ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

УДК 533.6

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Определение волновой области в одномерной задаче и вблизи особой линии

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 22/V 1968)

Рассматривается задача о движении вязкой сжимаемой жидкости.

В предположении малости движения для одномерной задачи вблизи фронта звуковой волны можно записать упрощенные уравнения коротких волн. Если x обозначает координату, t — время, a_0 — начальную скорость звука, v_x — скорость частиц, в координатах $\tau = t - \frac{x}{a_0}$, t уравнения движения запишутся

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\nu}{3a_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \tag{1}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости, $v = \frac{v_x}{a_0}$, α — постоянная, даваемая уравнением состояния, причем [1] для политропного уравнения состояния с показателем n, $\alpha = \frac{n+1}{2}$. В случае цилиндрической и сферической симметрии в левой части (1) добавятся слагаемые $\frac{v}{2t}$ и $\frac{v}{t}$ соответственно. Уравнение (1) имеет семейство решений:

$$v = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\xi),\ f'' + f'\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{2\nu}{3a_0^2}}} f\right) + \frac{1}{2} f = 0,\ \xi = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2\nu}{3a_0^2} t}}. \tag{2}$$

В случае цилиндрической и сферической симметрии в левой части уравнения для f прибавляется слагаемое $-\frac{1}{2} f$ и $-f$ соответственно. Поскольку в задачах с цилиндрической и сферической симметрией, если исключить специальные граничные условия, затухание ударной волны более сильное, чем $\frac{1}{\sqrt{t}}$ [1], в дальнейшем рассматривается одномерная задача, в которой с учетом нелинейности и вязкости затухание имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{t}}$ [1].

Если перейти в уравнении (1) к координатам τ, x оно примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha}{a_0} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{2\nu}{3a_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}. \tag{3}$$

В дальнейшем $\frac{\alpha}{a_0}$ обозначается через α.

Заменой искомой функции [1]

$$v = \frac{4\nu}{3a_0^3 \alpha} \frac{\frac{\partial U}{\partial \tau}}{U} \tag{4}$$

уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad k = \frac{2\nu}{3a_0^3}. \tag{5}$$

Для больших t и x решение ищется в волновой области $\tau \approx \sqrt{kx}$, поэтому область изменения по τ может быть взята в пределах $(-\infty, \infty)$. При $x = 0$ имеет место граничное условие для $v(x, t)$, $v(0, t)$.

Пусть граничная функция $v(0, t)$ равна нулю при $t < 0$ и $t > t_1$ и интеграл $\int_0^{t_1} v(0, t)\, dt$ конечен, как это обычно предполагается в теории затухания ударных волн.

Для функции U можно получить граничное условие

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & -\infty \leqslant t \leqslant 0 \\ e^{\int_0^t \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt} & 0 < t \leqslant t_1. \\ e^{\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt} & t > t_1 \end{cases} \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6) дается интегралом

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} U(0, t)\, e^{-\frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt \tag{7}$$

или

$$U(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt + \frac{1}{2\sqrt{k\pi x}} \int_{0}^{t_1} e^{\int_0^t \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt - \frac{(\tau - t)^2}{4kx}}\, dt + \tag{8}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{k\pi x}}\int\limits_{t_1}^{\infty} e^{\int\limits_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt-\frac{(\tau-t)^2}{4kx}}\,dt.$$

Произведя в первом и последнем слагаемых в правой части (8) в интегралах по t замену переменной $\tau - t = \zeta$, по (4) можно найти, учитывая еще, что во втором слагаемом в правой части (8) в экспоненте можно пренебречь t по сравнению с $\tau \approx \sqrt{kx}$,

$$v(x,\,\tau) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{kx}}\frac{2k}{\alpha}\times$$

$$\times\frac{-1+e^{\int\limits_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}-\frac{\xi}{2\sqrt{\pi\,2kx}}\int\limits_0^{t_1}e^{\int\limits_0^{t}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}\,dt}{\int\limits_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi-e^{\int\limits_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}\int\limits_{\xi}^{-\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{kx}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4}t_1}\int\limits_0^{t_1}e^{\int\limits_0^{t}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}\,dt},\tag{9}$$

где введено обозначение $\xi = \frac{\tau}{\sqrt{kx}}$. Для больших kx (9) упрощается

$$v(x,\,\tau) = \frac{c\,e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{kx}}\frac{2k}{\alpha}\,\frac{-1+e^{\int\limits_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}}{-\int\limits_{\infty}^{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi-e^{\int\limits_0^{t_1}\frac{\alpha}{2k}v(0,\,t)\,dt}\int\limits_{\xi}^{-\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi}\,.\tag{10}$$

Выражение (10) можно получить также, разыскивая предельный режим, на который выходит решение задачи (5), (6), в виде решений вида (2). Сходная по методам процедура получения решений в разных областях и их соединения дана в ([2]). Если искать решение (5) в виде $U = f(\xi)$, $\xi = \frac{\tau}{\sqrt{2kx}}$ для f получится уравнение

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' = 0,\tag{11}$$

имеющее решение $f = C\int\limits_{\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\,d\xi + B$,

$$v = \frac{2k}{\alpha}\,\frac{Ce^{-\frac{1}{4}\xi^2}}{C\int\limits_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\,d\xi+B}\,\frac{1}{\sqrt{xk}}.\tag{12}$$

Сравнивая (12) с (10) можно найти значения C и B в виде $B = 2\sqrt{\pi}$, $C = -1 + e^{\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\,dt}$. Таким образом найдено решение, на которое выходит для больших моментов времени в прифронтовой области, решение задачи затухания возмущения в вязкой жидкости под действием движущегося поршня. Если считать

$$\int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\,dt$$

малым, решение упрощается:

$$v = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{kx}} \frac{\int_0^{t_1} v(0, t)\,dt}{2\sqrt{\pi}}.$$

Указанное решение, при котором нелинейность весьма мала, дает линейный закон затухания скорости частиц.

Если полагать в граничном условии $v(0, t) = V$, где V — постоянная в решении невязкой задачи не будет нелинейного затухания, и для больших моментов времени затухание дается линейным решением для вязкой жидкости.

Если в одномерном решении полагать $\tau \approx \sqrt{kt}$ и обозначить через параметр, характеризующий малость движения, линейное вязкое решение имеет порядок $v \approx \frac{1}{\sqrt{kt}} \gamma e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, а нелинейное решение для идеальной жидкости ([1]) $v \approx \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{t}}$. Из двух решений то является верным, которое дает более высокий порядок затухания, поскольку при подстановке в уравнение ошибка будет малой высокого порядка. При одновременном учете эффектов вязкости и нелинейности, $\gamma \approx \frac{\nu}{a_0^2 t_1}$, причем последнее равенство может выполниться лишь для очень вязких жидкостей и коротких импульсов. Например, для воды $t_1 = 0{,}000001$ *сек* получается $\gamma = 0{,}000001$, то есть нужно для реальных γ пользоваться нелинейной теорией для идеальной жидкости.

В случае сферической симметрии для нелинейной идеальной задачи $v \approx \frac{\sqrt{\gamma}}{t\sqrt{\ln t}}$, для вязкой линейной задачи $v \approx \frac{C}{\nu t^2} \xi e^{\frac{\xi^2}{4}}$, причем указанное выражение v удовлетворяет (1) без нелинейного слагаемого, но с учетом $\frac{v}{t}$, C — постоянная, пропорциональная γ, $C \approx \gamma$. Условие существенности эффектов вязкости и нелинейности $\frac{\sqrt{\gamma}}{\nu t} \approx \sqrt{\ln t}$. Для крайнего случая $\gamma \ll \nu^2$, необходимо учитывать только вязкость, в остальных случаях вначале существенна только нелинейность, затем оба эффекта, и для весьма больших t — только вязкость. Если $\tau \gg \sqrt{kt}$ вязкость в уравнении (1) можно не учитывать, если $\tau \ll \sqrt{kt}$ можно отбросить нелинейное выражение в ([1]), и решение дается в условиях линейной задачи. Более точные условия пренебрежения вязкостью $\nu t \ln t \ll \gamma$, а нелинейностью $(\nu t)^{\frac{3}{2}} \gg \gamma$. Решение для сферической нелинейной задачи в идеальной жидкости имеет вид ([1])

$$v = \frac{F(y_1)}{r}, \quad \tau = t - \frac{r}{a_0}, \quad \tau = -\alpha F(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + y_1 \quad \alpha = \frac{k+1}{2}$$

или, учитывая, что на больших расстояниях $y_1 \approx y_0$, $y_0 = \mathrm{const}$, $v = \dfrac{y_0 - \tau}{r\alpha \ln \frac{r}{a_0 y_0}}$. Следуя методу, применяемому в нелинейной акустике, можно искать стационарные решения уравнения $\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \alpha v \frac{\partial v}{\partial r} = k \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. В переменных $U = vr$, $x = \ln r$, указанное уравнение $\frac{\partial U}{\partial x} - \alpha U \frac{\partial U}{\partial \tau} = k e^x \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$ в предположении стационарности запишется $-\alpha U \frac{\partial U}{\partial \tau} = k e^x \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$, и имеет решение $U = U_0 \operatorname{th} \frac{\alpha U_0 \tau}{2ke^x}$. Тогда решение исходного уравнения для v можно искать в виде

$$v = \frac{1}{r\alpha \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \left(-\tau + y_0 \operatorname{th} \frac{C\tau}{\ln \frac{r}{a_0 y_0}} \frac{1}{r} \right)^*, \qquad C = \frac{y_0}{2k}.$$

Подставляя это решение в указанное соотношение, можно убедиться, что в нем слагаемые порядка $\dfrac{y_0^2 c}{\alpha r^3 \ln^3 \frac{r}{a_0 y_0}}$ взаимно сократятся, и останутся выражения, содержащие $\dfrac{\tau y_0 c}{kr^3 \ln^2 \frac{r}{a_0 y_0}}$. В предположении $\tau \ll \dfrac{y_0}{\alpha \ln \frac{r}{a_0 y_0}}$, $\tau \ll \sqrt{\kappa r}$, где $\tau \approx \dfrac{2kr \ln \frac{r}{a_0 y_0}}{y_0}$ или $kr \ll \dfrac{y_0^2}{2\alpha \ln^2 \frac{r}{a_0 y_0}}$ указанное квазистационарное решение имеет место.

* Если положить $\ln \frac{r}{a_0 y_0} = 1$ полученное решение точно удовлетворит одномерному уравнению.

Если в (11), умноженном на 2, заменить $\tau = -R_1$, и предполагать граничное условие импульсным, полагая $Re = \int_0^{t_1} \frac{\alpha}{2k} v(0, t)\, dt$, можно получить решение в виде $U = e^{Re} + 1 - (e^{Re} - 1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R_1}{2\sqrt{kx}}} e^{-u^2} du$, указанным Лайтхиллом и Хейзом, причем это окончательное решение приведено в обзоре Хейза в Основах газовой динамики.

В задаче о прохождении ударной волны вблизи особой линии, если выбрать ось Ox по касательной, а ось Oy направить по нормали в сторону вогнутости этой линии, уравнения движения в порядке 1, $\gamma^{\frac{2}{5}}$ запишутся $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y} + 2\left(\frac{y}{R} + \alpha \frac{v_x}{a_1}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, где $\frac{1}{R}$ — разность кривизн особой линии и луча в месте их касания, a_1 — скорость звука на линии. Если ввести потенциал φ, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и сделать преобразования $v_{x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $v_{y_1} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\psi = \frac{\alpha}{a_1} R\varphi + xy$, $\Phi + \psi = xv_{x_1} + yv_{y_1}$, $x = \frac{\partial \Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y = \frac{\partial \Phi}{\partial d_{y_1}}$, то для Φ получится уравнение Трикоми $v_{x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{y_1}^2} + \frac{R}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_{x_1}^2} = 0$, решение которого, переходящее вдали от линии $v_{x_1} = 0$, в линейное $\varphi = \varphi_0(x, y)$ можно записать в виде $\Phi = -\frac{\alpha}{a_1} R\varphi_0(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1} v_{y_1} + C_{3,1} v_{x_1} + C_{4,2}$, где постоянные имеют порядки $\gamma^{\frac{6}{5}}$ и γ^2. Потенциал $\varphi_0(x, y)$ дается линейным решением, причем впереди падающей волны

$$\varphi_0 = \frac{A}{2}\Phi_k,\ \Phi_k = \theta^{2k}\left(1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+\frac{1}{6}} F\left(k + \frac{1}{6},\ k + \frac{2}{3},\ 2k + \frac{7}{6},\ 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),\ \theta = x,\ \eta = -\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} y,\ k = \frac{5}{12}.$$

Приведенное решение, после продолжения к параболической линии $v_{x_1} = 0$ при $v_{y_1} = 0$ дает особенность для скорости $v_x = \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_{y_1}}$. Для устранения особенности можно записать решение в виде

$$\Phi = -\frac{\alpha}{a_1} R\varphi_0(v_{y_1}, v_{x_1}) + v_{x_1} v_{y_1} + C_{3,1} v_{x_1} + C_{4,2},\ \varphi_0(x, y) = \frac{A}{2} \frac{\Phi_k(\theta + b, \eta) - \Phi_k(\theta, \eta)}{b2\left(2k + \frac{1}{6}\right)},\ k = \frac{11}{12},$$

где $b \approx \gamma^{\frac{6}{5}}$ постоянная. При конечных θ и η, можно b считать малым и в пределе, используя, что $\left.\dfrac{\partial\Phi_k(\theta+b,\eta)}{\partial b}\right|_{b=0} = 2\left(2k+\dfrac{1}{6}\right)\Phi_{k-\frac{1}{2}}(\theta,\eta)$, получить предыдущее решение, непрерывно связанное с линейным. В результате при $v_{x_1}=0$, $v_{y_1}=0$ решение будет непрерывно, хотя $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ при $v_{x_1}=0$, $v_y=0$ обращается в бесконечность. Хотя такое решение с особенностью для производной при пересечении ударной волной параболической линии в принципе приемлемо, можно кроме b ввести постоянную $h=b$, и вместо вышеуказанного выражения взять решение

$$\varphi_0(x,y) = \frac{A}{2}\,\frac{\Phi_k(\theta+b+h,\eta)-\Phi_k(\theta+b,\eta)-\Phi_k(\theta+h,\eta)+\Phi_k(\theta,\eta)}{bh\,4\left(2k+\frac{1}{6}\right)\left(2k-\frac{5}{6}\right)},\quad k=\frac{17}{12}.$$

Основной задачей является исследование знака $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(v_{x_1},v_{y_1})}$. В случае одной постоянной b потенциал Φ вблизи $v_{x_1}=0$ запишется в виде указанном выше, причем $k=\dfrac{11}{12}$,

$$\Phi_k(\theta,\eta) = \frac{A}{2}\,v_{y_1}^{2k}\,\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(k+)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+\frac{A}{2}v_{y_1}^{2k-\frac{2}{3}}\,\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} v_{x_1}$$

при $\theta>0$ и то же выражение, но умноженное на $\sqrt{3}$ и со знаком — перед вторым слагаемым в правой части Φ_k для $\theta<0$, причем в этом случае v заменено на v_{y_1}. По формулам $x=\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}}$, $y=\dfrac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$ можно найти x и y вблизи $v_{x_1}=0$. Тогда на самой линии

$$v_{x_1}=0,\ \frac{\partial x}{\partial v_{y_1}}=0,\qquad \frac{\partial x}{\partial v_{y_1}} = 1 - A\left(2k-\frac{2}{3}\right)\frac{\alpha}{a_1}R\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{3}\right)2\left(2k+\frac{1}{6}\right)b}\;\frac{(v_{y_1}+b)^{2k-\frac{5}{3}}-v_{y_1}^{2k-\frac{5}{3}}}{2}$$

для $v_{y_1}>0$, $v_{y_1}+b>0$, причем при изменении знака v_{y_1}, $v_{y_1}+b$, соответствующая скобка умножается на $\sqrt{3}$ и перед ней, а также перед v_{y_1}, $v_{y_1}+b$, ставится обратный знак. При этом $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})} = -\left(\frac{\partial x}{\partial v_{y_1}}\right)^2$ при соответствующем выборе b не обращается в нуль и то же относится к случаю двух постоянных b, h. Условия на ударной волне непрерывности x, y и касательной, составляющей скорости при $v_{x_1}=0$, $v_{y_1}=0$, удовлетворены. Вблизи падающей волны по вышеприведенным формулам $\Phi_k(\theta, \eta) = \frac{A}{2}\,\theta^{2k}\left(1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k-\frac{1}{6}}$ и, подставляя в выражение для Φ, x, y, можно получить $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})}$ вблизи линии $\eta=\frac{3}{2}\,\theta^{\frac{2}{3}}$, причем при достаточно большом $b \simeq 6\,\gamma^{\frac{6}{5}}$, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v_{x_1}, v_{y_1})}<0$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Եզակի գծի մոտ և միջափանի խնդրում ալիքային տիրույթի որոշումը

Դիտարկվում է ոչ իդեալ հեղուկի շարժման միջափանի խնդիրը։ Ստացված է ալիքային տիրույթում պարզեցրած հավասարումը, որ հաշիվ է առնում ոչ գծայնություն և ոչ իդեալությունը։ Այդ հավասարումը բերվում է սովորական ջերմահաղորդության հավասարման, որի լուծումը տված պայմանների համար գտնված է վերջավոր տեսքով։ Մեծ ժամանակների համար ստացված է պարզեցրած լուծումը, որը բավարարում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Багдоев*, Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости, Ереван, 1967. [2] *О. С. Рыжов, С. Д. Терентьев*, ПММ, № 6, 1967.