ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 4

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

И. И. Микаелян

Наилучшее приближение полиномами на несвязных совокупностях

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 11/VII 1968)

Если E — замкнутое множество, дополнение которого связно, то функция, непрерывная на E и аналитическая во всех его внутренних точках, представляется равномерно сходящимся рядом полиномов на этом множестве.

Второй по сложности вопрос—это вопрос об оценке скорости приближения, т. е. задача об оценке

$$\rho_n(f; E) = \inf_{\{p_n(z)\}} \max_{z\in E} |f(z) - P_n(z)|$$

где $P_n(z)$ — многочлен степени не выше n.

В настоящей заметке мы задались целью исследовать наилучшие полиноминальные приближения на замкнутых несвязных множествах с бесконечным множеством компонент; при этом мы ограничиваемся совокупностями определенного типа, представляющих качественный интерес.

Мы берем: 1) совокупность, состоящую из счетного числа кругов с предельной точкой, 2) совокупность кругов, расположенных всюду плотно извне к некоторой окружности, и, наконец, 3) совокупность, состоящую из счетного числа прямоугольников, расположенных плотно к некоторому отрезку.

Для выявления в какой степени скорость приближения зависит от чисто геометрических конфигураций, мы ограничимся кусочно-постоянными функциями.

При решении указанных задач пользуемся известными интерполяционными методами (ср. напр. (1)).

1. Рассмотрим множество E_1, взаимно непересекающихся кругов $|z-a_k| < r_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ a_k вещественные, причем $\sum_{k=1}^{\infty} r_k < +\infty$ и $a_k \to a_0$. Предположим, что последовательность $\{r_k\}$ монотонно убы-

вающая. Хотим показать, что мера наилучшего приближения полиномами на множестве может быть произвольно медленной в зависимости от радиусов кругов, от расстояния между ними и от функции, определенной на этом множестве. Δ_k расстояние между $|z-a_k|=r_k$ и $|z-a_{k+1}|=r_{k+1}$.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\beta_k\}$ и допустим, что β_k стремится к нулю, монотонно убывая.

Определим функцию $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\beta_n \text{ при } |z-a_n|\leqslant r_n,\ (n=1, 2,\cdots)\quad f(a_0)=0.$$

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — непрерывные, монотонно убывающие функции, определенные для $1\leqslant x<+\infty$, причем $\psi(m)=\beta_m$, а $\varphi(m)=\Delta_m$. При наличии этих условий, если обозначим $m=\theta(n)$ решение уравнения

$$e^{-\frac{n\varphi(m)}{4}+\frac{C}{\varphi(m)}}=\psi_{(m+1)}, \tag{*}$$

где

$$C=8\pi\left(\sum_{k=1}^{m} r_k+R_m\right),$$

$$R_m=\sum_{k=m+1}^{\infty}(\Delta_k+2r_k)$$

(а такое решение существует, так как в случае фиксированного n левая часть (*) монотонно возрастающая, а правая часть — монотонно убывающая), будет иметь место следующая теорема.

Теорема 1. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_1 равна $2\psi\,|\theta(n)|$.*

II. Возьмем $R_1>R_2>\cdots>R_n>\cdots R_n\to 1$. На каждой из окружностей $|z|=R_k$ построим круги $|z-a_j^{(k)}|<r_j$ $(j=1, 2,\cdots, n_k)$ и предположим, что центры $a_j^{(k)}$ на окружности $|z|=R_k$ распределены равномерно.

Множество кругов $|z-a_p^{(k)}|<r_p$ $(k=1, 2,\cdots)$ $(p=1, 2,\cdots n_k)$ обозначим через E_2 и предположим, что они не пересекаются, для этого достаточно взять $r_k<\min\left[\frac{1}{4}(R_k-R_{k+1});\ \frac{2\pi}{n_k}\right]$.

Обозначим через Δ_k расстояние между двумя соседними окружностями, имеющими центры на окружности $|z|=R_k$, а через δ_k — расстояние между соседними окружностями множества E_2, имеющими центры на окружностях $|z|=R_k$ и $|z|=R_{k+1}$.

Предположим $\sum_{k=1}^{\infty} n_k r_k<+\infty$ и $\sigma_k=\min(\Delta_k;\ \delta_k;\ r_k)$.

Определим функцию $f(z)$: $f(z)=\beta_k$ при $|z-a_j^{(k)}|<r_k$ $(j=1, 2,\cdots$ $\cdots, n_k)$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны для $x\geqslant 0$ и монотонно убывая стремятся к нулю, кроме того $\varphi(m)=\sigma_m$, $\psi(m)=\beta_m$.

В этом случае имеет место следующая

Теорема 2. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_2 равна $\psi[\theta(n)]$, где $\theta(n)$ определяется из уравнения*

$$e^{-\frac{n\varphi(m)}{8}+\frac{C}{\varphi(m)}}=\psi(m).$$

III. Определим множество E_3.

Пусть $-1\leqslant y\leqslant 1$, $a_k\leqslant x\leqslant b_k$.

Разность b_k-a_k обозначим через h_k, $a_{k+1}-b_k$ через Δ_k, тогда

$$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}(h_k+\Delta_k),\quad b_n=b_0+\sum_{k=1}^{n}(h_k+\Delta_k).$$

Определим функцию $f(z)$:

$$f(z)=\beta_k \text{ при } a_k\leqslant x\leqslant b_k,\ -1\leqslant y\leqslant 1, \text{ где } z=x+iy.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущей теореме, а $m=\theta(n)$ является решением уравнения

$$e^{-\frac{n\varphi(m)}{4}+\frac{m}{\varphi(m)}}=\psi(m), \quad \text{то}$$

имеет место следующая

Теорема 3. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_3 равна $\psi[\theta(n)]$.*

Доказательство теоремы 1. Через E_m обозначим следующее множество:

$$|z-a_k|<r_k+\frac{\Delta_m}{4}\quad (k=1, 2,\cdots,m)$$

и

$$|z-a_0|<R_m+\frac{\Delta_m}{4}\quad (m=1, 2,\cdots),$$

где

$$R_m=\sum_{k=m+1}^{\infty}(\Delta_k+2r_k).$$

Ясно, что $R_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Через D_m обозначим дополнение множества E_m до всей плоскости.

Для области D_m через $G_m(z)$ обозначим функцию Грина, особенность которой находится в бесконечно удаленной точке.

Тогда имеем

$$G_m(z)=\gamma_m+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_m}\frac{\partial G_m}{\partial\nu}\ln\rho\, ds,$$

где Γ_m — граница D_m, ν — направление внешней нормали, γ_m — постоянная Робэна для множества E_m, а ρ — расстояния точки z от граничной точки s.

Каждый из контуров Γ_m разложим на такие дуги Δs_l, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta s_l}\frac{\partial G_m}{\partial \nu}\,ds=\frac{1}{n}.$$

С другой стороны на контуре будут еще такие дуги $\Delta s_j'$, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta s_j'}\frac{\partial G_m}{\partial \nu}\,ds<\frac{1}{n}.$$

Число дуг Δs_l не больше n, а число дуг $\Delta s_j'$ — не больше $m+1$.

На каждой из дуг Δs_l возьмем точку z_l и составим

$$\pi_n(z)=\prod_{(l)}(z-z_l).$$

Степень многочлена $\pi_n(z)$ не превосходит n.

На линии уровня D_m оценим выражение

$$\frac{\sqrt[n]{|\pi_n(z)|}}{e^{-\gamma_m+G_m(z)}}.$$

Имеем

$$\left|G_m(z)-\gamma_m-\frac{1}{n}\ln\left|\pi_n(z)\right|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta s_l}\frac{\partial G_m}{\partial \nu}(\ln\rho-\ln\rho_l)\,ds\right|+\sum_{\mu}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta s_j'}\frac{\partial G_m}{\partial \nu}\ln\rho\,dz\right|,$$

где

$$\rho_l=|z-z_l|.$$

Возьмем $\rho\geqslant\frac{\Delta_m}{8}$, тогда будем иметь

$$|\ln\rho-\ln\rho_l|\leqslant\frac{8\cdot\Delta s_l}{\Delta_m}.$$

Следовательно

$$\left|G_m(z)-\gamma_m-\frac{1}{n}\ln|\pi_n(z)|\right|\leqslant\sum_{(l)}\frac{1}{n}\cdot\frac{8\Delta s_l}{\Delta_m}+\sum_{(j)}\frac{1}{n}\ln\frac{8}{\Delta_m}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8}{n\cdot\Delta_m}\cdot 2\pi\left(\sum_{k=1}^{m}r_k+R_m\right)+\frac{m+1}{n}\cdot\ln\frac{4}{r_k}.$$

Откуда получим

$$\exp\left[G_m(z)-\gamma_m-\frac{C}{n\cdot\Delta_m}-\frac{m+1}{n}\cdot\ln\frac{4}{r_m}\right]\leqslant\sqrt[n]{|\pi_n(z)|}\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[G_m(z) - \gamma_m - \frac{C}{n\cdot\Delta_m} - \frac{m+1}{n}\cdot\ln\frac{4}{r_m}\right],$$

где

$$C = 8\pi\left(\sum_{k=1}^{m} r_k + R_m\right).$$

Построим интерполяционный многочлен Лагранжа $P_n(z_i) = f(z_i)$, когда z_i находится на какой-либо из окружностей

$$|z - a_k| = r_k + \frac{\Delta_m}{4}\ (k = 1, 2, \cdots, m) \text{ и } P_n(z_i) = \beta_{m+1},$$

$$\text{когда } |z - a_0| = R_m + \frac{\Delta_m}{4}.$$

Пользуясь формулой Эрмита

$$f^*(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_m} \frac{\pi_n(z) f^*(t)}{\pi_n(t)(t-z)}\,dt,$$

где $f^*(z) = f(z)$ при $|z - a_k| \leqslant r_k$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$
и

$$f^*(z) = \beta_{m+1} \text{ при } |z - a_0| \leqslant R_m$$

K_m — линия уровня D_m.

Оценим эту разность:

$$|f^*(z) - P_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\max\left|\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(t)}\right|\cdot\beta_1\cdot\text{дл. } K_m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\exp\left[n\left[G_m(z) - G_m(t)\right] + \frac{C}{\Delta_m} + m\cdot\ln\frac{4}{\Delta_m}\right]\cdot\beta_1\text{ дл. } K_m.$$

Из следующей оценки функции Грина ([2])

$$G_m(z) > \ln\frac{d}{d^*}\, e^{-\int\limits_{L_m}\frac{ds}{\rho(s)}},$$

где L_m — кривая, содержащая множество E_m, $d = \max|z|$, когда $z \in L_m$, $d^* = \max|z|$, когда $z \in E_m$, а $\rho(s)$ — расстояние s от точек E_m, следует, что можно выбрать две такие линии уровня функции Грина, расстояние между которыми $\frac{\Delta_m}{4}$.

Следовательно

$$|f^*(z) - P_n(z)| < e^{-\frac{n\Delta m}{8} + \frac{C_1}{\Delta_m}},$$

где C_1 — абсолютная константа.

Теперь предположим, что $\varphi(x)$ такая непрерывная, монотонно убывающая функция, что $\varphi(m) = \Delta_m$.

$$|f^*(z) - P_n(z)| \leqslant e^{-\frac{n\varphi(m)}{8} + \frac{C_1}{\varphi(m)}}$$

А в кругах $|z-a_k| \leqslant r_k$, $(k=m+1,\ m+2, \cdots)$ будем иметь

$$|\beta_k - P_n(z)| < e^{-\frac{n\varphi(m)}{8}+\frac{C_1}{\varphi(m)}} + \beta_{m+1} \quad \text{при} \quad |z-a_k| \leqslant r_k$$

$\psi(x)$ — такая непрерывная, монотонно убывающая функция, что

$$\psi(m) = \beta_m.$$

Следовательно, если потребуем выполнения равенства

$$c^{-\frac{n\varphi(m)}{8}+\frac{C_1}{\varphi(m)}} = \psi(m+1),$$

то получим оптимальную для данного способа оценку, и, если определим из этого уравнения $m^* = \theta(n)$, получим

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant 2\psi[\theta(n)], \text{ когда } |z-a_k| \leqslant r_k \ (k=1, 2, \cdots).$$

Приведем для этих же областей теоремы обратного типа. Из них видно будет, что полученные в прямых теоремах оценки, хотя и не предельно точны, но для частичных конфигураций и функций весьма близки. Более точные оценки нам не удалось получить.

Предположим, мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_1 $\varepsilon(n)$, тогда

$$|\beta_m - P_n(z)| < \varepsilon(n) \text{ при } |z-a_m| < r_m.$$

В этом случае

$$|\beta_m - P_n(z)| < \varepsilon(n)\left(1+\frac{\Delta_m}{r_m}\right)^n, \ |z-a_m| \leqslant r_m + \Delta_m,$$

так как $\beta_m - P_n(z)$ является многочленом n-ого порядка.

Следовательно,

$$\beta_m - \beta_{m+1} \leqslant |\beta_m - P_n(z)| + |\beta_{m+1} - P_n(z)| < \varepsilon(n)\left[1+\left(1+\frac{\Delta_m}{r_m}\right)^n\right]$$

откуда

$$\varepsilon(n) \geqslant \frac{\beta_m - \beta_{m+1}}{1+\left(1+\frac{\Delta_m}{r_m}\right)^n} = \frac{\psi(m) - \psi(m+1)}{1+\left[1+\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}\right]^n},$$

где $h(x)$ — такая непрерывная, монотонно убывающая функция, что $h(m) = r_m$ $(m \geqslant 1)$.

При фиксированном n полученное выражение будет функцией от m. Наибольшее значение этой функции обозначим через $\sigma(n)$.

Если потребуем, чтобы $\sigma(n) = 2\psi[\theta(n)]$ получим меру наилучшего приближения полиномами на данном множестве. Отсюда видно, что полученная оценка является наилучшей для некоторых конфигураций и функций.

Теорема 1*. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_1 не превосходит $\sigma(n)$, где $\sigma(n)$ определено выше.*

Рассмотрим пример:

$$\beta_m = \frac{1}{m^s}, \ \Delta_m = \frac{1}{m^p}, \ r_m = \frac{1}{m^q}, \ p > q.$$

Для данного примера $\theta(n) = \frac{1}{n^{1/2p}}$. Наилучшее приближение полиномами: $\rho_n(E_1) \leqslant \frac{C_1}{n^{s/2p}}$.

С другой стороны

$$\rho_n(E_1) \geqslant \frac{C_2}{n^{\frac{2s-1}{p-q}}}.$$

В случае $s = \frac{2p}{3p+q}$ прямая и обратная теоремы приводят к асимптотически точной оценке наилучшего приближению.

Теперь получим обратную теорему на множестве E_2.

Так как $\beta_m \to 0$ при $m \to \infty$, то $|P_n(z)| < \varepsilon(n)$ на окружности $|z| = 1$, где $\varepsilon(n)$—мера наилучшего приближения полиномами, а $P_n(z)$—полином наилучшего приближения к функции $f(z)$, порядок которого равен n.

При $|z| < 1 + \frac{1}{n}$

$$|P_n(z)| < \varepsilon(n)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \cdot \varepsilon(n).$$

Определим m из следующего условия:

$$R_m < 1 + \frac{1}{n} < R_{m-1}.$$

Имеем

$$\beta_m \leqslant |\beta_m - P_n(z)| + |P_n(z)| < \varepsilon(n)(e+1)$$

откуда

$$\varepsilon(n) \geqslant \frac{\beta_m}{e+1}.$$

Получим следующую теорему:

Теорема 2*. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_2 не превосходит $\frac{\beta_m}{e+1}$, где m определяется из неравенства*

$$R_m < 1 + \frac{1}{n} < R_{m-1}.$$

Для получения наилучшего приближения полиномами на множестве E_3, воспользуемся следующей леммой:

Лемма. *Если $|P_n(x)| < M$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $|P_n(x+i\delta)| < Me^{n\delta}$ для достаточно малых δ.*

Доказательство. Известно, что если $|P_n(x)| < M$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то $|P_n(z)| \leqslant M(a+b)^n$, где z находится на эллипсе, фокусы которого $(-1,0)$ и $(1;0)$, полуоси a и b.

Если возьмем $b = \delta$, $a^2 - b^2 = 1$ $a = \sqrt{1+\delta^2}$ получим

$$(a+b)^n = (\delta + \sqrt{1+\delta^2})^n = e^{n\cdot\ln(\delta+\sqrt{1+\delta^2})} \sim e^{n\delta}.$$

Отсюда следует, что

$$\beta_m - \beta_{m+1} \leqslant \left|\beta_m - P_n\left(b_m + \frac{\Delta_m}{2}\right)\right| + \left|\beta_{m+1} - P_n\left(b_m + \frac{\Delta_m}{2}\right)\right|^2 \leqslant 2\varepsilon(n)\cdot e^{\frac{n\Delta_m}{2}},$$

где $\varepsilon(n)$ — мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_3.

Определим m из уравнения $\varphi(m) = \frac{1}{n}$, $m = \theta(n)$.

Откуда получим

$$\varepsilon(n) > \frac{\psi[\theta(n)] - \psi[\theta(n)+1]}{2}.$$

Получим следующую теорему:

Теорема 3*. *Мера наилучшего приближения полиномами на множестве E_3 не превосходит*

$$\frac{\psi[\theta(n)] - \psi[\theta(n)+1]}{2}.$$

Ереванский государственный университет

Ի. Ի. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Լավագույն մոտավորություններ բազմանդամներով ոչ կապակցված բազմությունների վրա

Քննարկում ենք անվերջ բազմությամբ կոմպոնենտներով բազմությունների վրա բազմանդամներով լավագույն մոտավորության չափը, ընդ որում դիտարկում ենք որոշակի բազմություններ, որոնք իրենցից ներկայացնում են որակական հետաքրքրություն։

Մենք վերցնում ենք՝ ա) հաշվելի թվով շրջաններ, որոնք ունեն 1 կուտակման կետ, բ) շրջանների բազմություն, որոնք դասավորված են ամենուրեք խիստ ինչ-որ շրջանագծի կետերի նկատմամբ, գ) հաշվելի թվով ուղղանկյուններ, որոնք կուտակվում են դեպի մի հատված։

Ցույց է տրվում, որ այդ բազմությունների վրա լավագույն մոտավորության չափը կարող է լինել կամայապես դանդաղ՝ կախված նրանց կոնֆիգուրացիայից և նրանց վրա որոշված ֆունկցիայից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. В. Келдыш*, Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analyt, Матем. сб. 5 (47) стр. 391–402, 1939. [2] *А. Л. Шагинян*, Теория приближений в комплексной области, (стр. 101) (на армянском языке), Ереван, 1960.