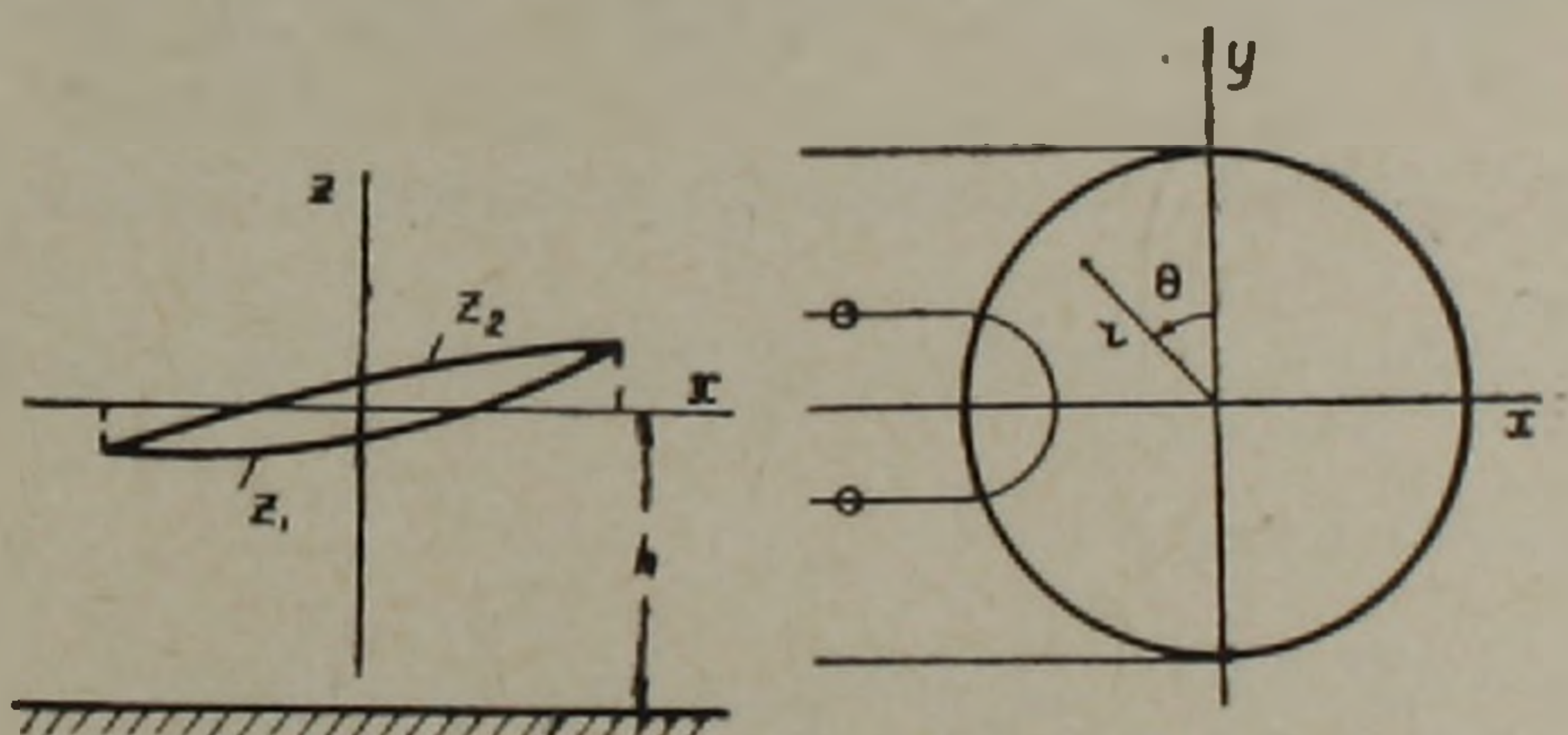

Рис. 1.

линеаризируется путем замены условия на поверхности крыла условием на поверхности круга, расположенного в плоскости xy.

В работе Н. Е. Кочина [3] решена задача об установившихся колебаниях крыла круговой в плане формы, причем крыло рассматривается тонким, а движение крыла происходящим в безграничной жидкой среде.

Однако на характеристики обтекания крыла большое влияние оказывают как отличие формы верхней и нижней поверхности крыла, так и наличие экрана. Жидкость будем считать несжимаемой. Основное движение крыла происходит прямолинейно и поступательно, параллельно оси x с постоянной скоростью c.

На основное движение крыла наложим добавочное гармоническое его колебание с частотой ω. Тогда уравнение поверхности крыла относительно неподвижных осей координат можно представить в виде (³):

$$z_n = \varsigma_{0n}(x, y) + \varsigma_{1n}(x, y)\cos\omega t + \varsigma_{2n}(x, y)\sin\omega t \quad (n = 1, 2). \tag{1}$$

Колебания крыла считаются установившимся, так что потенциал скорости представляется в виде (³):

$$\varphi_n(x, y, z, t) = \varphi_{0n} + \varphi_{1n}\cos\omega t + \varphi_{2n}\sin\omega t \quad (n = 1, 2). \tag{2}$$

Функции φ_{0n}, φ_{1n} и φ_{2n} должны быть гармоническими функциями. Условия на поверхности крыла имеют вид:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m,n}}{\partial z}\right|_{z=0} = f_{m,n}(x, y) \text{ при } (x^2+y^2\leqslant a^2,\ m=0,\ 1,\ 2),$$

где

$$f_{0,n} = -c\frac{\partial\varsigma_{0n}}{\partial x},\quad f_{1,n} = -c\left(\frac{\partial\varsigma_{1n}}{\partial x} - \frac{\omega}{c}\varsigma_{2n}\right),\quad f_{2n} = -c\left(\frac{\partial\varphi_{2n}}{\partial x} + \frac{\omega}{c}\varsigma_{1n}\right).$$

Так как давление должно быть непрерывным при переходе через поверхность разрыва, получаются условия:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial x}\right|_{z=-0},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x} - \frac{\omega}{c}\varphi_{22}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x} - \frac{\omega}{c}\varphi_{21}\right)_{z=-0}, \quad (|y|\leqslant a,\ x^2+y^2>a^2,\ x<0)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x} + \frac{\omega}{c}\varphi_{12}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\omega}{c}\varphi_{11}\right)_{z=-0}.$$

Кинематическое условие на поверхности разрыва будет:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m2}}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial z}\right|_{z=-0} \cdot (m=0,\ 1,\ 2),\ (|y|\leqslant a,\ x^2+y^2>a^2,\ x<0).$$

Условие на экране будет:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{m1}}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0. \quad (0\leqslant x^2+y^2<\infty).$$

Условие на бесконечности следующее:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial y} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial z} = 0.$$

Скорость частиц на задней кромке крыла предполагается ограниченной, а на передней кромке—стремящейся к бесконечности.

Прежде чем построить решение поставленной задачи, построим функции Φ_{m1} и Φ_{m2} $(m = 0, 1, 2)$, удовлетворяющие следующим условиям

$$\left.\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0, \quad (0\leqslant r<\infty)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial z}\right|_{z=0} = f_{m1}(r, \theta), \quad (0\leqslant r\leqslant a)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial z}\right|_{z=0} = f_{m2}(r, \theta), \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial z}\right|_{z=0}, \qquad (a < r < \infty)$$

$$\Phi_{m1}(r, \theta, 0) = \Phi_{m2}(r, \theta, 0). \qquad (a < r < \infty)$$

Эти функции могут быть представлены в форме [1]:

$$\Phi_{m1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r)\left[A_{km}(\lambda) e^{\lambda z} + B_{km}(\lambda) e^{-\lambda z}\right] d\lambda, \tag{3}$$

$$\Phi_{m2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r)\, C_{km}(\lambda)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda. \tag{4}$$

Для определения коэффициентов A_{km}, B_{km} и C_{km} получим следующие уравнения [1]:

$$A_{km}(\lambda) e^{-\lambda h} - B_{km}(\lambda) e^{\lambda h} = 0, \tag{5}$$

$$A_{km}(\lambda) - B_{km}(\lambda) + C_{km}(\lambda) = a_k^{(m, 2)}(\lambda), \tag{6}$$

$$A_{km}(\lambda) + B_{km}(\lambda) - C_{km}(\lambda) = 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx) B_{km}(t)\, dt dx +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^x g_k^{(m, 1)}(\rho)\, \rho^{k+1} (x^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\rho dx, \tag{7}$$

где

$$a_k^{(m, 2)}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} y J_k(y\lambda) \int_0^{\pi} \left[f_{m1}(y, \theta) - f_{m2}(y, \theta)\right] \sin k\theta d\theta dy,$$

$$g_k^{(m, 1)}(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f_{m1}(\rho, \theta) + f_{m2}(\rho, \theta)\right] \sin k\theta d\theta.$$

Тогда построенные нами функции Φ_{m1} и Φ_{m2} будут удовлетворять всем граничным условиям задачи, кроме условия конечности скорости у задней кромки крыла.

Для построения решения данной задачи берем

$$\varphi_{m1} = \Phi_{m1} + H_{m1}, \quad \varphi_{m2} = \Phi_{m2} + H_{m2}. \tag{8}$$

Функции H_{m1} и H_{m2} должны быть гармоническими.

Граничные условия, налагаемые на H_{m1} и H_{m2}, выбираются так, чтобы φ_{m1} и φ_{m2} удовлетворяли всем граничным условиям поставленной задачи.

$$\left.\frac{\partial H_{m1}}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$H_{m1}|_{z=0} = -\sum_{p=0}^{k-1} E_{pm} \frac{r^p \cos^p \theta}{a^{p+1}}, \ (r > a, \ |y| < a, \ 0 < \theta < \pi)$$

$$\left.\frac{\partial H_{m1}}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0, \quad (0 \leqslant r < \infty)$$

$$\left.\frac{\partial H_{m2}}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$H_{m2}\Big|_{z=0} = \sum_{p=0}^{k-1} E_{pm} \frac{r^p \cos^p \theta}{a^{p+1}}, \ (r > a, \ |y| < a, \ 0 < \theta < \pi).$$

Соответствующие функции в цилиндрических координатах построены нами в работе ([2]).

$$H_{m1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) \left[D_{km}(\lambda) e^{\lambda z} + Q_{km}(\lambda) e^{-\lambda z}\right] d\lambda, \tag{9}$$

$$H_{m2} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) P_{km}(\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda. \tag{10}$$

Для определения коэффициентов получаем уравнения:

$$P_{km}(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{E_{pm} F_{kp}}{a^{p+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-p}{2}\right)} \int_a^{\infty} t^{p+\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt, \tag{11}$$

$$D_{km}(\lambda) e^{-\lambda h} - Q_{km}(\lambda) e^{\lambda h} = 0, \tag{12}$$

$$D_{km}(\lambda) + Q_{km}(\lambda) = -P_{km}(\lambda) +$$

$$+ 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx)\, Q_{km}(t)\, dt dx. \tag{13}$$

Легко доказать, что $\partial H_m/\partial r$ при $z = 0$ и $r \to a - 0$ стремится к бесконечности порядка $1/\sqrt{a^2 - r^2}$.

Вычисляя $\partial H_{m2}/\partial r$, получим:

$$\left.\frac{\partial H_{m2}}{\partial r}\right|_{\substack{z=0 \\ r\to a}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{p=0}^{k-1} \frac{E_{pm} F_{kp}}{a} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-p}{2}\right)} + 0. \tag{1}$$

Коэффициенты E_{pm} определяются из условия ограниченности скорости у задней кромки крыла. Для определения этих коэффициентов получаются следующие уравнения:

$$\left.\frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial r}\right|_{\substack{z=0 \\ r\to a}} = -\left.\frac{\partial H_{m2}}{\partial r}\right|_{\substack{z=0 \\ r\to a}}. \tag{14}$$

Потенциал скорости будет:

$$\varphi_n(r, \theta, z, t) = \Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t.$$

Вычислим гидродинамические силы.

Давление в любой точке [3] определяется из выражения

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta \right) - \frac{\rho}{2} \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right| + F(t).$$

Отбрасывая малые величины второго порядка и независящую от координат величину $F(t)$, можно написать

$$p = \rho c \left\{ \sin \theta \, \frac{\partial}{\partial r} [\Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t] + \right.$$

$$+ \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} [\Phi_{0n} + H_{0n} + (\Phi_{1n} + H_{1n}) \cos \omega t + (\Phi_{2n} + H_{2n}) \sin \omega t] +$$

$$\left. + \frac{\omega}{c} [(\Phi_{1n} + H_{1n}) \sin \omega t - (\Phi_{2n} + H_{2n}) \cos \omega t] \right\}_{z=0}, \tag{15}$$

где для вычисления давления в нижних точках крыла p_- и верхних p_+ нужно взять $n=1$ и $n=2$, соответственно.

Для вычисления подъемной силы имеем:

$$P = \iint_s (p_- - p_+) \, r dr d\theta. \tag{16}$$

Как отмечается в работе [3], для вычисления лобового сопротивления следует брать

$$W = W_1 - W_2,$$

где W_1 — составляющая нормальной силы по направлению отрицательной оси x.

$$W_1 = \iint_s \left(p_- \frac{\partial z_1}{\partial x} - p_+ \frac{\partial z_2}{\partial x} \right) r dr d\theta. \tag{17}$$

W_2 — подсасывающая сила, связана с наличием сильного разрежения вблизи края крыла. Как в работе [3], для подсчета подсасывающей силы W_2 можно применить закон количества движения к тонкой нитевидной замкнутой области τ, охватывающей переднюю полуокружность круга и ограниченной снаружи поверхностью σ.

Для вычисления подсасывающей силы получим выражение:

$$W_2 = \lim_{\tau \to 0} \left\{ \frac{\rho}{2} \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos (n, x) \, ds - \right.$$

$$\left. - \rho \iint_\sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta \right) \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, ds \right\}. \tag{18}$$

Для подсчета W_2 можно ввести в рассмотрение координаты δ, θ и α, полагая

$$r = a + \delta \cos \alpha, \quad z = \delta \sin \alpha,$$

где δ — расстояние точки от передней кромки крыла.

На тороидальной поверхности σ:

$$\cos (n, x) = -\cos \alpha \sin \theta, \quad \cos (n, y) = \cos \alpha \cos \theta, \quad \cos (n, z) = \sin \alpha.$$

Для вычисления интеграла по поверхности σ нужно учитывать, что θ меняется от $-\pi$ до 0, a α от $-\pi$ до π.

Предел данной функции нужно вычислить при $\delta \to 0$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ա. Մ. ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

Սկավառակի հաստատված տատանումները էկրանի մոտ

Հոդվածում դիտարկված է անսեղմելի հեղուկի միջավայրում շրջանաձև պրոեկցիա ունեցող թևի շարժումը էկրանի մոտ, երբ թևը բացի համընթաց շարժվելուց կատարում է նաև հաստատված հարմոնիկ տատանումներ։ Ի տարբերություն Ն. Ե. Կոչինի կողմից դիտարկված բարակ թևի տատանումների դեպքի, այստեղ հաշվի է առնվում նաև էկրանի ազդեցությունը և թևի վերին ու ներքին մակերևույթների տարբեր լինելը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. М. Бархударян*, Известия АН АрмССР, сер. Механика, т. XXI № 5 (1968). 2 *А. М. Бархударян*, ДАН АрмССР. т. 47, №5 (1968) 3 *Н. Е. Кочин*, Собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1949.