ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVIII 1969 1

УДК 580

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одной задаче периодического течения тепла в бесконечном цилиндре

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 5/X 1968)

В работе дается эффективное решение задачи периодического радиального течения тепла в бесконечном круглом цилиндре при наличии на поверхности теплообмена с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена изменяется во времени. Предполагается, что внутри тела имеются периодически изменяющиеся источники тепла. В этом случае функция распределения температуры $U(r,t)$ будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению [1]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{c\rho}P(r,t) \tag{1}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R} = h(t)\,[S(t) - U(R,t)]. \tag{2}$$

Здесь $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность тела, c — коэффициент теплоемкости, $P(r,t)$ — интенсивность тепловыделения, $h(t)$ и $S(t)$ — соответственно коэффициент теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h(t)$, $S(t)$ и $P(r,t)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию. Исходя из физического смысла, предполагаем также, что $h(t)$ неотрицательна.

Применяя к уравнению (1) конечное комплексное преобразование Фурье по времени t, для изображения функции $U(r,t)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$F_k''(r) + \frac{1}{r}F_k'(r) + \frac{i\gamma_k}{a}F_k(r) = -\frac{1}{\lambda}P_k(r), \tag{3}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2k\pi}{\vartheta}; \quad F_k(r) = \int_0^{\vartheta} U(r, t)\, e^{i\gamma_k t}\, dt; \quad P_k(r) = \int_0^{\vartheta} P(r, t)\, e^{i\gamma_k t} dt,$$

ϑ — период изменения температуры $U_*^*(r, t)$.

Решая уравнение (3), будем иметь:

$$F_k(r) = \frac{1}{J_0(\sqrt{i}\,\mu_k R)'_*} \Big\{ J_0(\sqrt{i}\,\mu_k r) \Big[M_k - \frac{1}{\lambda} \int_r^R r_1 P_k(r_1) (J_0(\sqrt{i}\,\mu_k R) \times$$

$$\times Y_0(\sqrt{i}\,\mu_k r_1) - Y_0(\sqrt{i}\,\mu_k R)\, J_0(\sqrt{i}\,\mu_k r_1))\, dr_1 -$$

$$-\frac{1}{\lambda} [J_0(\sqrt{i}\,\mu_k R) Y_0(\sqrt{i}\,\mu_k r) - Y_0(\sqrt{i}\,\mu_k R)\, J_0(\sqrt{i}\,\mu_k r)] \Big] \int_0^r r_1 P_k(r_1) \times$$

$$\times J_0(\sqrt{i}\,\mu_k r_1)\, dr_1 \Big\}, \qquad (4)$$

где $\mu_k = \sqrt{\frac{\gamma_k}{a}}$, $J_0(r)$ и $Y_0(r)$ — бесселевы функции нулевого порядка соответственно первого и второго рода, M_k — постоянная интегрирования.

Для $k = 0$

$$F_0(r) = M_0 + \frac{1}{\lambda} \left[\int_r^R r_1 P_0(r_1) \ln \frac{R}{r_1}\, dr_1 + \ln \frac{R}{r} \int_0^r r_1 P_0(r_1)\, dr_1 \right]. \qquad (5)$$

Согласно теореме обращения ([2]), функция $U(r, t)$ представляется рядом

$$U(r, t) = \frac{1}{\vartheta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k(r)\, e^{-i\gamma_k t}. \qquad (6)$$

Прежде чем переходить к определению M_k, видоизменим граничное условие (2), представив его в виде

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=R} + h^* U(R, t) = h(t)\, S(t) - [h(t) - h^*]\, U(R, t), \qquad (7)$$

где $h^* = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} h(t)\, dt.$

Применяя к условию (7) конечное комплексное преобразование Фурье, для определения M_k получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$M_k \left[\frac{\sqrt{i}\,\mu_k J_0'(\sqrt{i}\,\mu_k R)}{J_0(\sqrt{i}\,\mu_k R)} + h^* \right] = -\sum_{j=\infty}^{\infty}{}' M_j C_{k-j} + \int_0^{\vartheta} h(t)\, S(t)\, e^{i\gamma_k t}\, dt +$$

$$+\frac{1}{\lambda R J_0(\sqrt{i}\,\mu_k R)}\int_0^R rP_k(r)\,J_0(\sqrt{i}\,\mu_k r)\,dr. \tag{8}$$

Здесь $C_j=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta h(t)\,e^{i\gamma_j t}\,dt$, а штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Для исследования системы (8) предварительно отделим ее вещественную и мнимую части. После некоторых преобразований получим:

$$m_k=-\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k}\{m_0\,[A_k(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))+D_k\psi_k(R)]+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}{}' j^{-\frac{5}{4}}\,[m_j((A_{k+j}+A_{k-j})(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))+(D_{k+j}+D_{k-j})\psi_k(R))+$$

$$+n_j((A_{k-j}-A_{k+j})\psi_k(R)+(D_{k+j}-D_{k-j})(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R)))]\}+p_k;$$

$$n_k=-\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k}\{m_0\,[D_k(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))-A_k\psi_k(R)]+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}{}' j^{-\frac{5}{4}}\,[m_j((D_{k+j}+D_{k-j})(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))- \tag{9}$$

$$-(A_{k+j}+A_{k-j})\psi_k(R))-n_j((A_{k+j}-A_{k-j})(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))+$$

$$+(D_{k+j}-D_{k-j})\psi_k(R))]\}+q_k.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$m_k=\frac{M_k+M_{-k}}{2}\,k^{\frac{5}{4}};\quad n_k=\frac{M_k-M_{-k}}{2i}\,k^{\frac{5}{4}};\ m_0=M_0;$$

$$A_k=\frac{C_k+C_{-k}}{2};\ D_k=\frac{C_k-C_{-k}}{2i};$$

$$\eta_k(r)=\mathrm{ber}(\mu_k R)\,\mathrm{ber}(\mu_k r)+\mathrm{bei}(\mu_k R)\,\mathrm{bei}(\mu_k r);$$

$$\zeta_k(r)=\mu_k[\mathrm{ber}'(\mu_k R)\,\mathrm{ber}(\mu_k r)+\mathrm{bei}'(\mu_k R)\,\mathrm{bei}(\mu_k r)];$$

$$G_k=\zeta_k'(R)+2h^*\zeta_k(R)+h^{*2}\eta_k(R);$$

$$p_k=\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k}\left\{\int_0^\theta h(t)\,S(t)[(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R))\cos\gamma_k t-\psi_k(R)\sin\gamma_k t]\,dt+\right.$$

$$+\frac{1}{\lambda R}\int_0^\theta\int_0^R rP(r,t)\,[(\zeta_k(r)+h^*\eta_k(r))\cos\gamma_k t-$$

$$-(\psi_k(r)+h^*\xi_k(r))\sin\gamma_k t]\,drdt\}; \tag{10}$$

$$q_k=\frac{k^{\frac{5}{4}}}{G_k}\Big\{\Big\{\int_0^{\vartheta}h(t)\,S(t)[\psi_k(R)\cos\gamma_k t+(\zeta_k(R)+h^*\eta_k(R)\sin\gamma_k t]\,dt+$$

$$+\frac{1}{\lambda R}\int_0^{\vartheta}\int_0^{R}rP(r,t)\,[(\psi_k(r)+h^*\xi_k(r))\cos\gamma_k t+$$

$$+(\zeta_k(r)+h^*\eta_k(r))\sin\gamma_k t]\,drdt\Big\};$$

$$\xi_k(r)=\operatorname{bei}(\mu_k R)\operatorname{ber}(\mu_k r)-\operatorname{ber}(\mu_k R)\operatorname{bei}(\mu_k r);$$

$$\psi_k(r)=\mu_k\,[\operatorname{bei}'(\mu_k R)\operatorname{ber}(\mu_k r)-\operatorname{ber}'(\mu_k R)\operatorname{bei}(\mu_k r)];$$

$\operatorname{ber}(x)$, $\operatorname{bei}(x)$ — функции Томсона первого рода нулевого порядка.

Для $k=0$ имеем:

$$m_0=\frac{1}{h^*}\Big[-2\sum_{j=1}^{\infty}j^{-\frac{5}{4}}(A_j m_j-D_j n_j)+\int_0^{\vartheta}h(t)\,S(t)\,dt+$$

$$\frac{1}{\lambda R}\int_0^{\vartheta}\int_0^{R}rP(r,t)\,drdt\Big]. \tag{11}$$

Исследуем теперь полученную совокупность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (9) и (10). Принимая во внимание предположенную выше ограниченность вариации функции $h(t)$ и воспользовавшись оценкой для коэффициентов Фурье функций с ограниченной вариацией [3], а также асимптотическими представлениями функций Томсона [4]

$$\operatorname{ber}(x)=\frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}}\cos\beta(x);\quad \operatorname{bei}(x)=\frac{e^{\alpha(x)}}{\sqrt{2\pi x}}\sin\beta(x), \tag{12}$$

где

$$\alpha(x)\sim\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{8x\sqrt{2}}-\frac{25}{384x^3\sqrt{2}}-\frac{13}{128x^4}-\cdots;$$

$$\beta(x)\sim\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{8x\sqrt{2}}-\frac{1}{16x^2}+\frac{25}{384x^3\sqrt{2}}+\cdots, \tag{13}$$

для суммы σ_k модулей коэффициентов при неизвестных в k-м уравнении первой из систем (9) после некоторых упрощений будем иметь

$$\sigma_k<\frac{12HR}{2\mu_k R\,|\alpha'(\mu_k R)+\beta'(\mu_k R)|-1+2h^*R}\,k^{\frac{1}{4}}, \tag{14}$$

и при $\mu_k>\dfrac{1{,}25}{R}$,

$$\sigma_k<\frac{6H}{\mu_k+h^*}\,k^{\frac{1}{4}}. \tag{15}$$

Здесь H — полная вариация функции $h(t)$ в промежутке $(0, \vartheta)$. Из (15) видно, что σ_k при возрастании k стремится к нулю с быстротой $0(k^{-\frac{1}{4}})$ и, начиная с некоторого k, становится меньше единицы. Такую же оценку получаем и для второй из систем (9). Что касается свободных членов p_k и q_k, то, как видно из (10), они, оставаясь ограниченными в своей совокупности, также стремятся к нулю с быстротой $0(k^{-\frac{1}{4}})$. Из теории бесконечных систем [5] следуют существование ограниченного решения систем (9) и (11) и сходимость методов последовательных приближений.

Подставляя значения M_k из (10) в (14) и группируя в (6) взаимно сопряженные члены, для $U(r, t)$ окончательно получаем

$$U(r, t) = \frac{1}{\vartheta}\left[m_0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\vartheta}\left(\int_r^R r_1 P(r_1, t_1)\ln\frac{R}{r_1}\,dr_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ln\frac{R}{r}\int_0^r r_1 P(r_1, t_1)\,dr_1\right)dt_1\right] + \frac{2}{\vartheta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\eta_k(R)}\left\{k^{-\frac{5}{4}}\left[\eta_k(r)(n_k\sin\gamma_k t + \right.\right.$$

$$+ m_k\cos\gamma_k t) + \xi_k(r)(m_k\sin\gamma_k t - n_k\cos\gamma_k t)\right] + \frac{1}{\lambda}\int_r^R\int_0^{\vartheta} r_1 P(r_1, t_1)\times$$

$$\times\left[(\xi_k(r)N_k(r_1) - \eta_k(r)L_k(r_1))\sin\gamma_k(t - t_1) + (\xi_k(r)L_k(r_1) + \eta_k(r)N_k(r_1))\times\right.$$

$$\left.\times\cos\gamma_k(t - t_1)\right]dt_1 dr_1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^r\int_0^{\vartheta} r_1 P(r_1, t_1)\left[(N_k(r)\xi_k(r_1) - \right.$$

$$- L_k(r)\eta_k(r_1))\sin\gamma_k(t - t_1) + (L_k(r)\xi_k(r_1) + $$

$$\left.\left. + N_k(r)\eta_k(r_1))\cos\gamma_k(t - t_1)\right]dt_1 dr_1\right\}, \qquad (16)$$

где

$$L_k(r) = \mathrm{ber}(\mu_k R)\,\mathrm{kei}(\mu_k r) + \mathrm{bei}(\mu_k R)\,\mathrm{ker}(\mu_k r) - \mathrm{ker}(\mu_k R)\,\mathrm{bei}(\mu_k r) -$$

$$- \mathrm{kei}(\mu_k R)\,\mathrm{ber}(\mu_k r);$$

$$N_k(r) = \mathrm{ber}(\mu_k R)\,\mathrm{ker}(\mu_k r) - \mathrm{bei}(\mu_k R)\,\mathrm{kei}(\mu_k r) - \mathrm{ker}(\mu_k R)\,\mathrm{ber}(\mu_k r) +$$

$$+ \mathrm{kei}(\mu_k R)\,\mathrm{bei}(\mu_k r), \qquad (17)$$

$\mathrm{ker}(x)$, $\mathrm{kei}(x)$ — функции Томсона второго рода нулевого порядка.

Из (17), (10), (12) и (13) видно, что члены ряда (16) убывают с быстротой $0\left(k^{-2} + k^{-\frac{5}{4}}e^{-2\mu_k(R-r)}\right)$.

Произведенные оценки показывают, что ряд (16) сходится в круге $(0 < r < R)$ вместе со своими первыми производными, причем на линиях разрыва функции $P(r, t)$ выражение $\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]U(r, t)$ сходится к

$$\frac{1}{4c\rho}\left[P(r+0, t+0)+P(r+0, t-0)+P(r-0, t+0)+P(r-0, t-0)\right].$$

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $h(t)$ представляет кусочно-линейную функцию

$$h(t)=h_0+h_1\left[\frac{k_1 t}{\vartheta}-E\left(\frac{k_1 t}{\vartheta}\right)\right],$$

где k_1—натуральное число, $E(x)$ — функция антье, целочисленная ступенчатая функция, равная k в промежутке $k\leqslant x<k+1$, то из (10) получаем [6]

$$A_0=2h_0+h_1;\ A_k=0,\ (k\geqslant 1);$$

$$D_k=\begin{cases} 0 & \text{при } k\neq k_1 l \\ \dfrac{2h_1}{l\vartheta} & \text{при } k=k_1 l \end{cases}$$

(l — натуральное число).

в) В случае, если $h(t)$ кусочно постоянно:

$h(t)=h_l$ при $t_{l-1}<t<t_l$, A_k и D_k имеют вид

$$A_k=-\frac{1}{k\pi}\sum_{l=1}^{\nu}(h_{l+1}-h_l)\sin\gamma_k t_l;$$

$$D_k=\frac{1}{k\pi}\sum_{l=1}^{\nu}(h_{l+1}-h_l)\cos\gamma_k t_l,$$

где ν — число разрывов функции $h(t)$.

с) При $h(t)=\text{const}$ бесконечные системы линейных уравнений (9) вырождаются в равенства, и решение совпадает с решением, получаемым классическим способом.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Անվերջ գլանում ջերմության պարբերական հոսանքի մի խնդրի մասին

Հոդվածում տրվում է անվերջ կլոր գլանում ջերմության շառավղային պարբերական հոսանքի խնդրի էֆեկտիվ լուծումը՝ գլանը շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության առկայության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը փոփոխվում է ժամանակի ընթացքում։ Խնդրի լուծման համար կիրառվում է Ֆուրյեի վերջավոր կոմպլեքս ձևափոխությունը ըստ ժամանակի։ Եզրային պայմանների բավարարումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի։

Դիտարկվում են որոշ մասնավոր դեպքեր, օրինակ, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիա է ժամանակից, և երբ նա կտոր առ կտոր հաստատուն է և այլն։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Карслоу* и *Д. Егер*, Теплопроводность твердых тел. Изд. «Наука», М., 1964. [2] *К. Дж. Трантер*, Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956. [3] А. *Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. I, М., Изд. «Мир», 1965. [4] *Э. Грей* и *Г. Б. Мэтьюз*, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М., ИЛ, 1953. [5] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Физматгиз, 1962. [6] *Р. С. Минасян*, Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полого составного цилиндра. Сб. Тепло- и массоперенос, т. 8, Минск, 1968.