

УДК 539.50

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Б. Багдасарян

О распространении упругих волн в полуограниченном разномодульном упругом стержне

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 17/IV 1968)

Некоторые материалы при сжатии и растяжении обнаруживают разные модели упругости.

Вопросы теории деформации разномодульных материалов и решение конкретных задач рассмотрены в работах (1-3).

Здесь рассматривается задача о вынужденных колебаниях полуограниченного разномодульного упругого стержня.

Пусть на конце полуограниченного разномодульного упругого стержня действует продольная знакопеременная сила. Под воздействием такой силы по стержню будут распространяться упругие волны, меняющие напряженное состояние стержня (при наличии упругих волн часть стержня может оказаться растянутой, часть — сжатой, а часть — находится в ненапряженном состоянии).

Общие решения волновых уравнений для областей сжатия и растяжения соответственно имеют вид

$$u_c = f_1(c^+t - x) + f_2(c^+t + x),$$

$$u_p = \varphi_1(c^-t - x) + \varphi_2(c^-t + x), \quad c^+ = \sqrt{\frac{E^+}{\rho}}, \quad c^- = \sqrt{\frac{E^-}{\rho}}, \quad (1)$$

где u_c , u_p — смещения в областях сжатия и растяжения, c^+ , c^- — скорости звука в областях сжатия и растяжения, E^+ , E^- — модули Юнга в областях сжатия и растяжения, ρ — плотность, x — расстояние, t — время, f_1 , f_2 , φ_1 , φ_2 — произвольные функции.

При решении конкретных задач возможны две схемы распространения волн:

1) характеристики областей сжатия и растяжения не пересекаются;

2) характеристики областей сжатия и растяжения пересекаются.

В первой схеме решение задачи нужно искать в виде расходящейся волны, поэтому неизвестные функции будут только $f_1(c^+t - x)$ и $\varphi_1(c^-t - x)$, которые должны быть найдены из граничных условий.

Первую схему получим, если в начале ($0 \leq t \leq t_1$) действующая сила сжимающая $-P_1(t)$, затем ($t_1 \leq t \leq t_2$) — растягивающая $-P_2(t)$, а при $t > t_2$ пусть действующая сила $P(t) = 0$, и $c^+ > c^-$. Граничными условиями являются

$$\left. \frac{\partial u_c}{\partial x} \right|_{x=0, 0 \leq t \leq t_1} = -\frac{P_1(t)}{E^+}, \quad \left. \frac{\partial u_p}{\partial x} \right|_{x=0, t_1 \leq t \leq t_2} = \frac{P_2(t)}{E^-}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0, t > t_2} = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) с учетом начального условия $u(x, 0) = 0$, получим следующее решение первой схемы:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < x/c^+, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int_0^{c^+t-x} P_1(\tau) d\tau, & x/c^+ \leq t \leq t_1 + x/c^+, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int_0^{c^+t_1} P_1(\tau) d\tau, & t_1 + x/c^+ < t < t_1 + x/c^-, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int_0^{c^+t_1} P_1(\tau) d\tau - \frac{1}{E^-} \cdot \int_{c^-t_1}^{c^-t-x} P_2(\tau) d\tau, & t_1 + x/c^- \leq t \leq t_2 + x/c^-, \\ \frac{1}{E^+} \cdot \int_0^{c^+t_1} P_1(\tau) d\tau - \frac{1}{E^-} \int_{c^-t_1}^{c^-t_2} P_2(\tau) d\tau, & t > t_2 + x/c^-. \end{cases} \quad (3)$$

Схема распространения волн для второго случая приведена на рис. 1, где кривая $x = x_*(t)$ показывает закон распространения гра-

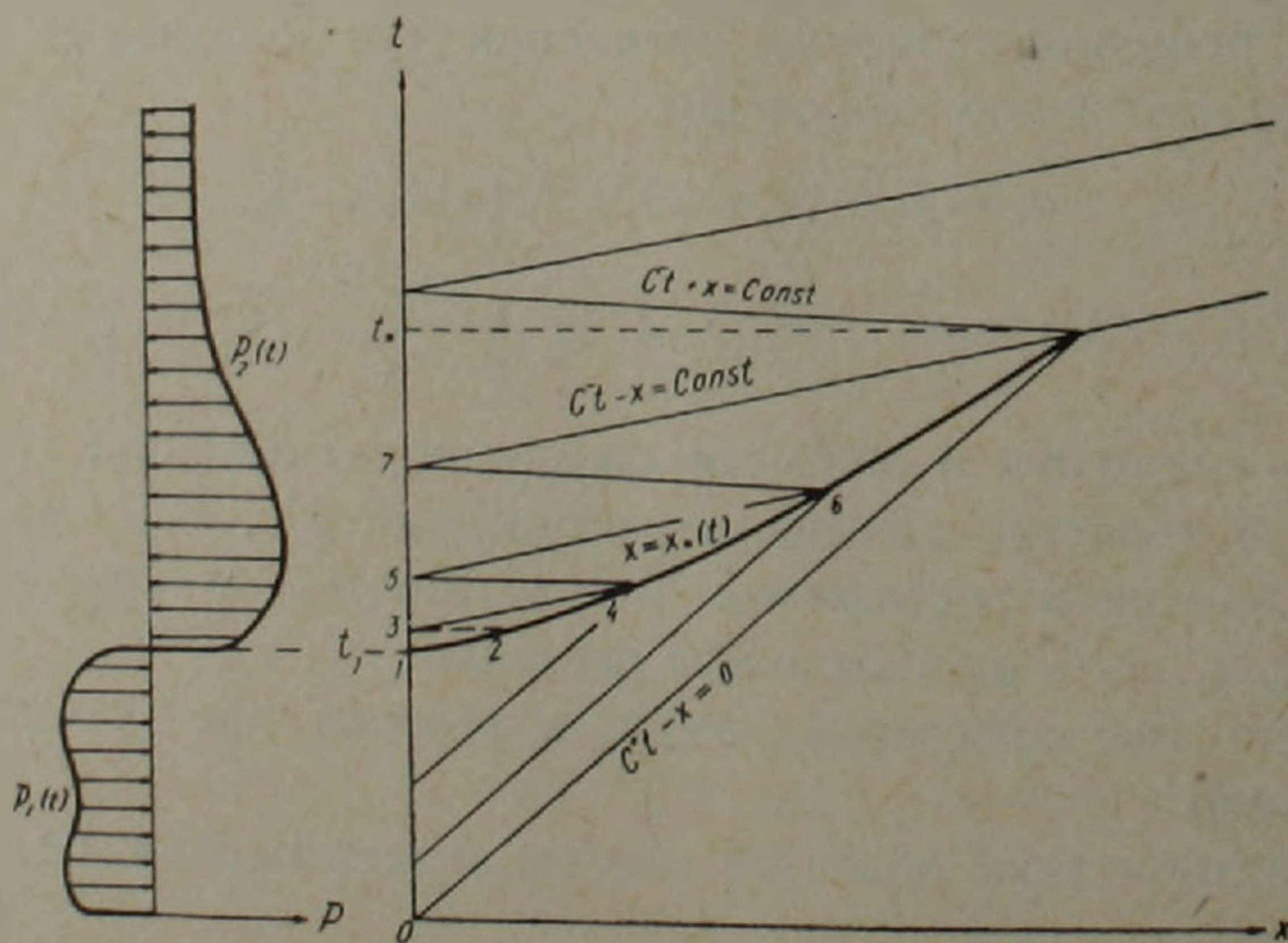


Рис. 1.

ницы между областями сжатия и растяжения, наклонные линии — характеристики в разных областях, а $P_1(t)$ и $P_2(t)$ — законы изменения действующей силы на конце стержня.

Распространение волн развивается следующими стадиями:

1) упругая волна сжатия распространяется по невозмущенному стержню ($x/c^+ \leq t \leq t_1 + x/c^+$);

2) в момент $t = t_1$, когда на конце стержня действующая сила меняет знак, по сжатой зоне распространяется ударная волна разряжения $x = x_*(t)$; за фронтом $x = x_*(t)$ — область растяжения стержня;

3) в момент $t = t_*$, когда ударный фронт $x = x_*(t)$ достигает характеристики $c^+ t - x = 0$, в стержне остается только область растяжения; распространение упругих волн продолжается.

Решение первой стадии дается формулами (3). Во второй стадии неизвестными функциями являются $\varphi_1(c^- t - x)$, $\varphi_2(c^- t + x)$, $x_*(t)$, а функция $f_1(c^+ t - x)$ известна из решения первой стадии (3). Эти функции должны быть найдены из условия на конце стержня (второе условие из (2)) и условий на фронте $x = x_*(t)$. Условия на $x = x_*(t)$ являются обычными условиями сильного разрыва, т. е. условие сохранения массы (которое при описании лагранжевыми координатами совпадает с условием непрерывности смещения) и условие непрерывности импульса:

$$u_c = u_p, \quad -\sigma_c + \sigma_p = \rho \dot{x}_*(t) \cdot (v_c - v_p). \quad (4)$$

Из (1), (2) и (4) получим следующую систему функционально-дифференциальных уравнений для определения искомых функций во второй стадии

$$E^- [\dot{\varphi}_2(\xi^0) - \dot{\varphi}_1(\xi^0)] = P_2(t),$$

$$(c^+)^2 \cdot P_1(t) + [\dot{\varphi}_2(\eta) - \dot{\varphi}_1(\xi)] E^+ \cdot (c^+)^2 = E^+ c^- \dot{x}_*(t) [\dot{\varphi}_1(\xi) + \dot{\varphi}_2(\eta)] - \\ - \dot{x}_*(t) c^+ \cdot P_1(t), \quad \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta) = \frac{1}{E^+} \int_0^\zeta P_1(\zeta) d\zeta,$$

$$\xi^0 = c^- t, \quad \xi = c^- t - x_*(t), \quad \eta = c^- t + x_*(t), \quad \zeta = c^+ t - x_*(t).$$

В системе (5) одна из неизвестных функций $x_*(t)$ входит в аргументы других и это осложняет процедуру ее решения. Если однако, решение системы (5) известно в малой окрестности точки $t = t_1$, $x_* = 0$, то решение можно построить.

Решение в окрестности точки $t = t_1$, $x_* = 0$, можно построить, разлагая все искомые функции в ряды и подставив их в систему (5), которая тем самым сводится к совокупности алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений. Минимальное число коэффициентов разложений можно найти прямо из системы (5), не пользуясь фактической подстановкой рядов. В формуле для смещений (1) фигурирует сумма $\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\eta)$, поэтому одну из этих величин $\varphi_1(\xi_0)$, $\varphi_2(\eta_0)$ можно задавать произвольно (положить, например $\varphi_2(\eta_0) = 0$). Из системы (5), при $t = t_1$, $x_* = 0$, будем иметь

$$\xi = \xi_0 = c^- \cdot t_1, \quad \eta = \eta_0 = c^- t_1, \quad \zeta = \zeta_0 = c^+ t_1, \quad x_*(t_1) = 0,$$

$$\varphi_1(\xi_0) = \frac{1}{E^+} \int_0^{\zeta_0} P_1(\tau) d\tau, \quad \varphi_2(\eta_0) = 0,$$

$$\dot{x}_*(t_1) = \frac{P_1(t_1) c^+ E^-}{2 [P_1(t_1) \cdot E^- - P_2(t_1) \cdot E^+]} +$$

$$+ \frac{\{P_1^2(t_1) \cdot (c^+)^2 E^- + 4E^- [P_1(t_1) \cdot E^- - P_2(t_1) E^+][P_1(t_1) - P_2(t_1)]\}^{1/2}}{2 [P_1(t_1) E^- - P_2(t_1) E^+]}, \quad (6)$$

$$\varphi'_1(\xi_0) = \frac{1}{2} \left[A - \frac{P_2(t_1)}{E^-} \right], \quad \varphi'_2(\eta_0) = \frac{1}{2} \left[A + \frac{P_2(t_1)}{E^-} \right],$$

$$A \equiv \frac{P_1(t_1)}{2E^+} \cdot \frac{c^+}{c^-} - \frac{c^+}{2c^- E^+} \left\{ P_1^2(t_1) + 4E^+ [P_1(t_1) + P_2(t_1)] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{P_1(t_1)}{E^+} - \frac{P_2(t_1)}{E^-} \right] \right\}^{1/2}.$$

Производные более высоких порядков можно определить, если продифференцировать уравнения системы (5) и подставить $t = t_1$, $x_* = 0$.

Надобности определения производных высоких порядков нет, так как задачу нужно решать численно.

Построение решение системы (5) поясним при помощи графической схемы (рис. 1). Пусть описанным выше способом построено решение в малом треугольнике 123, где 1—2—начальный участок кривой $x = x_*(t)$, а $t_3 - t_1$ —достаточно малая величина. Проводим из точки 3 характеристику $\xi = c^- t - x = c^- \cdot t_3$. Она пересечет кривую $x = x_*(t)$ в некоторой точке 4. Так как решение в треугольнике 123 известно, функция $\varphi_1(\xi)$ будет известна в интервале $c^- t_1 \leq \xi \leq c^- t_3$. Во втором и в третьем уравнениях системы (5) функция $\varphi_1(\xi)$ таким образом известна, неизвестны только $\varphi_2(\eta)$ и $x_*(t)$. Рассматривая их как функции от аргумента $\xi = c^- t - x_*(t)$, с учетом формулы перехода

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{d}{d\xi} \cdot \left[2c^- \cdot \frac{dt}{d\xi} - 1 \right]^{-1}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dt}{d\xi} \right)^{-1}, \quad (7)$$

второе и третье уравнение системы (5) сводится к следующему:

$$P_1(\xi) + E^- \left[\frac{\psi'(\xi)}{2c^- t'(\xi) - 1} - \varphi_1(\xi) \right] = \frac{1 - c^- t'(\xi)}{c^+ t'(\xi)} \cdot \left\{ \frac{E^+ c^-}{c^+} \left[\varphi'_1(\xi) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\psi'(\xi)}{2c^- t'(\xi) - 1} \right] - 1 \right\}, \quad \varphi_1(\xi) + \psi(\xi) = \frac{1}{E^+} \int_0^\xi P_1(\zeta) d\zeta, \quad (8)$$

где $\psi(\xi) = \varphi_2(\eta)$, $\frac{\psi'(\xi)}{2c^- t'(\xi) - 1} = \varphi'_2(\eta)$, а функции $\varphi_1(\xi)$, $\varphi'_1(\xi)$ — известны. Необходимые начальные данные в точке 2 можно получить из асимптотических решений (6). Таким образом, в интервале $c^- t_1 \leq \xi \leq c^- t_3$ задача сводится к задаче Коши для системы (8) для определения $\psi(\xi)$ и $t(\xi)$. Проводим теперь из точки 4 характеристику $\eta = c^- t + x = c^- t_4 + x_*(t_4)$. Она пересечет прямую $x = 0$ в точке 5. В интервале 3—5 функция $\varphi_2(\eta)$ известна, так как она известна на линии 124. В области 3245 интегрируется первое уравнение системы

(5), где $\varphi_1(\xi^-)$ — известная функция. Здесь опять ставится задача Коши, начальные данные которой берутся в точке 3. Решая эту задачу, определим $\varphi_1(\xi)$ в интервале $c-t_3 \leq \xi \leq c-t_5$. Затем проводим через точку 5 характеристику $\xi = c-t-x = c-t_5$, которая пересечет кривую $x = x_*(t)$ в следующей точке 6. Задача определения функции $\varphi_2(\eta)$, $x_*(t)$ для отрезка 4—6 будет совпадать с предыдущей, так как эти функции определяются при помощи системы (8), но с новыми начальными условиями, определяемыми в точке 4 и для нового интервала изменения независимой переменной, примыкающей к предыдущему. Решив эту задачу, перейдем опять на прямую $x=0$. Эту процедуру продолжим до момента $t=t_*$, когда фронт $x=x_*(t)$ догонит характеристику $c+t-x=0$. После этого момента возникнет третья стадия и решение совпадает с решением (3) для растянутой области с учетом моментов $t > t_* - x_*(t_*)/c^-$.

Для конкретных нагрузок, решение задачи можно построить при помощи комбинации решений первой и второй схемы распространения упругих волн.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ա. Բ. ԲԱՂՅԱՆԱՐՅԱՆ

Առաձգական ալիքների տարածումը կիսասահմանափակ տարածողով ձողում

Կիսասահմանափակ տարածողով առաձգական ձողի ծայրում կիրառված է նշանափոխ ուժ: Ննդրի լուծումը ներկայացված է հրկու սխեմաների կոմբինացիայով: Առաջինի լուծումը բերված է (3)-ում, իսկ երկրորդինը (զծ. 1)¹ որոշվում է (5) ֆունկցիոնալ-դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմայով: (5) սխեման բերված է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հոշու խնդիրների հաջորդականությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ե Ր Ա Շ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ Ո Ւ Ն

- ¹ С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, Основные уравнения теории упругости для материалов разнсопротивляющихся растяжению и сжатию, Инж. ж. МТТ, № 2, 1966. ² С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян, К разномодульной теории упругости, Инж. ж. МТТ, № 6, 1966. ³ А. А. Хачатрян, О продольных колебаниях призматических стержней, изготовленных из разномодульного материала, Инж. ж. МТТ, № 5, 1967.