ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 5

УДК 532.5

ГИДРОАЭРОДИНАМИКА

А. М. Бархударян

Обтекание диска вблизи экрана

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 1/VII 1968)

В работе ([1]) рассматривалось движение крыла круговой в плане формы вблизи экрана. Построена функция $\Phi(r, \theta, z)$, которая удовлетворяет всем граничным условиям поставленной задачи, кроме условия конечности скорости у задней кромки крыла. Первая производная этой функции по r обращается в бесконечность порядка $1/\sqrt{\delta}$ вдоль всего контура круга, где δ расстояние частицы от кромки крыла.

Для построения решения интересующей нас задачи обтекания диска вблизи экрана положим

$$\varphi_n(r, \theta, z) = \Phi_n(r, \theta, z) + H_n(r, \theta, z) \qquad (n = 1, 2).$$

В качестве функции $H(r, \theta, z)$ можно взять функцию потенциала скорости чисто циркуляционного обтекания диска, построенную Н. Е. Кочиным ([2]):

$$H(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x, y, z)$$

и определить коэффициенты C_n так, чтобы первые производные от $\varphi(r, \theta, z)$ оставались бы конечными вблизи задней кромки крыла. Тогда получим две бесконечные системы уравнений — одну для определения коэффициентов C_n с четными индексами, а другую — для определения коэффициентов с нечетными индексами.

Однако коэффициенты этих уравнений не убывают с достаточной быстротой, потому мы взамен этой функции построим функцию $H(r, \theta, z)$, характеризующую чисто циркуляционное обтекание диска вблизи экрана и построенную тем же методом что и $\Phi(r, \theta, z)$.

Так как все вихри лежат в плоскости xy, то в вихревой полосе, в двух симметричных относительно плоскости xy точках значения $\partial H/\partial z$ должны быть одинаковы, а $\partial H/\partial y$ будет отличаться только знаком. Согласно условию непрерывности скорости, при переходе через поверхность разрыва, на полосе Σ, производная $\partial H/\partial x$ — не должна терпеть разрыва.

Для обеспечения условия на поверхности крыла следует брать

$$\left.\frac{\partial H_n}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad \text{при } o \leqslant r \leqslant a.$$

Построим гармонические функции $H_1(r, \theta, z)$ и $H_2(r, \theta, z)$, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad (o \leqslant r \leqslant a) \tag{1}$$

$$H_2|_{z=0} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{k-1} E_n \int_0^\infty J_{n+1}(\lambda a)\, J_n(\lambda y)\, d\lambda, & (r > a,\ 0 < \theta < \pi) \\ 0, & (r > a,\ \pi < \theta < 2\pi) \end{cases} \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial H_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad (o \leqslant r \leqslant a) \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial H_1}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0, \qquad (o \leqslant r < \infty) \tag{4}$$

$$H_1|_{z=0} = \begin{cases} -\sum_{n=0}^{k-1} E_n \int_0^\infty J_{n+1}(\lambda a)\, J_n(\lambda y)\, d\lambda, & (r > a,\ o < \theta < \pi) \\ 0 & (r > a,\ \pi < \theta < 2\pi). \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая условие симметричности задачи и то обстоятельство, что функции H_1 и H_2 должны быть периодическими относительно θ и что при $z \to +\infty$ и $r \to \infty$ эти функции и их частные производные должны быть ограничены, положим ([1]):

$$H_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^\infty J_k(\lambda r)\, P_k(\lambda)\, e^{-\lambda z}\, d\lambda, \tag{6}$$

$$H_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^\infty J_k(\lambda r) \left[D_k(\lambda)\, e^{\lambda z} + Q_k(\lambda)\, e^{-\lambda z}\right] d\lambda. \tag{7}$$

Величины $P_k(\lambda)$, $D_k(\lambda)$ и $Q_k(\lambda)$ определяются из граничных условий, налагаемых на функции H_1 и H_2.

Из условий (1) и (2) получим:

$$\int_0^\infty \lambda J_k(\lambda r)\, P_k(\lambda)\, d\lambda = 0, \qquad (r \leqslant a) \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^\infty J_k(\lambda r)\, P_k(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} \sum_{n=0}^{k-1} E_n \dfrac{r^n \cos^n \theta}{a^{n+1}}, & (y \leqslant a,\ 0 < \theta < \pi) \\ 0 & (y > a \text{ или } \pi < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

Разлагая $\cos^n \theta$ в ряд в интервале $(0, \pi)$ по синусам

$$\cos^n \theta = \sum_{k=1}^{\infty} F_{kn} \sin k\theta,$$

получаем

$$P_k(\lambda) = \sqrt{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{F_n F_{kn}}{a^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} \int_a^\infty t^{n+\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt. \quad (9)$$

Из условия (4)

$$Q_k(\lambda) = D_k(\lambda)\, e^{-2\lambda h}, \quad (10)$$

а из условий (3) и (5) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$D_k(\lambda) + Q_k(\lambda) = -P_k(\lambda) + \quad (11)$$

$$+ 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x\, J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx)\, Q_k(t)\, dt dx.$$

Подставляя значение $P_k(\lambda)$ в (6), получаем:

$$H_2(r, \theta, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=0}^{k-1} \frac{E_n F_{kn}}{a^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} r^k \int_r^\infty \frac{t^{n-k} dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r > a \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=0}^{k-1} \frac{E_n F_{kn}}{a^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} r^k \int_a^\infty \frac{t^{n-k} dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r \leqslant a. \end{cases}$$

Вычисляя $(\partial H_2/\partial r)_{z=0}$ и обозначая через $0(1)$ сумму всех величин, остающихся конечными при $r \to a - 0$, получаем:

$$\left.\frac{\partial H_2}{\partial r}\right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=0}^{k-1} \frac{E_n F_{kn}}{a} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} + 0(1). \quad (12)$$

Вычисляя $\partial H_2/\partial \vartheta$ можно доказать, что при $r \to a$ остается конечной. Вычислим значение $\partial H_2/\partial z$ при $z = 0$.

$$\left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{z=0} = -\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=0}^{k-1} \frac{E_n F_{kn}}{\sqrt{2}\, a^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} \int_a^\infty t^{n+\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} J_k(\lambda r)\, J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, d\lambda\, dt.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} J_k(\lambda r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r < t \\ -\dfrac{\sqrt{2}\, t^{k+\frac{1}{2}}}{r^k \sqrt{\pi}\,(r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{при} \quad r \geqslant t, \end{cases}$$

получаем

$$\left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r \leqslant a \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \sum_{n=0}^{k-1} \dfrac{E_n F_{kn}}{\sqrt{\pi} a^{n+1} \cdot r^k} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{k-n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-n}{2}\right)} \int_a^r \dfrac{t^{k+n+1}}{(r^2 - t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt & r > a. \end{cases}$$

При приближении к контуру круга в пределе получим:

$$\left.\frac{\partial H_2}{\partial z}\right|_{\substack{z=0 \\ r \to a+0}} \to 0.$$

Построенная нами функция H характеризует такое потенциальное течение, при котором на поверхностях крыла нормальные составляющие скорости обращаются в ноль, на плоскости $z = 0$, вне диска $\partial H/\partial x = 0$, а на полосе Σ величины H и $\partial H/\partial y$ — терпят разрыв.

Таким образом функция $H(r, \theta, z)$ представляет собой потенциал скорости чисто циркуляционного обтекания диска вблизи экрана.

Коэффициенты E_n определяются так, чтобы скорости частиц у задней кромки крыла оставались конечными. Для их определения получается следующее уравнение

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{\substack{z=0 \\ r \to a}} = -\left.\frac{\partial H}{\partial r}\right|_{\substack{z=0 \\ r \to a}}. \tag{13}$$

Таким образом, функция $\varphi(r, \theta, z)$ полностью удовлетворяет всем поставленным условиям и является потенциалом скорости абсолютного движения жидкости, вызываемого перемещением диска с постоянной скоростью c, параллельно оси x, при условии, что на задней кромке крыла выполняется условие Жуковского—Чаплыгина о конечности скорости. Перейдем к вычислению гидродинамических сил.

Применяя формулу Бернулли в случае установившегося обтекания крыла и отбрасывая малые величины второго порядка, получаем следующее выражение для определения давления на поверхности крыла:

$$p = p_0 - \rho c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos\theta\right)_{z=0}, \tag{14}$$

где p_0 — значение давления на бесконечности.

Разница давлений на нижних и верхних точках крыла будет:

$$p_- - p_+ = \rho c \left[\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) \sin\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) \cos\theta \right]_{z=0}.$$

Для вычисления подъемной силы имеем выражение

$$P = \iint_S (p_- - p_+)\, r dr d\theta.$$

Так как при построении $\Phi(r, \theta, z)$ [1] функции нормальной составляющей скорости были разложены в ряды в промежутке $(0, \pi)$ по синусам, которые имеют нечетные продолжения в соседний промежуток $(0, -\pi)$, то для определения нормальной составляющей скорости у поверхности крыла в интервале $(0, -\pi)$ данное разложение должно быть взято с обратным знаком, потому и при вычислении подъемной силы Φ не участвует.

Если потенциал скорости чисто циркуляционного обтекания представить в виде

$$H(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \cdot h_k(r, z),$$

получим

$$P = 2\rho c \int_0^{\pi} \int_0^{a} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \sin\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \cos\theta \right) \cdot r dr d\theta = \pi \rho c a\, h_1(a, 0). \qquad (15)$$

Функцию, определяющую циркуляцию скорости в вихревой полосе, можно выразить тригонометрическим рядом, если считать, что $y = a\cos\theta$

$$\Gamma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k\theta, \qquad B_k = 2 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{F_{kn} E_n}{a}.$$

При этом для подъемной силы получим [2]:

$$P = \frac{\pi}{2} \rho c a B_1,$$

для лобового сопротивления имеем

$$W = \frac{\pi}{8} \rho \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot B_k^2,$$

для момента сил относительно оси x:

$$M_x = \frac{\pi}{4} \rho c a^2 B_2.$$

1. В качестве примера берем $z = \alpha / 2a^2 [(x + a^2) + y^2] - \alpha$. В этом случае получим $P = 1{,}047\, \rho c^2 a \alpha$, $W = 0{,}268\, \rho c^2 \alpha^2$. Таким образом, при одном и том же максимальном отклонении от оси x, то есть, при $\alpha = \text{const}$, с увеличением радиуса крыла пропорционально увеличи-

ается подъемная сила, а лобовое сопротивление остается постоянным. Если средний уклон α/a остается постоянным, с увеличением радиуса увеличивается как подъемная сила, так и лобовое сопротивление.

2. Рассмотрим движение диска в безграничной жидкой среде, когда уравнение нижней поверхности имеет вид $z_1 = \alpha/2a^2[(x+a)^2 + y^2] - \alpha$, а верхней — $z_2 = \alpha x/a$ (рис. 1).

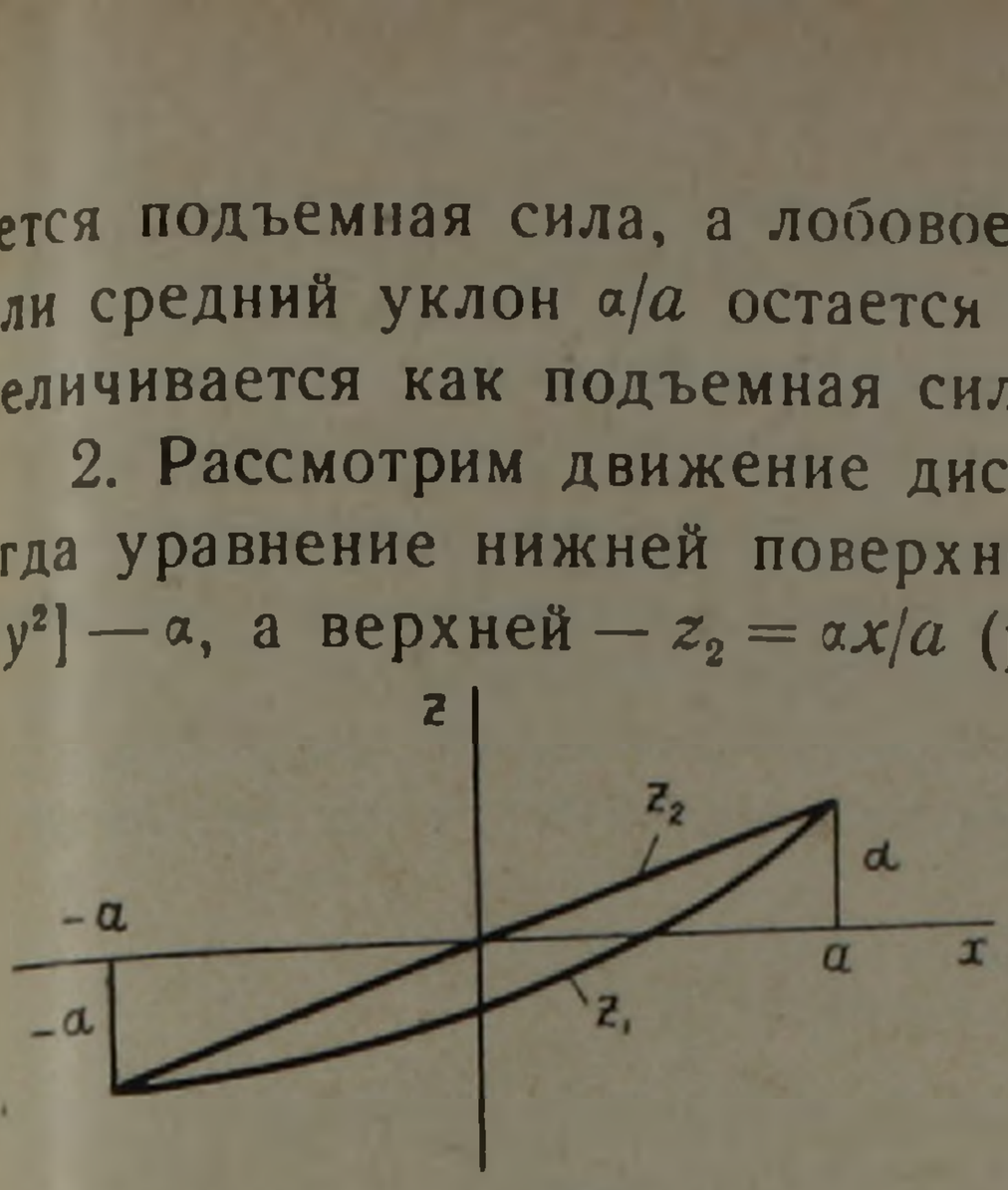

Рис. 1.

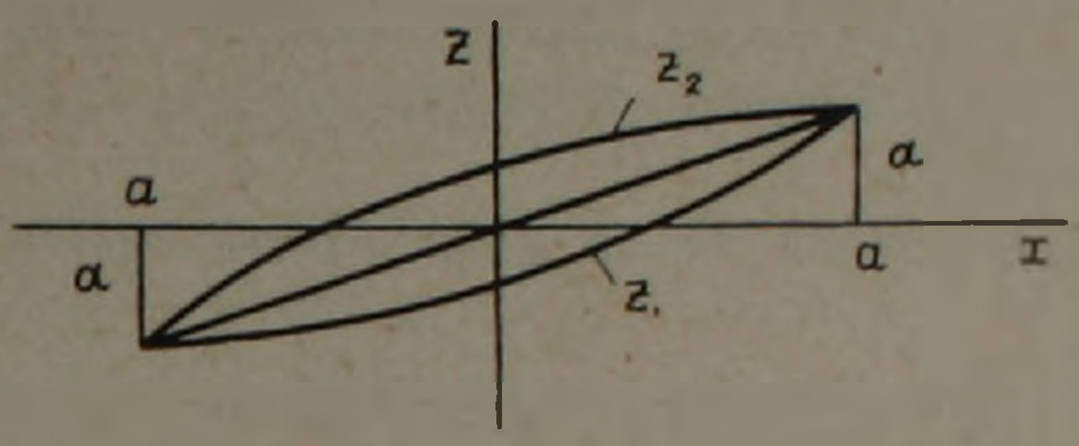

Рис. 2.

В этом случае получим

$$P = \frac{2}{3}\pi\rho c^2 a\alpha, \quad W = 0{,}8152,\ \rho c^2\alpha^2.$$

3. В качестве последнего примера рассмотрим движение диска, когда уравнение нижней поверхности задано в форме $z_1 = \alpha/2a^2[(a+x)^2 + y^2] - \alpha$, а верхней — $z_2 = -\alpha/2a^2[(a-x)^2 + y^2] + \alpha$ (рис. 2).

При этом

$$A_k(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda), \quad C_k(\lambda) = F_1(\lambda) - F_2(\lambda),$$

$$F_1(\lambda) = \frac{c\alpha}{a^2} \cdot \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-k}{2}\right)} \int_0^a t^2 J_k(t\lambda)\, dt,$$

$$F_2(\lambda) = -\frac{\sqrt{2}\, c\alpha}{\pi a} \cdot \frac{1-\cos k\pi}{k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a t^{\frac{3}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt.$$

$$P = \pi\rho c^2 a\alpha, \qquad W = 1{,}822\,\rho c^2\alpha^2.$$

Таким образом, для подъемной силы и лобового сопротивления получаются те же значения, что и при движении тонкого крыла в безграничной жидкой среде, когда уравнение поверхности задано в форме $z = \alpha x/a$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

ПА-11.056.

Ա. Մ. ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

Սկավառակի շրջեռսումը էկրանի մոտ

Հոդվածում դիտարկված է շրջանաձև թևի շարժումը էկրանի մոտ։ Նախորդ աշխատանքում (1) կառուցված էր $\Phi(r, \theta, z)$ ֆունկցիան, որը բավարարում է դրված խնդրի բոլոր պայմաններին, բացի թևի հետևի եզրագծում արագության վերջավոր լինելու պայմանից։

Դրված խնդրի լուծումը ստանալու համար արագության պոտենցիալը վերցրված է Φ տեսքով։ Տրված է H ֆունկցիային վերագրվող եզրային պայմանները և այդ ֆունկցիայի կառուցումը։

Հաշվված են մի քանի թվային օրինակներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Бархударян*, „Известия АН АрмССР", сер. мех., т. XXI, № 5 (1968). [2] *Н. Е. Кочин*, Собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1949. [3] *Р. О. Кузьмин*, Бесселевы функции, М.—Л., 1935. [4] *B. B. Noble*, Proc. of the Cambridge philosophical society (Mathematical and physical sciences) Vol. 59, part 2, 1963.