ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 4

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение анизотропных (неортотропных) составных валов переменного диаметра*

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 11/V 1968)

Задача о кручении изотропных составных валов переменного сечения при помощи функции напряжений решена в работе [1].

В настоящей работе рассматривается кручение анизотропных (неортотропных) составных валов переменного диаметра. Получены основные дифференциальные уравнения задачи и необходимые условия, при помощи которых однозначно определяются как функция напряжений так и функция перемещения во всей области осевого сечения вала.

1. Функция напряжений. Рассмотрим тело вращения, составленное из различных материалов, расположенных симметрично относительно оси вращения. Пусть область осевого сечения вала разбивается на отдельные области $D_1, \cdots, D_m$, соответствующие различным анизотропным (неортотропным) материалам, из которых составлен вал (рис.1).

Далее, как и в случае изотропного тела, примем [2]

$$u_r^{(i)}=0, \quad u_\theta^{(i)}=u_\theta^{(i)}(r, z), \quad w=0. \tag{1.1}$$

Тогда

$$\varepsilon_r^{(i)}=\varepsilon_\theta^{(i)}=\varepsilon_z^{(i)}=\gamma_{rz}^{(i)}=0, \tag{1.2}$$

$$\gamma_{\theta z}^{(i)}=\frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial z}, \tag{1.3}$$

$$\gamma_{r\theta}^{(i)}=\frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r}-\frac{u_\theta^{(i)}}{r}. \tag{1.4}$$

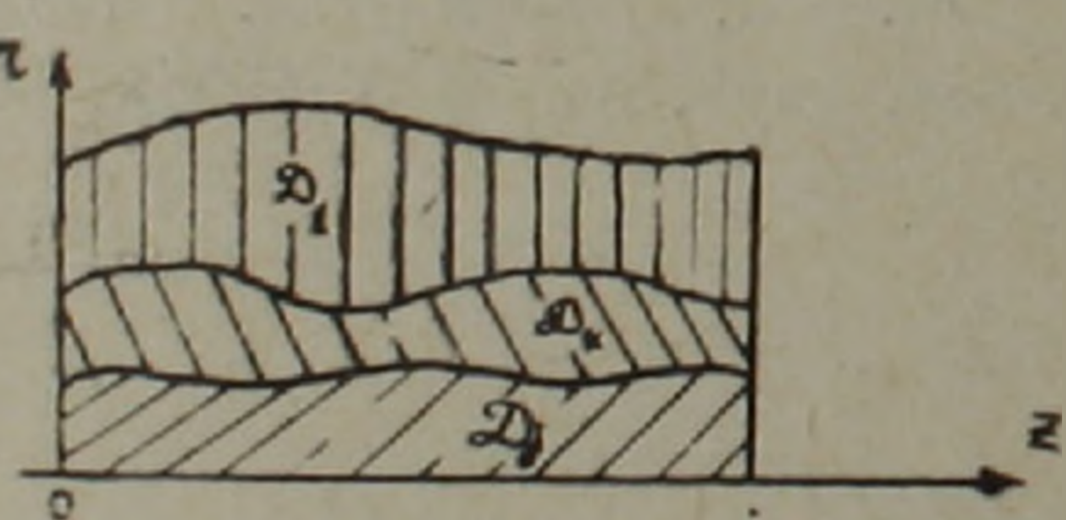

Рис. 1.

Относительно материала, примем следующий обобщенный закон Гука, т. е. каждый материал обладает цилиндрической анизотропией (ось анизотропии совпадает с геометрической осью и все радиальные плоскости являются плоскостями упругой симметрии) [3]:

* Работа доложена на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Москва, 1968 г.

$$\gamma_{\theta z}^{(i)} = a_{44}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{46}^{(i)} \tau_{r\theta}^{(i)},$$

$$\gamma_{r\theta}^{(i)} = a_{46}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{66}^{(i)} \tau_{r\theta}^{(i)}, \tag{1.5}$$

где $a_{kj}^{(i)}$ упругие постоянные, удовлетворяющие следующим неравенствам

$$a_{44}^{(i)} > 0, \quad a_{66}^{(i)} > 0, \quad a_{44}^{(i)} a_{66}^{(i)} - |a_{46}^{(i)}|^2 > 0. \tag{1.6}$$

Уравнение равновесия элемента вала для области, занятой i-м материалом, имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(i)}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^{(i)}}{r} = 0, \tag{1.7}$$

которые будут удовлетворены, если положить

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial z}, \tag{1.8}$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}.$$

Здесь $\Psi_i(r, z)$ — функция напряжения.

Из (1.3) и (1.4) легко получить, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma_{\theta z}^{(i)}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{r\theta}^{(i)}}{r}\right) = 0. \tag{1.9}$$

Тогда при помощи (1.5) и (1.8) из (1.9) для определения получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных с неразделяющимися переменными

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} - 2a_{46}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r \partial z} + a_{66}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} - \frac{3a_{44}^{(i)}}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{3a_{46}^{(i)}}{r} \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} = 0. \tag{1.10}$$

Граничные условия задаются в виде

$$\tau_{r\theta} \cos(r, n) + \tau_{z\theta} \cos(z, n) = T_n(s), \tag{1.11}$$

где $T_n(s)$ — напряжение, которое действует на поверхности составного вала, n — внешняя нормаль к контуру, а

$$l = \cos(r, n) = \frac{dz}{ds} = \frac{dr}{dn}, \quad m = \cos(z, n) = \frac{dz}{dn} = -\frac{dr}{ds}. \tag{1.12}$$

Согласно (1.8), (1.11) и (1.12) получим

$$\Psi_i\,[r(s), z(s)] = \varphi(s) \quad \left(\varphi(s) = -\int_0^s r^2(s)\, T_n(s)\, ds + c_0\right), \tag{1.13}$$

где $r(s)$ и $z(s)$ — координаты точки на поверхности вала на расстоянии s по длине образующей вала.

На линии раздела L_{kj} имеем

$$\tau_{r\theta}^{(k)} l + \tau_{z\theta}^{(k)} m = \tau_{r\theta}^{(j)} l + \tau_{z\theta}^{(j)} m, \tag{1.14}$$

где $l = \cos(r, n)$ и $m = \cos(z, n)$ — направляющие косинусы нормали к линии раздела L_{kj}. Учитывая (1.12) и (1.14), получим

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial s} = \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} \quad \text{на } L_{kj} \tag{1.15}$$

или

$$\Psi_k = \Psi_j + C_{kj} \quad \text{на } L_{kj}.$$

Нетрудно понять, что можно всегда принять $C_{kj} = 0$

При помощи (1.3)–(1.5) можно написать, что

$$a_{44}^{(k)} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} - a_{46}^{(k)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right), \tag{1.16}$$

$$a_{46}^{(k)} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial r} - a_{66}^{(k)} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta^{(k)}}{r} \right). \tag{1.17}$$

Умножая равенства (1.16) и (1.17) соответственно $\frac{dz}{ds}$ и $\frac{dr}{ds}$ и учитывая (1.12) и на поверхности раздела полное слипание, т. е. $u_\theta^{(k)} = u_\theta^{(j)}$, находим

$$\left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_k = \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_j \quad \text{на } L_{kj}, \tag{1.18}$$

где введено обозначение

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial n} \right)_k \equiv a_{44}^{(k)} l \frac{\partial}{\partial r} + a_{66}^{(k)} m \frac{\partial}{\partial z} - a_{46}^{(k)} \left(l \frac{\partial}{\partial z} + m \frac{\partial}{\partial r} \right). \tag{1.19}$$

Неизлишне отметить, что если имеем сплошной вал, то на оси имеет место

$$\Psi(0, z) = \Psi_0 \equiv \text{const}, \tag{1.20}$$

а если полый вал, то на внутренней поверхности должно выполняться условие (1.13), где $T_n(s)$ будет скручивающее внешнее усилие, которое действует на этой поверхности.

Таким образом, задача о кручении анизотропного составного вала переменного сечения сводится к нахождению в каждой из областей Di, соответствующей анизотропному материалу с упругими постоянными $a_{kj}^{(i)}$, функции напряжений Ψ_i, которая в этой области удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.10), граничным условиям (1.13) и (1.20) и условиям сопряжения (1.15) и (1.18).

2. Функция перемещения. Введем функцию перемещения F_i следующим образом [4, 5]:

$$F_i = \frac{u_\theta^{(i)}}{r}, \tag{2.1}$$

при этом удовлетворяется (1.9) тождественно.

Тогда при помощи (1.3) — (1.5) можно получить, что

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = A_{44}^{(i)} r \frac{\partial F_i}{\partial r} - A_{46}^{(i)} r \frac{\partial F_i}{\partial z}, \tag{2.2}$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = A_{66}^{(i)} r \frac{\partial F_i}{\partial z} - A_{46}^{(i)} r \frac{\partial F_i}{\partial r}, \tag{2.3}$$

где

$$A_{44}^{(i)}=a_{44}^{(i)}\cdot a^{(i)},\quad A_{46}^{(i)}=a_{46}^{(i)}\,a^{(i)},\quad A_{66}^{(i)}=a_{66}^{(i)}\,a^{(i)},\quad a^{(i)}=\frac{1}{a_{44}^{(i)}\,a_{66}^{(i)}-[a_{46}^{(i)}]^2} \qquad (2.4)$$

Подставляя выражения $\tau_{r\theta}^{(i)}$ и $\tau_{\theta z}^{(i)}$ из (2.2), (2.3) в уравнение равновесия элемента вала для области (1.7), получим уравнение для определения функции F_i

$$a_{44}^{(i)}\left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial r}\right)+a_{66}^{(i)}\,\frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2}-a_{46}^{(i)}\left(\frac{3}{r}\cdot\frac{\partial F_i}{\partial z}+2\,\frac{\partial^2 F_i}{\partial r\partial z}\right)=0. \qquad (2.5)$$

Функция F_i на контуре осевого сечения удовлетворяет

$$D_i\,[F_i]=\frac{T_n(s)}{r}, \qquad (2.6)$$

где T_n — проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения, заданная на свободной поверхности вала, а для оператора $D_i[\quad]$ принято такое обозначение

$$D_i[\quad]\equiv A_{44}^{(i)}\,l\frac{\partial}{\partial r}+A_{66}^{(i)}\,m\frac{\partial}{\partial z}-A_{46}^{(i)}\left(l\,\frac{\partial}{\partial z}+m\,\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot \qquad (2.7)$$

Условия на линии L_{kj} немедленно получаются, если учесть условие непрерывности напряжения T_n и u_θ на линии L_{kj}. Они имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} D_k[F_k]&=D_j[F_j]\\ F_k&=F_j\,. \end{aligned}\right\}\ \text{на}\ L_{kj}. \qquad (2.8)$$

3. **О решении задачи кручения неортотропных составных валов переменного диаметра.** Обозначим через μ малый параметр для области D_1

$$\mu=\frac{a_{46}^{(1)}}{\sqrt{a_{44}^{(1)}\,a_{66}^{(1)}}}, \qquad (3.1)$$

который меньше единицы и обращается в нуль в случае ортотропного материала, когда главные направления упругости совпадают с геометрическими осями.

Произведя преобразования

$$z=\zeta\sqrt{\frac{a_{66}^{(1)}}{a_{44}^{(1)}}},\quad \Psi_i(r,z)=\Phi_i(r,\zeta), \qquad (3.2)$$

из (1.10) и (1.18) придем

$$\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial r^2}-\frac{3}{r}\,\frac{\partial\Phi_k}{\partial r}+\delta_k\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial\zeta^2}-\mu\,\lambda_k\left(2\,\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial r\partial\zeta}-\frac{?}{r}\cdot\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta}\right)=0, \qquad (3.3)$$

$$N_1\,[\Phi]_k+\mu N_2\,[\Phi]_k=N_1\,[\Phi]_j+\mu N_2\,[\Phi]_j, \qquad (3.4)$$

где введены такие обозначения:

$$\delta_k=\frac{a_{44}^{(1)}\,a_{66}^{(k)}}{a_{66}^{(1)}\,a_{44}^{(k)}},\quad \lambda_k=e_k\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{44}^{(k)}},\quad e_k=\frac{a_{46}^{(k)}}{a_{46}^{(1)}},$$

$$N_1 [\ ]_k \equiv a_{44}^{(k)}\, l\, \frac{\partial}{\partial r} + a_{66}^{(k)} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{66}^{(1)}}}\, m\, \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad N_2 [\ ]_k \equiv -e_k \left(l a_{44}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \zeta} + m \sqrt{a_{44}^{(1)}\, a_{66}^{(1)}}\, \frac{\partial}{\partial r} \right). \tag{3.5}$$

Представим решение (3.3) в виде

$$\Phi_k (r, \zeta) = \Phi_k^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_k^{(p)} (r, \zeta) \cdot \mu^p. \tag{3.6}$$

Тогда при помощи (3.6) решение краевой задачи (3.3), (1.13), (1.15), (3.4), (1.20) можно свести к решению следующих рекуррентных краевых задач:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Phi_k^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_k^{(0)}}{\partial r} + \delta_k \cdot \frac{\partial^2 \Phi_k^{(0)}}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \Phi_k^{(0)} [r(s), \zeta(s)] = \varphi(s), \\ \Phi_k^{(0)} = \Phi_j^{(0)}, \\ N_1 [\Phi^{(0)}]_k = N_1 [\Phi^{(0)}]_j, \\ \Phi^{(0)} (0, \zeta) = \Phi_0 = \mathrm{const}; \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \Phi_k^{(p)}}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi_k^{(p)}}{\partial r} + \delta_p \cdot \frac{\partial^2 \Phi_k^{(p)}}{\partial \zeta^2} = Q_k^{(p-1)}, \\ \Phi_k^{(p)} = 0, \ (p = 1, 2, \cdots) \\ \Phi_k^{(p)} = \Phi_j^{(p)}, \\ N_1 [\Phi^{(p)}]_k + N_2 [\Phi^{(p-1)}]_k = N_1 [\Phi^{(p)}]_j + N_2 [\Phi^{(p-1)}]_j, \\ \Phi^{(p)} (0, \zeta) = 0, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$Q_k = \lambda_k \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_k^{(p)}}{\partial r \partial \zeta} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_k^{(p)}}{\partial \zeta} \right). \tag{3.9}$$

Таким образом, задача о кручении неортотропных составных валов переменного диаметра сводится к ряду рекуррентных задач (3.7)—(3.8) сходных с задачей кручения ортотропных составных валов переменного диаметра, которые последовательно можно решать.

Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Փոփոխական տրամագծով անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) բաղադրյալ լիսեռների ոլորումը

Դիտարկված է փոփոխական տրամագծով անիզոտրոպ բաղադրյալ լիսեռների ոլորման խնդիրը։ Ստացված են խնդրի հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և այն բոլոր անհրաժեշտ պայմանները, որոնց օգնությամբ միարժեք կերպով որոշվում են ինչպես լարումների, այնպես էլ տեղափոխման ֆունկցիաները լիսեռի առանցքային տիրույթում։

Այնուհետև, ներմուծելով ֆիզիկական փոքր պարամետր, դիտարկվող խնդիրը բերվում է փոխական տրամագծով օրթոտրոպ բաղադրյալ լիսեռների ոլորման մի շարք խնդիրների։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *К. С. Чобанян*, Кручение составного вала переменного диаметра. ДАН рмССР, XXVII, № 3 (1958). [2] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТН, 1937. *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, М., 1957. *К. В. Соляник-Красса*, Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М., 1949. *Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян*, Кручение упругих тел, Гос. изд. физ.-мат. т-ры, М., 1963.