ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 5

УДК 53.36

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение давления в окрестности встречи ударных волн

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 7/V 1968)

Рассматривается задача о движении сжимаемой жидкости под действием давления, заданного на границе [1]

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 & |x| < Vt \\ 0 & |x| > Vt, \end{cases} \tag{1}$$

где t — время с начала движения, $0x$ направлена по границе жидкости, причем движение ограничено ударной волной ABB_1A_1 и в ABC, $P=P_1$. В полярных координатах $r_1\theta$ пересечение AB с BC дает точку B

$$r = a_1t, \ \theta_1 = \theta_0 - \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}, \ \gamma = \frac{P_1}{Bn}, \ \cos\theta_0 = \frac{a_0}{V}, \tag{2}$$

где $a_1=a_0\left(1+\frac{n+1}{2}\gamma\right)$, a_0 начальная скорость звука в жидкости с уравнением состояния

$$P=B\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-B. \tag{3}$$

Если в окрестности B ввести координаты

$$r - a_1t = \frac{n+1}{2}a_1t\gamma\delta_1, \ \theta-\theta_1 = \sqrt{\frac{n+1}{2}\gamma}\, Y_1, \ \varphi = \frac{n+1}{2}\gamma^2 a_0^2 t \tag{4}$$

в первом порядке уравнение потенциала φ примет вид:

$$(\mu_1-\delta_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y_1^2} = 0. \tag{5}$$

Точка B имеет координаты $\mu_1 = \nu_1 = \delta_1 = \varphi = 0$. (6)

Условия на ударной волне BB_1 имеют вид: $\mu_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_1}$, $\nu_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial Y_1}$,

$$\frac{d\delta_1}{dY_1} = -\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1}, \ \nu_1 - Y_1 + 1 = (1+\mu_1)\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1} \tag{7}$$

и вблизи B упрощаются $\delta_1 = -Y_1$, $\nu_1 = \frac{\mu_1}{2}$. (8)

Решение вблизи неособых участков BC дает [2]: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta_1^2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y_1\partial\delta_1} = 0$, что не удовлетворяет (8). Поэтому точку B нужно считать особой. Около BC решение (5) имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4}\,\delta_1^2 - \frac{1}{6}\,\frac{\delta_1^3}{Y_1^2}. \tag{9}$$

Если искать решение (5) в виде [2]:

$$\varphi = R(\rho)\,|Y|^{3k-p} + F(\rho)\,|Y|^{2k},\ \rho = -\frac{\delta_1}{|Y|^k}. \tag{10}$$

Можно найти уравнение

$$L(R,\ F) = 0, \tag{11}$$

причем если учесть, что для конечности $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\delta_1^2}$ необходимо $k \geqslant p$, останутся три возможных варианта $k \gtreqless 2$, $k \geqslant p$.

Можно показать, что при $k > 2$ условия (8) не удовлетворяются.

Если $k < 2$, не удается одновременно удовлетворить (8) и (9), причем при $k = 1 = p$ решение на BB_1 имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4}\,\delta_1^2 + \frac{1}{6}\,\delta_1 Y_1. \tag{12}$$

При $k = 2 = p$ все выражения (11) по порядку совпадут.

Тогда $R = 0$, а для F получится

$$F''(4\rho^2 + 2\rho - 2F') - F'(1 + 10\rho) + 12F = 0. \tag{13}$$

Начальное асимптотическое значение (9), тождественно удовлетворяя (13), не может служить начальным условием для решения (13). Асимптотика [2] решения (13) при больших ρ, соответствующих BB_1

$$F = C_1\rho^2 + C_2\,\rho^{\frac{3}{2}}, \tag{14}$$

как и в случае $k > 2$ не удовлетворяет (8).

В случае задачи о разряжении, $P_1 < 0$, AB дает непрерывный переход, а вблизи BC будет ударная волна [3].

Условия на ударной волне BC приводятся к виду:

$$\delta = \alpha Y^2,\ \nu = Y^3\left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{2}\right). \tag{15}$$

Если искать решение в виде $\rho = \frac{\delta}{Y^2}$, $\varphi = Y^4 F(\rho)$, где $F(\rho)$ удовлетворяет (13), из (15) можно получить условия:

$$2\alpha = -\sqrt{\alpha + \frac{1}{2} + F'(-\alpha)}\,,\ F(-\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}. \tag{16}$$

Уравнение (13) приводится к интегральному

$$F=\left(\int_0^{\zeta}\frac{\Phi}{2\zeta^3}\,\alpha\zeta+\frac{1}{4}\right)\zeta^2+\left(-\int_0^{\zeta}\frac{\Phi}{2\zeta^{\frac{5}{2}}}\alpha\zeta\right)\zeta^{\frac{3}{2}},\ \Phi=2F''(F'-\zeta)+F',\ \zeta=\rho, \quad (17)$$

где учтено начальное условие (9). Если считать на BC, $\zeta=-\alpha$ малым и принять $F=\frac{1}{4}\zeta^2+\frac{A_2}{2}\zeta^3$, подставляя в (16) можно найти $\alpha=-0{,}82$, $A_2=1{,}86$, $\varphi=\frac{1}{4}\delta^2-0{,}93\ \frac{\delta^3}{Y^2}$ вблизи BC.

К задаче соединения ударных волн на каустике $y=H$ приводит предыдущее граничное условие, но для неоднородной по глубине жидкости с $a_0=a_0(y)$, $a_0(H)=V$.

Тогда [4] $y=H$ будет линией, где соединяется падающая и отраженная ударные волны, и давление там бесконечно.

Для устранения особенности можно учесть эффект вязкости, причем уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial^2P}{\partial t^2}=\left(a_0^2+\frac{4}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2P}{\partial y^2}\right)+\frac{8\nu}{3a_0^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{a_0^2}\right)\frac{\partial^2P}{\partial y\partial t}+$$
$$+\frac{4}{3}\frac{\nu}{a_0}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{a_0}\right)\frac{\partial P}{\partial t}. \quad (18)$$

Если учесть граничное условие для давления при $y=0$, $P=P_1$ если $|x|<Vt$, $P=0$ если $|x|>Vt$, и применить метод разделения переменных, а также учесть, что коэффициент кинематической вязкости ν существенен только при $y\approx H$ и поэтому можно два последних слагаемых в (18) отбросить и подставить вместо ν, $\nu\frac{a_0^2}{a_1^2}$, $a_1=a_0(H)$, полагая еще $\frac{1}{a_0^2}=\frac{1}{a_1^2}-\frac{2a_1'y_1}{a_1^3}$, $y_1=y-H$, решение (18) можно записать в виде:

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_{6-i\infty}^{6+i\infty}ds\,e^{st-s\tilde T}\,\Phi\left(k^{\frac{2}{3}}\eta\right)\frac{2P_{\text{геом.}}}{s}\,k^{\frac{1}{6}}\,e^{\frac{2}{3}\frac{\nu s^3}{a_1^2}\tilde T-i\frac{\pi}{4}}, \quad (19)$$

где берутся большие значения s, хотя и $\nu s\ll 1$.

Здесь $\eta=k^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{2a_1'}{a_1}}\left(y_1+\frac{2}{3}\frac{\nu s}{a_1'a_1}\right)$, $\Phi(x)$ функция Эйри, $s=-ia_1k$, $P_{\text{геом.}}=P_1H^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2a_1'}{a_1}\right)^{\frac{1}{12}}$, $\tilde T=\frac{x}{a_1}+\sqrt{\frac{2a_1'}{a_1}}\frac{2}{3}\frac{H^{\frac{3}{2}}}{a_1}$ есть время пробега фронта волны от поверхности $y=0$ до линии

$$y=H \text{ и } x\approx\sqrt{\frac{a_1}{2a_1'}}\,2\sqrt{H}.$$

Если учесть интегральное представление $\Phi(x)$ в виде:

$$\Phi\left(k^{\frac{2}{3}}\eta\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta y_1\zeta-\frac{2}{3}R\frac{\nu s^3}{a_3^{1}}\zeta+i\frac{R}{6}k\zeta^3}\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{3}}\,d\zeta, \tag{20}$$

которое получается из обычного заменой $\zeta=\zeta k^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{R}, =\frac{2a_1}{a_1}$, причем $\zeta\approx\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$ малая величина, после подстановки в (19) и перехода к оригиналам можно найти $P=\rho_0 a_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}$,

$$\varphi=\frac{P_1}{\rho_0 a_1}\frac{1}{\pi}\frac{H^{\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{2}{R}\right)^{-\frac{1}{4}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-x+\zeta y_1+\frac{R}{6}\zeta^3-\tau\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda\left(\frac{R}{a_1}\zeta+\widetilde{T}\right)}}}{\sqrt{\lambda\pi\left(\frac{R}{a_1}\zeta+\widetilde{T}\right)}}\,d\tau, \tag{21}$$

где обозначено $a_1\widetilde{T}-a_1 t=x$ (отличающееся от прежнего x), и $\lambda=\frac{8}{3}\nu$.

Если в (18) перейти к переменным y_1, x, можно найти, отбрасывая малые высокого порядка

$$\frac{2}{a_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+\frac{2y_1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-\frac{4}{3}\frac{\nu}{a_1}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0. \tag{22}$$

Предполагая $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}=0$, следует проверить, что (21) удовлетворяет (22). Интегрированием по частям, с учетом $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$ получится

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}y_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=-\frac{P_1}{\rho_0\pi a_1}\frac{H^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{R}\right)^{-\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{2}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\zeta\frac{1}{\sqrt{-x+\zeta y_1+\frac{R}{6}\zeta^3-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda\left(\frac{R}{a_1}\zeta+\widetilde{T}\right)}}}{\sqrt{\lambda\pi\left(\frac{R}{a_1}\zeta+\widetilde{T}\right)}}\,d\zeta. \tag{23}$$

Если к $\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}$ применить повторное интегрирование по частям, в силу равенства $\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda x_1}}}{\sqrt{x_1}} = \frac{\lambda}{4}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda x_1}}}{\sqrt{x_1}}$, $x_1 = \frac{R}{a_1}\zeta + \widetilde{T}$ можно проверить удовлетворения (22), где $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} = 0$. Следует учесть, что поскольку по (22) $x \approx y_1^{\frac{3}{2}}$ из (21) $\zeta \approx y_1^{\frac{1}{2}}$, т. е. существенны лишь малые значения ζ.

Тогда, вообще говоря, в (21) можно полагать $x_1 \approx \widetilde{T}$.

Обозначая через $\varphi_0(x, y_1)$ решение для идеальной жидкости, можно записать решение в виде:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x-\tau, y_1)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda\widetilde{T}}}}{\sqrt{\pi\lambda\widetilde{T}}}\,d\tau. \tag{24}$$

Такое же выражение получается в однородной жидкости при прохождении ударной волны вблизи каустики, причем в этом случае можно полагать $\widetilde{T} = t$, а $\frac{1}{R}$ означает кривизну каустики. Для такого случая можно убедиться, что (24) удовлетворяет полному уравнению (22), причем $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}$ компенсирует отсутствие ζ в выражении x_1 в (24).

Для давления имеет место снова (24), и если учесть выражения для давления в идеальной жидкости ([1]), можно найти

$$P = \int_{-\infty}^{x-\alpha} P_{\text{геом.}}\, P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda t}}}{\sqrt{\pi\lambda t}}\,d\tau + \int_{x+\alpha}^{\infty} P_{\text{геом.}}\sqrt{3}\,P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{-x+\tau}{\alpha}\right)\times$$

$$\times\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda t}}}{\sqrt{\pi\lambda t}}\,d\tau + \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} 2P_{\text{геом.}}P_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{x-\tau}{\alpha}\right)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda t}}}{\sqrt{\pi\lambda t}}\,d\tau + \int_{x+\alpha}^{\infty} P_{\text{геом.}}\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times Q_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{-x+\tau}{\alpha}\right)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda t}}}{\sqrt{\pi\lambda t}}\,d\tau, \tag{25}$$

причем $P_{\text{геом.}} = A_2\,|y_1|^{-\frac{1}{4}}$ есть решение на фронте волны вдали от каустики, $\alpha = \frac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$.

На самой каустике $y_1 = 0$, используя выражения $P_{-\frac{1}{6}}$, $\Phi_{-\frac{1}{6}}$ можно найти

$$P=\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}\frac{A_2}{2a_1^{\frac{1}{6}}}\frac{1}{(\lambda t)^{\frac{1}{12}}}. \tag{26}$$

Следует учесть, что по (21), $\tau\approx\sqrt{\nu}\approx x\approx y_1^{\frac{3}{2}}$, поэтому в отличие от случая нелинейности, где $x\approx\gamma^{\frac{6}{5}}$, $y_1\approx\gamma^{\frac{4}{5}}$ в случае учета вязкости $x\approx\nu^{\frac{1}{2}}$, $y_1\approx\nu^{\frac{1}{3}}$, $\varphi\approx\gamma\, y_1^{\frac{5}{4}}$, и условие $\gamma\nu^{\frac{5}{12}}\ll\nu$ соответствует возможности пренебрежения нелинейностью.

При исследовании линейной задачи для вязкой жидкости можно воспользоваться преобразованием Лапласа по t и заменить в решении для идеальной жидкости параметр $\frac{s}{a_0}$ через $\frac{s}{\mu}$, причем $\mu=\sqrt{a_0^2+\frac{4}{3}\nu s}$, $\nu s\ll 1$. Тогда для преобразованного потенциала $\bar\varphi$ можно найти

$$\bar\varphi=\bar\varphi_0 e^{\frac{2}{3}\frac{\nu s^2 D}{a_0^3}}, \tag{27}$$

где ν—коэффициент кинематической вязкости, $D\approx a_0 t$ есть расстояние вдоль луча от начального положения фронта волны до каустики, а решение для идеальной жидкости $\bar\varphi_0$ имеет вид ([5])

$$\bar\varphi_0=A(is)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{sD}{a_0}}\Phi\left(-k^{\frac{2}{3}}\eta\right), \tag{28}$$

где $k=is$, $\eta=-\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}}y$, переменные $y=y_1$ и $x=D-a_1t$ указаны выше, $\Phi(x)$—функция Эйри, $\frac{1}{R}$—разность нормальных кривизн луча и каустики. Тогда решение линейной задачи примет вид (24), где $\tilde T=D$, а φ_0 дается ([4]).

Следует показать, что (24) удовлетворяет (22), где $y_1=y$. Если учесть, что имеет место уравнение ([3]):

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\frac{y}{R}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}=0 \tag{29}$$

и в силу (24) $\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=-\frac{1}{a_1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$, после подстановки (24) в (22), оно примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{-\lambda t+2\tau^2}{2\lambda t^2}+\frac{4\nu\tau}{3a_1\lambda t}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\right)\frac{e^{-\frac{\tau^2}{\lambda t}}d\tau}{\sqrt{\pi\lambda t}}=0, \tag{30}$$

которое удовлетворяется, поскольку под интегралом находится

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\, e^{-\frac{\tau}{\nu t}}\, \tau\right).$$

Следует учесть, что в силу (24) имеет место $\tau \approx (\nu t)^{\frac{1}{2}}$, $x \approx \tau$, $y \approx x^{\frac{2}{3}}$. Тогда второе и третье слагаемые в (22) имеют порядок $\frac{\varphi}{(\nu t)^{\frac{2}{3}}}$, в то время как первое и четвертое имеют порядок $\frac{\varphi}{(\nu t)^{\frac{1}{2}}}$ и, следовательно, вязкое слагаемое для не малых значений $\frac{a_1 t}{R}$ значительно меньше второго и третьего слагаемого, хотя и совпадает по порядку с их суммой. Тем не менее учет вязкости устраняет особенность при $x=0$, $y=0$. Если $\frac{a_1 t}{R} \approx \gamma^{\frac{2}{5}}$, то все слагаемые в (28) имеют порядок $\gamma^{\frac{2}{5}}$.

В общем случае условие пренебрежения нелинейностью $\varphi \ll \nu$. При учете вязкости и нелинейности решение нелинейной системы

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x},\ \left(\frac{y}{R} + \frac{n+1}{2a_1} v_x\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{\nu}{a_1}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2},\ v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

или, если обозначить $v_{x_1} = y + \frac{n+1}{2a_1} v_x$, $v_{y_1} = x + \frac{n+1}{2a_1} v_y$, $\frac{\partial v_{x_1}}{\partial y} = \frac{\partial v_{y_1}}{\partial x}$, $\left(\frac{v_{x_1}}{R}\frac{\partial v_{x_1}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_{y_1}}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{\nu}{a_1}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right)$, может быть взято в виде (6) $A = \frac{1}{R\frac{4}{3}\frac{\nu}{a_1}}$,

$$v_{x_1} = \frac{\alpha^2}{n+1} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{n+1}\right)\operatorname{th}\left\{A\left(1-\frac{\alpha^2}{n+1}\right)(x+\alpha y)\right\},$$

$$v_{y_1} = -\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{n+1}\right) - \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{n+1}\right)\operatorname{th}\left\{A\left(1-\frac{\alpha^2}{n+1}\right)(x+\alpha y)\right\},$$

$$\alpha = \text{const}$$

которое может рассматриваться как вязкое решение, описывающее окрестность пересечения маховской ударной волны с параболической линией.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Ճնշման որոշումը հարվածային ալիքների հատման տիրույթում

Դիտարկվում է երկու տեսակ AB և BC ալիքների հատման կետի մոտ ոչ գծային խնդրի ուսումնասիրությունը։

Ցույց է տրված, որ նախորդ լուծումները, որոնք բավարարում էին գծային լուծման հետ կարելու պայմանին, չեն բավարարում առաջին կարգում հարվածային ալիքի պայմաններին։ Երկու մասնավոր խնդիրների համար ստացված են լուծումները, որոնք բավարարում են նշված պայմաններին և հաշվի են առնվում ճնշման գրադիենտի խզումը նշված տիրույթում։ Ուսումնասիրվում է գծային մածուցիկ լուծումը կաուստիկայի մոտ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости, Ереван, 1967. [2] *Б. М. Булах*, ПММ, т. XXV, № 2 (1961). [3] *А. Г. Багдоев*, ДАН АрмССР, т. XLV, № 4 (1967). [4] *А. Г. Багдоев*, ДАН АрмССР, т. XLVI, № 1 (1968). [5] *Ю. А. Кравцов*, „Радиофизика", № 4, 1964. [6] *Sichel*, Phys. Fluids, 5, 1962.