

УДК 539.30

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Р. Сароян

Кручение прямоугольного стержня, в соосную круговую полость
 которого впаяна труба из другого материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 21/V 1968)

Задача о кручении призматического стержня квадратного про-
 филя, армированного круговым стержнем, была решена Ю. А. Амен-
 заде ⁽¹⁾.

Поставленная задача решается методом конформного отображе-
 ния. Получены численные значения касательных напряжений и жест-
 костей для прямоугольников с различными соотношениями сторон.

1. Как известно ⁽²⁾, отображение внутренней области много-
 угольника на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$ осуществляется
 функцией Кристоффеля—Шварца

$$z = \omega(\zeta) = A \int_0^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1 - 1} \cdot (a_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \cdot \dots \cdot (a_n - t)^{\alpha_n - 1} \cdot dt + B, \quad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты соответственно для областей
 многоугольника и единичного круга $|\zeta| = 1$; n — число сторон много-
 угольника; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — комплексные координаты точек окружно-
 сти единичного круга, соответствующих вершинам многоугольника;
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольни-
 ка, а A и B — вообще комплексные постоянные, характеризующие по-
 ложение многоугольника и его размеры.

В дальнейшем, следуя ⁽³⁾, будем представлять функцию (1.1) в
 виде

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^k, \quad (1.2)$$

где B_0 — вообще комплексная постоянная, а коэффициенты B_k опреде-
 ляются по рекуррентным соотношениям, полученным в ⁽³⁾:

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[(k-1) B_{k-1} \sum_{s=1}^n \frac{1-\alpha_s}{a_s} + (k-2) B_{k-2} \sum_{s=1}^n \frac{1-\alpha_s}{a_s^2} + \dots + \right. \\ \left. + B_1 \sum_{s=1}^n \frac{1-\alpha_s}{a_s^{k-1}} \right],$$

$$B_1 = 1, k = 2, 3, 4 \dots \quad (1.3)$$

В рассматриваемой задаче производится отображение внутренней области криволинейного прямоугольника на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$. Известно (4), что для отображающей функции (1.2) при малых значениях $\rho < 1$ окружностям на плоскости z будут соответствовать замкнутые кривые на плоскости ζ , близкие к окружности. Поэтому (1.2) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую область, ограниченную извне криволинейным прямоугольником, а изнутри окружностью, на кольцо $\rho_3 < \rho < 1$.

Тогда контуры Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 плоскости z отобразятся соответственно на окружности γ_1 , γ_2 и γ_3 плоскости ζ . Для получения достаточно точного контура Γ_1 прямоугольника в отображающей функции (1.2) взято 50 членов.

Внутренние контуры Γ_2 и Γ_3 независимо от внешнего контура Γ_1 , при малых $\rho_j < 1$ ($j = 2, 3$), близки к окружности с любой заданной точностью, которая возрастает с уменьшением $\rho_j < 1$ ($j = 2, 3$).

Так как в данной задаче производится отображение внутренней области прямоугольника, то в качестве исходных данных в (1.3) примем

$$\begin{aligned} n &= 4; \\ a_1 &= e^{i\varphi}, a_2 = -e^{-i\varphi}, a_3 = -e^{i\varphi}, a_4 = e^{-i\varphi}; \\ a_1 &= a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Задавая значения параметру φ и вычисляя по (1.3) с учетом (1.4) коэффициенты B_k , получаем прямоугольники с разными отношениями сторон. В табл. 1 приведены значения отношения сторон прямоугольника в зависимости от параметра φ .

Таблица 1				
φ	0,25 π	0,38 π	0,442 π	0,473 π
h/b	1,0	1,5	2,0	2,5

2. Задача свободного кручения составных призматических стержней, состоящих из двух впаянных друг в друга брусьев при наличии полости, сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 \Psi_j = -2 \quad (j = 1, 2) \quad (\nabla^2 - \text{оператор Лапласа}) \quad (2.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{на } \gamma_1 (\rho = \rho_1 = 1) \quad \Psi_1 &= 0, \\ \text{на } \gamma_2 (\rho = \rho_2) \quad \mu_1 \Psi_1 &= \mu_2 \Psi_2 \text{ и } Re \Phi_1 = Re \Phi_2, \\ \text{на } \gamma_3 (\rho = \rho_3) \quad \Psi_2 &= C. \end{aligned} \quad (2.2)$$

C — постоянная, подлежащая определению.

Входящая в (2.1) $\Psi_j(x, y)$ — функция напряжений. Индекс $j=1$ имеет место для области сечения, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_1), а индекс $j=2$ для области сечения, ограниченной контурами Γ_2 и Γ_3 (соответствующий модуль сдвига μ_2).

Представим функцию напряжений $\Psi(x, y)$ в комплексном виде:

$$\Psi_j(x, y) = -\frac{i}{2} \left[\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - iz \cdot \bar{z} \right], \quad (2.3)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Функция

$$\Phi_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\psi_j(x, y) \quad (2.4)$$

есть комплексный потенциал кручения, причем $\varphi_j(x, y)$ — функция кручения, а $\psi_j(x, y)$ — функция, комплексно сопряженная с $\varphi_j(x, y)$.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^N B_k \zeta^k, \quad (2.5)$$

составленная из первых N членов разложения (1.2), реализует отображение внутренней области криволинейного прямоугольника на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$. Подставляя (2.5) в (2.3), получим:

$$\Psi_j = -\frac{i}{2} \left[\Phi_j(\zeta) - \overline{\Phi_j(\zeta)} - i\omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)} \right]. \quad (2.6)$$

Функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$, регулярные соответственно в кольцах $\rho_2 \leq \rho \leq 1$ и $\rho_3 \leq \rho \leq \rho_2$, будем искать в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n, \quad (2.7)$$

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \zeta^n. \quad (2.8)$$

Фигурирующие в (2.7) и (2.8) коэффициенты a_n и b_n — чисто мнимые.

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)}$, входящее в (2.5), на линиях $\rho = \text{const}$, разложим в ряде Фурье;

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \cdot \overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta). \quad (2.9)$$

Вследствие симметрии поперечного сечения рассматриваемого стержня относительно оси x , коэффициенты B_k — в разложении (2.5) будут действительными. Поэтому коэффициенты ряда Фурье (2.9) будут иметь следующие значения:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} B_0^2 \sum_{k=1}^N B_k^2 \rho^{2k},$$

$$\alpha_n = B_0^2 \sum_{k=1}^{N-n} B_k B_{k+n} \rho^{2k+n}, \quad \beta_n = 0. \quad (2.10)$$

Таблица 2

h/b	$K/\mu_1 B_0^4$
1,0	0,80625
1,5	1,01653
2,0	1,43054
2,5	1,95718

Таблица 3

h/b	B_0/b
1,0	0,761493
1,5	0,871564
2,0	0,899630
2,5	0,914062

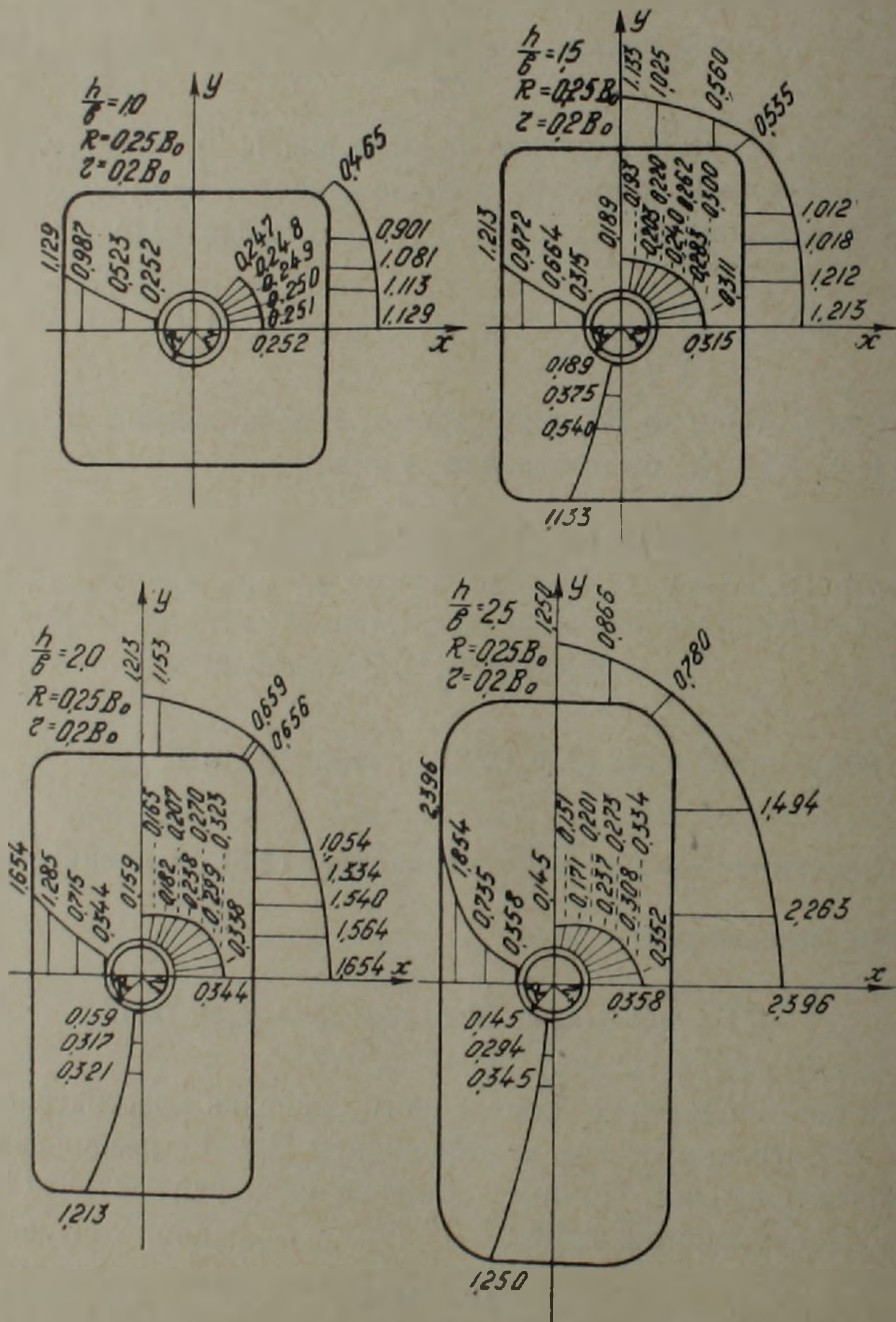


Рис. 1.

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты a_0 и a_n будут снабжены сверху индексом 1, при $\rho = \rho_2$ — индексом 2, а при $\rho = \rho_3$ — индексом 3.

Удовлетворяя граничные условия (2.2), определяем коэффициенты a_n и b_n , фигурирующие в (2.7) и (2.8):

$$a_n = \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} + \rho_2^{2n})(\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(2)}\rho_2^n) + (\alpha_n^{(1)} - \alpha_n^{(3)}\rho_3^n) \cdot 2\mu_2\rho_2^{2n}}{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} - \rho_2^{4n}) + (\mu_1 + \mu_2)(1 - \rho_3^{2n})\rho_2^{2n}},$$

$$a_{-n} = \alpha_n^{(1)} - a_n,$$

$$b_n = \frac{\alpha_n^{(3)}\rho_3^n[(\mu_1 - \mu_2) - (\mu_1 + \mu_2)\rho_2^{2n}] + 2\mu_1\rho_2^{2n}\alpha_n^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)(1 + \rho_2^{2n})\alpha_n^{(2)}\rho_2^n}{(\mu_1 - \mu_2)(\rho_3^{2n} - \rho_2^{4n}) + (\mu_1 + \mu_2)(1 - \rho_2^{2n})\rho_2^{2n}},$$

$$b_{-n} = \alpha_n^{(3)}\rho_3^n - b_n\rho_3^{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N; \quad N = 50,$$

$$a_0 = i\alpha_0^{(1)}; \quad b_0 = i \frac{\mu_1\alpha_0^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)\alpha_0^{(2)}}{\mu_2};$$

$$C = i \frac{\mu_1\alpha_0^{(1)} - (\mu_1 - \mu_2)\alpha_0^{(2)}}{\mu_2} - \alpha_0^{(3)}. \quad (2.11)$$

3. Крутящий момент, приложенный к основанию стержня, равен

$$M = \tau \cdot K, \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении,

Как известно (5),

$$K = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\mu_j}{8i} \int_{\gamma_j} \overline{\omega(\sigma)^2} \omega(\sigma) d\omega(\sigma) - \frac{\mu_j}{8i} \int_{\gamma_j} \omega(\sigma)^2 \overline{\omega(\sigma)} d\omega(\sigma) - \right. \quad (3.2)$$

$$\left. - \frac{\mu_j}{4} \int_{\gamma_j} [\Phi_j(\sigma) + \overline{\Phi_j(\sigma)}] d\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)} \right\},$$

где σ — граничное значение переменной ζ ($\sigma \cdot \overline{\sigma} = \rho_j^2$, $j = 1, 2, 3$).

Согласно (5), касательные напряжения при кручении определяются по формуле:

$$T_\rho^{(j)} - i T_\theta^{(j)} = \frac{\mu_j \tau \zeta}{\rho_j |\omega'(\zeta)| \rho_j} |\Phi_j'(\zeta) - i \overline{\omega(\zeta)} \cdot \omega'(\zeta)|. \quad (3.3)$$

Рассмотрим численный пример. Примем $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 8$, $\rho_2 = 0,25$, $\rho_3 = 0,2$.

Радиусам ρ_2 и ρ_3 на плоскости ζ соответствуют радиусы R и r на плоскости z , значения которых указаны на рис. 1. Значения жесткостей приведены в табл. 2.

Эпюры касательных напряжений T_θ на внешнем контуре поперечного сечения, на границе спая двух материалов и осях симметрии в долях $\mu_1 \tau B_0$ приведены на рис. 1.

Принимая сторону прямоугольника, параллельную оси x за b , можно вычислить значения коэффициента B_0 для прямоугольников с разными отношениями сторон. Результаты вычислений сведены в табл. 3.

Ուղղանկյուն լայնական կտրվածքով ձողի ոլորումը, որի
համառանցք շրջանային խոռոչում զոդված է ուրիշ նյութից
պատրաստած խողովակ

Աշխատության մեջ դիտարկված է պրիզմատիկ ձողի ոլորումը: Ձողի համառանցք շրջանային խոռոչի մակերևույթով զոդված է ուրիշ նյութից պատրաստած խողովակ:

Ձողի լայնական կտրվածքը իրենից ներկայացնում է մի տիրույթ, որը արտաքինից սալ-մանափակված է կորագիծ ուղղանկյունով, իսկ ներսից՝ շրջանագծին բավականաչափ մոտ կորով:

Դիտարկվող խնդիրը լուծվում է կոնֆորմ արտապատկերումների մեթոդով:

Ուղղանկյան կողմերի տարբեր հարաբերությունների համար ստացված են շոշափող լարումների և կոշտությունների թվային արժեքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Վ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ Ю. А. Амензаде, „Известия АН АзербССР“, серия физ.-тех. и хим. наук. 35—53, № 2 (1958). ² Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехтеориздат, М.—Л., 1952. ³ О. М. Сапонджян, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 9 (1956). ⁴ Л. К. Капанян, Диссертация, Ереван, 1953. ⁵ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М., 1954.