ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 4

УДК 518

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О плоском установившемся течении тепла в некоторых криволинейных телах

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/VII 1968)

В работе дается эффективное решение задачи плоского установившегося течения тепла в цилиндрических телах, имеющих в плане форму некоторых криволинейных четырехугольников. Подобные задачи встречаются, например, при определении теплового поля в лопастях турбин, деталях теплообменников и т. п.

Пусть имеем цилиндрическое тело, поперечное сечение которого ограничено линиями $r = R_1 e^{\omega_1 \varphi}$; $r = R_2 e^{\omega_1 \varphi}$; $\varphi = \omega_2 \ln \frac{r}{R_1}$; $\varphi = \omega_2 \ln \frac{r}{R_1} + (1 - \omega_1 \omega_2) \varphi_1$ (рис. 1). Функция распределения температуры $U(r, \varphi)$ в случае, если внутри тела имеются источники тепла, как известно ([1]), удовлетворяет следующему уравнению в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\lambda} P(r, \varphi), \quad (1)$$

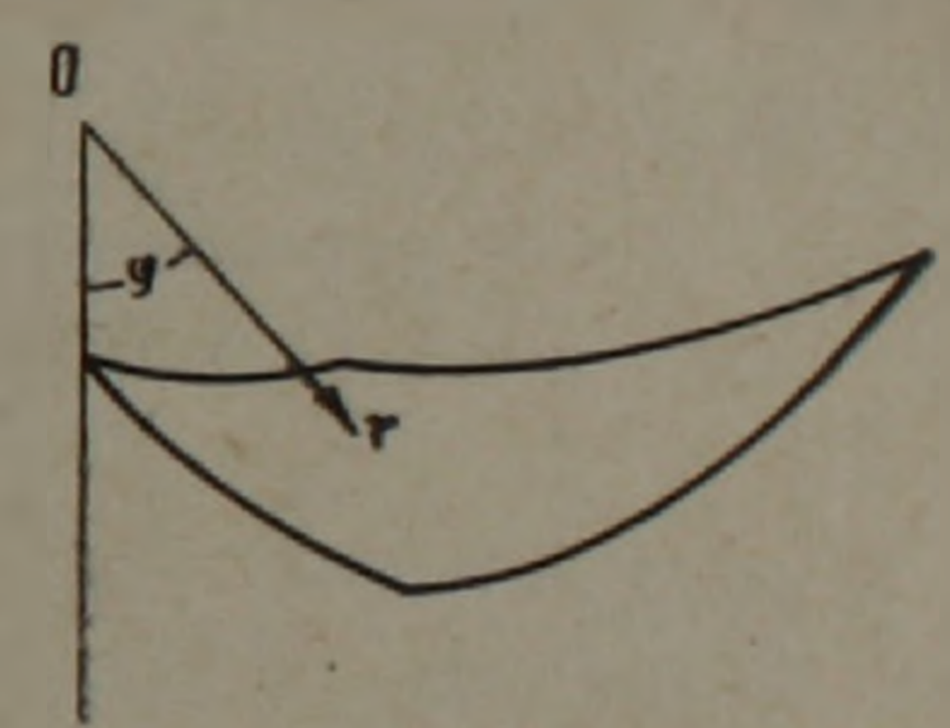

Рис. 1.

где λ — коэффициент теплопроводности, $P(r, \varphi)$, интенсивность тепловыделения. Предполагаем, что на границе тела задано распределение температуры:

$$U(R_1 e^{\omega_1 \varphi}; \varphi) = T_0(\varphi), \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1);$$

$$U(R_2 e^{\omega_1 \varphi}; \varphi) = T(\varphi), \qquad \left(\Omega \omega_2 \ln \frac{R_2}{R_1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 + \Omega \omega_2 \ln \frac{R_2}{R_1}\right);$$

$$U\left(r; \omega_2 \ln \frac{r}{R_1}\right) = S_0(r), \qquad (R_1 \leqslant r \leqslant R_1^{1-\Omega} R_2^{\Omega}); \quad (2)$$

$$U\left(r; \omega_2 \ln \frac{r}{R_1} + \varphi_1 - \omega_1 \omega_2 \varphi_1\right) = S(r), \qquad (R_1 e^{\omega_1 \varphi_1} \leqslant r \leqslant R_1^{1-\Omega} R^{\Omega} e^{\omega_1 \varphi_1}),$$

где $\Omega = \frac{1}{1 - \omega_1 \omega_2}$.

Относительно функций $S_0(r)$, $S(r)$, $T_0(\varphi)$ и $T(\varphi)$ предполагаем, что они непрерывны в соответствующих интервалах и почти всюду обладают суммируемой производной, а также, что $T_0(0)=S(R_1)$; $T_0(\varphi_1)=S(R_1e^{\omega_1\varphi_1})$; $T\left(\omega_2\Omega\ln\frac{R_2}{R_1}\right)=S_0\ (R_1^{1-\Omega}R_2^{\Omega})$; $T\left(\varphi_1+\omega_2\Omega\ln\frac{R_2}{R_1}\right)=$ $=S(R_1^{1-\Omega}R_2^{\Omega}e^{\omega_1\varphi_1})$. Что касается интенсивности тепловыделения $P(r,\varphi)$, то предполагаем, что она является суммируемой функцией.

Прежде, чем переходить к решению задачи, преобразуем систему координат, обозначив

$$re^{-\omega_1\varphi}=R_1e^{\sqrt{1+\omega_1^2}\,\xi};\quad \varphi-\omega_2\ln\frac{r}{R_1}=\sqrt{1+\omega_2^2}\,\eta. \tag{3}$$

Подставляя значения r и φ из (3) в (1), для функции

$$U^*(\xi,\eta)=$$

$$=U\left(R_1\exp\frac{\omega_1\sqrt{1+\omega_2^2}\,\eta+\sqrt{1+\omega_1^2}\,\xi}{1-\omega_1\omega_2};\ \frac{\sqrt{1+\omega_2^2}\,\eta+\omega_2\sqrt{1+\omega_1^2}\,\xi}{1-\omega_1\omega_2}\right),$$

определенной в прямоугольнике $\left(0\leqslant\eta\leqslant\frac{\varphi_1(1-\omega_1\omega_2)}{\sqrt{1+\omega_1^2}};\ 0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+\omega_2^2}}\times\right.$ $\left.\times\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$*, получим следующее уравнение с неразделяющимися переменными

$$\frac{\partial^2U^*}{\partial\xi^2}-2\alpha\frac{\partial^2U^*}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2U^*}{\partial\eta^2}=-Q(\xi,\eta), \tag{4}$$

где

$$\alpha=\frac{\omega_1+\omega_2}{\sqrt{(1+\omega_1^2)(1+\omega_2^2)}};\quad Q(\xi,\eta)=\frac{R_1^2}{\lambda}e^{2(\Omega_1\xi+\omega_1\Omega_2\eta)}\times$$

$$\times P(R_1e^{\Omega_1\xi+\omega_1\Omega_2\eta};\quad \Omega_2\eta+\omega_2\Omega_1\xi);\quad \Omega_1=\frac{\sqrt{1+\omega_1^2}}{1-\omega_1\omega_2};\ \Omega_2=\frac{\sqrt{1+\omega_2^2}}{1-\omega_1\omega_2}. \tag{5}$$

На границе функция $U^*(\xi,\eta)$ удовлетворяет следующим условиям

$$U^*(\xi,0)=S_0^*(\xi);\ U^*(\xi,d)=S^*(\xi);\ U^*(0,\eta)=T_0^*(\eta);\ U^*(c,\eta)=T^*(\eta). \tag{6}$$

Здесь обозначено

$$d=\frac{(1-\omega_1\omega_2)\varphi_1}{\sqrt{1+\omega_2^2}};\quad c=\frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^2}}\ln\frac{R_2}{R_1};\ S_0^*(\xi)=S_0(R_1e^{\Omega_1\xi});$$

$$S^*(\xi)=S(R_1e^{\Omega_1\xi+\omega_1\varphi_1});\ T_0^*(\eta)=T_0(\Omega_2\eta);\ T^*(\eta)=T\left(\Omega_2\eta+\omega_2\Omega\ln\frac{R_2}{R_1}\right). \tag{7}$$

Для нахождения функции $U^*(\xi,\eta)$ воспользуемся способом, изложенным в ([2]).

---

* Здесь и ниже предполагается, что $1-\omega_1\omega_2>0$; $R_2>R_1$. В противном случае следует изменить знаки в соответствующих неравенствах.

Будем искать решение уравнения (4) в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям

$$U^*(\xi, \eta) = \frac{g_0(\xi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(\xi) \sin \gamma_k \eta + g_k(\xi) \cos \gamma_k \eta], \tag{8}$$

где

$$\gamma_k = \frac{2k\pi}{d}; \; f_k(\xi) = \frac{2}{d}\int_0^d U^*(\xi, \eta) \sin \gamma_k \eta d\eta; \; g_k(\xi) = \frac{2}{d}\int_0^d U^*(\xi, \eta) \cos \gamma_k \eta d\eta.$$

Для определения коэффициентов $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ умножим уравнение (4) соответственно на $\frac{2}{d} \sin \gamma_k \eta$ и $\frac{2}{d} \cos \gamma_k \eta$ и проинтегрируем от 0 до d. Принимая во внимание (6), для $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} f_k''(\xi) + 2\alpha\gamma_k g_k'(\xi) - \gamma_k^2 f_k(\xi) = \frac{2}{d} p_k(\xi); \\ g_k''(\xi) - 2\alpha\gamma_k f_k'(\xi) - \gamma_k^2 g_k(\xi) = \frac{2}{d} q_k(\xi), \end{gathered} \tag{9}$$

где обозначено:

$$p_k(\xi) = -\int_0^d Q(\xi, \eta) \sin \gamma_k \eta d\eta - \gamma_k [S_0^*(\xi) - S^*(\xi)];$$

$$q_k(\xi) = -\int_0^d Q(\xi, \eta) \cos \gamma_k \eta d\eta - 2\alpha [S_0^{*\prime}(\xi) - S^{*\prime}(\xi)] + S_1(\xi) - S_2(\xi); \tag{10}$$

$$S_1(\xi) = \left.\frac{\partial U^*}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}; \quad S_2(\xi) = \left.\frac{\partial U^*}{\partial \eta}\right|_{\eta=d}.$$

Как видно из (10), ввиду того, что $\{\cos \gamma_k \xi\}$ не являются собственными функциями рассматриваемой краевой задачи, в правую часть второго из уравнений (9) входят неизвестные значения $\left.\frac{\partial U^*}{\partial \eta}\right|_{\eta=0}$ и $\left.\frac{\partial U^*}{\partial \eta}\right|_{\eta=d}$. Решая уравнения (9) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям, для $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ получаем следующие выражения:

$$f_k(\xi) = \frac{2}{d \operatorname{sh} \nu\gamma_k c} \Bigg\{ \operatorname{sh} \nu\gamma_k (c - \xi) \Bigg[\int_0^d T_0^*(\eta) \sin \gamma_k (\eta - \alpha\xi) d\eta -$$

$$- \frac{1}{\nu\gamma_k} \int_0^{\xi} \Big(p_k(\zeta) \cos \alpha\gamma_k (\xi - \zeta) - q_k(\zeta) \sin \alpha\gamma_k (\xi - \zeta) \Big) \operatorname{sh} \nu\gamma_k \zeta d\zeta \Bigg] +$$

$$+\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi\left[\int_0^d T^*(\eta)\sin\gamma_k(\eta-\alpha\xi+\alpha c)\,d\eta-\frac{1}{\nu\gamma_k}\int_\xi^c\Big(p_k(\zeta)\cos\alpha\gamma_k(\zeta-\xi)+\right.$$

$$\left.\left.+q_k(\zeta)\sin\alpha\gamma_k(\zeta-\xi)\Big)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\zeta)\,d\zeta\right]\right\};$$

(11)

$$g_k(\xi)=\frac{2}{d\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left\{\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\xi)\left[\int_0^d T_0^*(\eta)\cos\gamma_k(\eta-\alpha\xi)\,d\eta-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\nu\gamma_k}\int_0^\xi\Big(p_k(\zeta)\sin\alpha\gamma_k(\xi-\zeta)+q_k(\zeta)\cos\alpha\gamma_k(\xi-\zeta)\Big)\operatorname{sh}\nu\gamma_k\zeta\,d\zeta\right]+$$

$$+\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi\left[\int_0^d T^*(\eta)\cos\gamma_k(\eta-\alpha\xi+\alpha c)\,d\eta+\frac{1}{\nu\gamma_k}\int_\xi^c\Big(p_k(\zeta)\sin\alpha\gamma_k(\zeta-\xi)-\right.$$

$$\left.\left.-q_k(\zeta)\cos\alpha\gamma_k(\zeta-\xi)\Big)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\zeta)\,d\zeta\right]\right\},$$

где $\nu=\sqrt{1-\alpha^2}$. В выражения для $f_k(\xi)$ и $g_k(\xi)$ входят неизвестные функции $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$. Прежде, чем перейти к их определению, заметим, что вследствие неоднородности граничных условий ряд (8) медленно сходится — коэффициенты $f_k(\xi)$ при возрастании k убывают с быстротой $0\left(\frac{1}{k}\right)$. Усилим сходимость ряда (8), для чего выделим и просуммируем выражение, обусловливающее слабую сходимость:

$$U^*(\xi,\eta)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{d}\right)[S_0^*(\xi)-S^*(\xi)]+\frac{g_0(\xi)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[f_k(\xi)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{S_0^*(\xi)-S^*(\xi)}{\lambda_k d}\right]\sin\gamma_k\eta+g_k(\xi)\cos\gamma_k\eta\right\}. \tag{12}$$

Ряд в (12) обладает усиленной сходимостью — члены его убывают с быстротой $0\left(\frac{1}{k^2}\right)$ и $0\left(\frac{1}{k^3}\right)$. Перейдем теперь к определению $S_1(\xi)-S_2(\xi)$. Для этого потребуем выполнение граничных условий на $\eta=0$ и $\eta=d$:

$$\frac{g_0(\xi)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k(\xi)=\frac{S_0(\xi)+S(\xi)}{2}. \tag{13}$$

Умножим уравнение (13) на $\frac{2}{c}\sin\delta_j\xi$, где $\delta_j=\frac{j\pi}{c}$, и проинтегрируем от 0 до c. При этом, вследствие равномерной сходимости ряда (13), возможна перестановка знаков суммы и интеграла. Для нахождения значения $\int_0^c g_k(\xi)\sin\delta_j\xi\,d\xi$ воспользуемся уравнениями (9) и граничными условиями (6). После некоторых преобразований для определения коэффициентов Фурье функции $S_1(\xi)-S_2(\xi)$ получим следующее соотношение:

$$a_j = -8\alpha\nu\delta_j^3 \frac{\operatorname{ch}\nu\delta_j d - \cos\alpha\delta_j d}{d\operatorname{sh}\nu\delta_j d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k^{(j)}}{(\gamma_k^2+\delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2} + t_j. \tag{14}$$

Здесь обозначено:

$$a_j = 2\delta_j \int_0^c [S_1(\xi)-S_2(\xi)] \sin\delta_j\xi d\xi;\quad m_k^{(j)} = \gamma_k d\,[f_k'(0) - (-1)^j f_k'(c)];$$

$$t_j = \frac{2\delta_j}{\operatorname{sh}\nu\delta_j d}\left\{ \int_0^d [T_0^{*'}(\eta) - T^{*'}(\eta)]\,[\nu(\operatorname{ch}\nu\delta_j(d-\eta)\cos\alpha\delta_j\eta - \right.$$

$$-\operatorname{ch}\nu\delta_j\eta\cos\alpha\delta_j(d-\eta)) + \alpha(\operatorname{sh}\nu\delta_j(d-\eta)\sin\alpha\delta_j\eta - \operatorname{sh}\nu\delta_j\eta\sin\alpha\delta_j(d-\eta))d\eta +$$

$$\tag{15}$$

$$+(\alpha\operatorname{sh}\nu\delta_j d - \nu\sin\alpha\delta_j d)\int_0^c [S_0^{*'}(\xi) - S^{*'}(\xi)]\sin\delta_j\xi\,d\xi -$$

$$-\nu(\operatorname{ch}\nu\delta_j d - \cos\alpha\delta_j d)\int_0^c [S^{*'}(\xi) + S^{*'}(\xi)]\cos\delta_j\xi d\xi +$$

$$\left. + \int_0^c\int_0^d Q(\xi,\eta)\,[\operatorname{sh}\nu\delta_j(d-\eta)\sin\delta_j(\alpha+\xi\eta) + \operatorname{sh}\nu\delta_j\eta\sin\delta_j(\xi+\alpha\eta-\alpha d)]\,d\xi d\eta \right\}.$$

В свою очередь, $m_k^{(s)}$, входящие в (14) выразятся посредством a_j из следующего уравнения:

$$m_k^{(s)} = -4\alpha\nu\gamma_k^3 \frac{\operatorname{ch}\nu\gamma_k c - (-1)^s\cos\alpha\gamma_k c}{c\operatorname{sh}\nu\gamma_k c} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^{j+s}]\,a_j}{(\gamma_k^2+\delta_j^2)^2 - 4\alpha^2\gamma_k^2\delta_j^2} + \rho_k^{(s)},$$

где

$$\rho_k^{(s)} = \frac{2\gamma_k}{\operatorname{sh}\nu\gamma_k c}\left\{ \int_0^c [S_0^{*'}(\xi) - S^{*'}(\xi)]\,[\nu\operatorname{ch}\nu\gamma_k(c-\xi)\cos\alpha\gamma_k\xi + \right.$$

$$+\alpha\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\xi)\sin\alpha\gamma_k\xi - (-1)^s(\alpha\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi\sin\alpha\gamma_k(c-\xi) +$$

$$+\nu\operatorname{ch}\nu\gamma_k\xi\cos\alpha\gamma_k(c-\xi))]\,d\xi + [\alpha\operatorname{sh}\nu\gamma_k c + (-1)^s\nu\sin\alpha\gamma_k c]\times$$

$$\times\int_0^d [T_0^{*'}(\eta) - (-1)^s T^{*'}(\eta)]\sin\gamma_k\eta d\eta - \nu\,[\operatorname{ch}\nu\gamma_k c - (-1)^s\cos\alpha\gamma_k c]\times$$

$$\times\int_0^d [T_0^{*'}(\eta) + (-1)^s T^{*'}(\eta)]\cos\gamma_k\eta d\eta +$$

$$+\int_0^c\int_0^d Q(\xi,\eta)\left[\sin\gamma_k(\eta+\alpha\xi)\operatorname{sh}\nu\gamma_k(c-\xi)+(-1)^s\sin\gamma_k(\eta+\alpha\xi-\alpha c)\operatorname{sh}\nu\gamma_k\xi\right]d\eta d\xi\Big\}. \tag{17}$$

Таким образом, для определения неизвестных a_j и $m_k^{(s)}$ получим совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14) и (16). Займемся исследованием полученной совокупности. Определим вначале суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений полученных систем. Сумма модулей коэффициентов в j-м уравнении системы (14) равна

$$\sigma_j=|\alpha|\left[1+\nu\frac{\sin\alpha\delta_j d}{\alpha\operatorname{sh}\nu\delta_j d}-\frac{4\nu}{\delta_j d}\left(\operatorname{cth}\nu\delta_j d-\frac{\cos\alpha\delta_j d}{\operatorname{sh}\nu\delta_j d}\right)\right]. \tag{18}$$

Аналогичные значения получаются и для суммы модулей коэффициентов системы (14). Второе слагаемое в выражении (18) убывает с экспоненциальной быстротой и, начиная с некоторого j, σ_j, вследствие неравенства $|\alpha|<1$, становится меньше 1. Заметим, что при $|\alpha|\leqslant\frac{2}{\sqrt{5}}$ сумма модулей коэффициентов систем (14) и (16) строго меньше единицы для всех j и k и при любых отношениях $\frac{d}{c}$, т. е. системы вполне регулярны. Свободные члены t_j и $\rho_k^{(s)}$, как легко видеть из (15) и (17), ограничены в своей совокупности. Из теории бесконечных систем ([3]) следует единственность ограниченного решения бесконечных систем (14) и (16) и сходимость методов последовательных приближений. Заметим далее, что системы (14) и (16) распадаются на две независимые совокупности. Это обстоятельство значительно облегчает работу при решении усеченных систем.

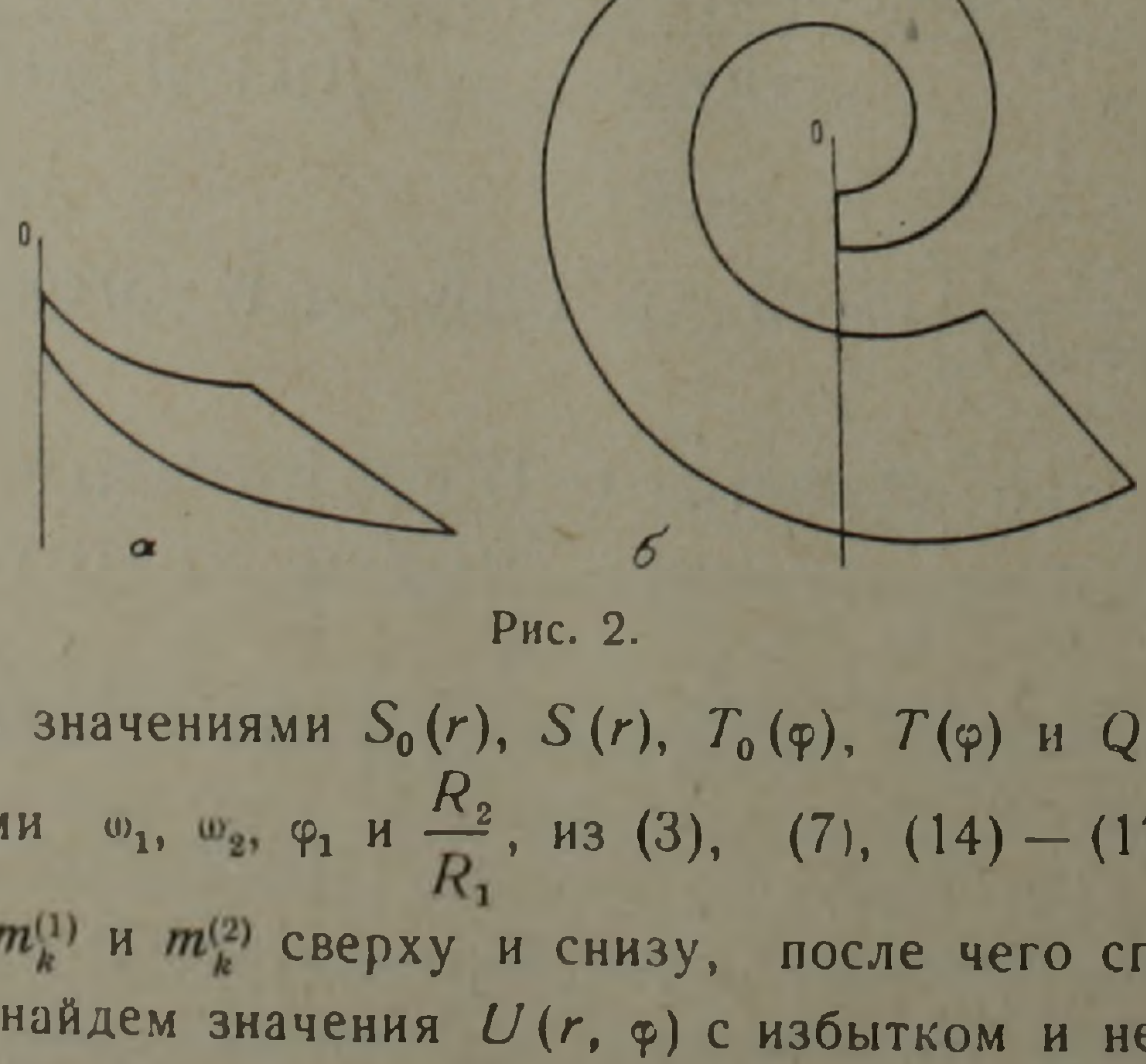

Рис. 2.

Задаваясь значениями $S_0(r)$, $S(r)$, $T_0(\varphi)$, $T(\varphi)$ и $Q(r,\varphi)$, а также величинами ω_1, ω_2, φ_1 и $\frac{R_2}{R_1}$, из (3), (7), (14) — (17) определим значения a_j, $m_k^{(1)}$ и $m_k^{(2)}$ сверху и снизу, после чего способом, описанным в ([4]), найдем значения $U(r,\varphi)$ с избытком и недостатком.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи. а) Если $\omega_2 = 0$, получаем область, ограниченную отрезками радиусов и экспоненциальных кривых (рис. 2*а*). При этом, если $\varphi_1 > 2\pi$, область огибает начало координат (рис. 2*б*). б) При $\omega_1 = 0$ получаем область, ограниченную дугами окружностей и логарифмических спиралей. в) Если $\omega_1 = -\omega_2$, ряды, входящие в выражения для a_j и $m_k^{(s)}$, исчезают, и бесконечные системы (14) и (16) вырождаются в равенства.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Որոշ կորագիծ մարմիններում ջերմության հարթ կայունացած հոսանքի մասին

Հոդվածում տրվում է $r=R_1e^{\omega_1\varphi}$; $r=R_2e^{\omega_1\varphi}$; $\varphi=\omega_2\ln\frac{r}{R_1}$ *և* $\varphi=\omega_2\ln\frac{r}{R_1}+(1-\omega_1\omega_2)\varphi_1$ *կորերով սահմանափակված ընդլայնական կտրվածք ունեցող գլանային մարմիններում ջերմության հարթ կայունացած հոսանքի խնդրի էֆեկտիվ լուծումը՝ ջերմության աղբյուրների առկայության դեպքում։*

Կոորդինատական սիստեմի ձևափոխման շնորհիվ, (1) հավասարման լուծումը դիտարկվող կորագիծ քառանկյան տիրույթում վերածվում է չտրոհվող փոփոխականներով (4) հավասարման լուծումը տրվում է արագ նվազող շարքով ըստ եռանկյունային և ցուցիչային ֆունկցիաների, որի անհայտ գործակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների լիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմներից։

Դիտարկվում են մասնակի դեպքեր՝ երբ $\omega_1=-\omega_2$, *ապա հավասարումների անվերջ սիստեմները վերածվում են սովորական հավասարությունների, երբ* $\omega_2 = 0$, $\varphi_1>2\pi$, *ստացվում է սպիրալաձև տիրույթ, և այլն։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Лыков*, Теория теплопроводности, изд. „Высшая школа", М., 1967. [2] *Р. С. Минасян*, ДАН АрмССР, т. XXIII, № 4 (1956). [3] *Л. К. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, М.—Л., Физматгиз, 1962. [4] *Р. С. Минасян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат. наук, XI, № 3 (1958).