

ISSN 0002-3051



Выпуск

78

Часть

78

2025

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ,
ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И УСИЛЕННОЙ
ДУМЯ УПРУГИМИ ЛУНОЧНЫМИ НАКЛАДКАМИ**

Агаян К.Л., Арутюнян Л.А., Закарян В.Г.

Ключевые слова: плоская задача, составное тело, биполярные координаты, луночки, сингулярные интегралы, уравнение Фредгольма.

Contact problem for composite plane weakened by a circular hole and reinforced by two elastic lune pads
Aghayan K.L., Harutunyan L.A., Zakaryan V.Z.

Keywords: plane problem, composite body, bipolar coordinates, lune shapes, singular integrals, Fredholm equation.

Within the generalized bipolar coordinate system, a plane contact problem for a composite plane weakened by circular hole is considered. The contour of the circular hole is assumed to be covered by two intersecting lune-shaped pads made of a different elastic material. Within the framework of plane elasticity theory, a closed solution to the problem is constructed in a bipolar coordinate system using the stress function method.

The solution to the governing boundary value problem at first is reduced to a system of two singular integral equations, then formulated as a Riemann-Hilbert problem for certain vector function. The solution of last one is reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind, which admits a solution using the method of successive approximations.

Կոնտակտային խնդիր շրջանային անցքով թուլացված և երկու լուսնաձև առաձգական բարձիկներով ուժեղացված բաղադրյալ հարթության համար

Աղայան Կ.Լ., Հարությունյան Լ.Ա., Չաքարյան Վ.Գ.

Հիմնաբաներ. Հարթ խնդիր, բաղադրյալ մարմին, երկբևեռ կոորդինատներ, լուսնաձև տիրույթ, սինգուլյար ինտեգրալներ, Ֆրեդհոլմի հավասարում:

Ընդհանրացված երկբևեռ կոորդինատական համակարգում դիտարկվում է շրջանային անցքով թուլացված, բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ շրջանային անցքը իր եզրագծով շրջափակված է, այլ առաձգական նյութից պատրաստված, երկու փոխհաստվող լուսնաձև բարձիկներով: Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շրջանակներում, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում, լարումների ֆունկցիայի մեթոդով, կառուցվում է խնդրի փակ լուծումը:

Որոշիչ եզրային խնդրի լուծումը նախ բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որն այնուհետև ձևակերպվում է որպես Ռիման – Հիլբերտի եզրային խնդիր որոշակի վեկտոր ֆունկցիայի նկատմամբ: Վերջինիս լուծումը, բերվում է Ֆրեդհոլմի II սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որը թույլ է տալիս լուծում մոտավոր հաջորդականությունների մեթոդով:

В обобщенной биполярной координатной системе рассматривается плоская контактная задача для ослабленной круговым отверстием составной плоскости. Предполагается, что контур кругового отверстия окружен двумя пересекающийся луночными подушками из другого упругого материала. В рамках плоской

теории упругости, в системе биполярной системе координат, методом функции напряжения, построено замкнутое решение задачи.

Решение определяющей краевой задачи сперва сводится к системе из двух сингулярных интегральных уравнений, которое затем формулируется в виде краевой задачи Риммана – Гильберта для некоторой вектор функции. Решение последнего сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

Введение.

Исследованию закономерностей и особенностей напряженного состояния в составных упругих телах в виде упругой плоскости, содержащей концентраторы напряжения типа трещин, накладок и включений или остроугольные полости различных типов, посвящены многочисленные работы. В связи с этим, отметим книги [1-5], в которых выдвинуты различные подходы к решению вопросов, связанных с определением сингулярного поведения упругих напряжений около концевых точек концентраторов напряжений. В работах [6-12], конечно это далеко не полный список, поставлены и решены различные задачи, относящиеся к вопросам изучения напряженно – деформированного состояния в составных упругих телах, с точным определением степеней сингулярности разрушающих напряжений в остроугольных точках контактных поверхностей. Наиболее близкими к рассматриваемой здесь задаче можно считать работы [2,6,11], в которых изучаются плоские задачи для внутренности круговых луночек. В [7,8,10] изучаются аналогичные внешние задачи теории упругости для неоднородных плоскостей с круговыми сегментными луночными подушками.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

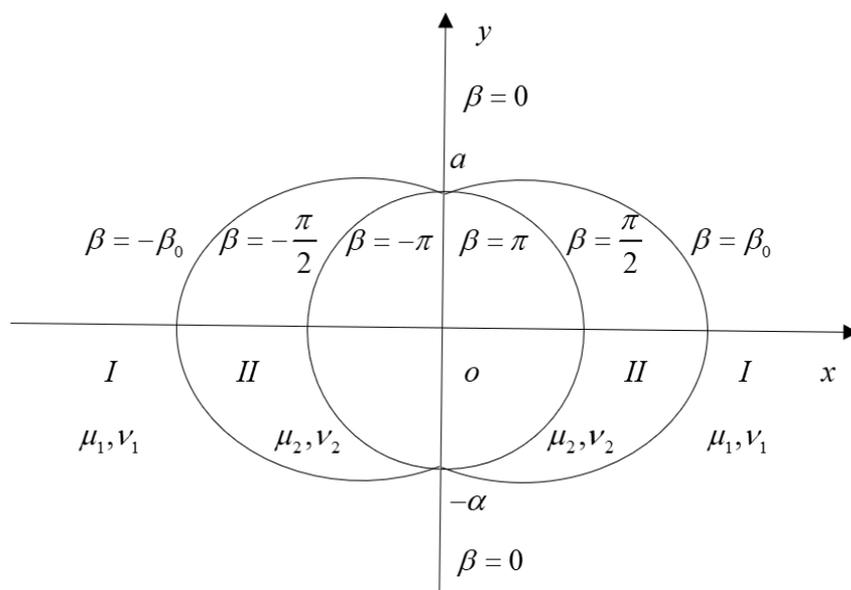
В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной луночными подушками из другого материала.

Принимаем, что в биполярной системе координат, первый материал занимает область $|\beta| \leq \beta_0$ и имеет упругие характеристики μ_1 и ν_1 , второй материал, с упругими характеристиками μ_2 и ν_2 , занимает область $\beta_0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}$, причем координата α внутри рассматриваемой составной области изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ (фиг. 1).

Между материалами, вдоль контактных линий $\beta = \pm\beta_0$, осуществляется полный контакт. Внешние нагрузки, в виде нормальных и касательных напряжений, приложены вдоль контура отверстия $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. При этом предполагается, что напряжения

на краях $\beta = -\frac{\pi}{2}$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ одинаковы. Так что, к геометрической симметрии задачи добавляется также симметрия по внешней нагрузке. Следовательно, ввиду симметрии напряженно-деформированного состояния относительно оси Oy , в

дальнейшем будем рассматривать только правую половину, которая в биполярной системе координат определяется неравенством $0 \leq \beta \leq \pi$.



Фиг. 1

Page | 5 Внешние задачи для этой области удобно решать в несколько видоизменной системе биполярных координат. Связь прямоугольных координат с видоизменной системой биполярных координат дается формулами [2].

$$gx = \sin \beta, \quad gy = \operatorname{sh} \alpha, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta \quad (1)$$

где a – размерный параметр.

Задача решается при помощи функции напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ ($m = 1, 2$), каждая из которых удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta)) = 0 \quad (2)$$

Напряжения и перемещения в видоизменённых биполярных координатах через функции напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ задаются формулами [2]:

$$a \sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta))$$

$$a \sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta))$$

$$\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) = -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi_m(\alpha, \beta)) \quad (3)$$

$$u_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[(1-2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]$$

$$\nu_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[(1-2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \quad m=1, 2$$

где μ_m и ν_m — упругие характеристики (μ_m — модули сдвига, ν_m — коэффициенты Пуассона), а связь между $g\Psi_m(\alpha, \beta)$ и $g\Phi_m(\alpha, \beta)$ дается формулой

$$\frac{\partial^2 (g\Psi_m(\alpha, \beta))}{\partial \alpha \partial \beta} = (1-\nu_m) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) (g\Phi_m(\alpha, \beta)) \quad (4)$$

Бигармоническую функцию напряжений $\Phi_m(\alpha, \beta)$ ($m=1, 2$) ищем в виде интеграла Фурье:

$$g\Phi_m(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (m=1, 2) \quad (5)$$

где $f_m(t, \beta)$ берется в следующем виде

$$f_1(t, \beta) = A_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_0 - \beta) \cos \beta + B_1(t) \operatorname{ch} t\beta \cos(\beta_0 - \beta) +$$

$$+ C_1(t) \operatorname{sh} t(\beta_0 - \beta) \sin \beta + D_1(t) \operatorname{sh} t\beta \sin(\beta_0 - \beta)$$

$$f_2(t, \beta) = A_2(t) \operatorname{ch} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos(\beta - \beta_0) + B_2(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \sin \beta +$$

$$+ C_2(t) \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \sin(\beta - \beta_0) + D_2(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \cos \beta \quad (6)$$

Неизвестные функции интегрирования $A_m(t)$, $B_m(t)$, $C_m(t)$ и $D_m(t)$ ($m=1, 2$) определены при помощи следующих граничных условий:

$$V_1(\alpha, 0) = \tau_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, 0) = 0$$

$$(g\Phi_2(\alpha, \beta)) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \varphi_1(\alpha); \quad \frac{\partial (g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \varphi_2(\alpha) \quad (7)$$

$$\left. (g\Phi_1(\alpha, \beta)) \right|_{\beta=\beta_0} = \left. (g\Phi_2(\alpha, \beta)) \right|_{\beta=\beta_0}; \quad \left. \frac{\partial (g\Phi_1(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = \left. \frac{\partial (g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0}$$

$$U_1(\alpha, \beta_0) = U_2(\alpha, \beta_0); \quad V_1(\alpha, \beta_0) = V_2(\alpha, \beta_0) \quad (8)$$

где предполагается, что функции $\varphi_m(\alpha)$ ($m=1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Из граничных условий (7), для неизвестных функций интегрирования $A_m(t)$, $B_m(t)$, $C_m(t)$ и $D_m(t)$ ($m=1, 2$) получаем следующие выражения через неизвестные функции $P_m(t)$ ($m=1, 2$)

$$A_1(t) = P_1(t) \frac{2t \sin \beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\text{sh } 2t\beta_0 \sin \beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$B_1(t) = P_1(t) \frac{2 \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t)} + P_2(t) \frac{\text{sh } t\beta_0 \sin 2\beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$C_1(t) = -P_1(t) \frac{2 \sin \beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\sin 2\beta_0 \sin \beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$D_1(t) = P_1(t) \frac{2t \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\text{sh } 2t\beta_0 \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$A_2(t) = P_1(t) \frac{\text{ch } t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_4(t)} - \bar{\varphi}_1(t) \frac{\cos \beta_0}{\Delta_4(t)}$$

$$B_2(t) = -P_1(t) \frac{\cos \beta_0}{\Delta_4(t)} + \bar{\varphi}_1(t) \frac{\text{ch } t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_4(t)}$$

$$C_2(t) = P_1(t) \left[\frac{t \text{ch } t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \text{sh } t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right] + P_2(t) \frac{\text{sh } t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} -$$

$$- \bar{\varphi}_1(t) \left[\frac{t \sin \beta_0}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \text{sh } 2t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin 2\beta_0}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right] + \bar{\varphi}_2(t) \frac{t \cos \beta_0}{\Delta_2(t)}$$

$$D_2(t) = -P_1(t) \left[\frac{t \sin \beta_0}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t(\pi - 2\beta_0) \cos \beta_0}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)} \right] - P_2(t) \frac{t \cos \beta_0}{\Delta_2(t)} +$$

$$+ \bar{\varphi}_1(t) \left[\frac{t \operatorname{ch} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin 2\beta_0}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)} \right] - \bar{\varphi}_2(t) \frac{\operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\alpha) e^{i\alpha t} d\alpha \quad (m=1,2)$$

$$\Delta_1(t) = \operatorname{sh} 2t\beta_0 + t \sin 2\beta_0; \quad \Delta_2(t) = \operatorname{sh}^2 t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - t^2 \cos^2 \beta_0$$

$$\Delta_3(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_0 + \sin^2 \beta_0; \quad \Delta_4(t) = \operatorname{sh}^2 t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) + \cos^2 \beta_0$$

При удовлетворении условий (8) равенства перемещений, получаем следующую характеристическую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $P_m(t)$ ($m=1,2$), при помощи которой дается окончательное решение поставленной задачи.

$$M_1(t)X_1(t) + M_2(t)X_2(t) + N_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)\beta_0}}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} X_1(\tau) d\tau$$

$$M_2(-t)X_1(t) + M_1(-t)X_2(t) + N_2(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(t-\tau)\beta_0}}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} X_2(\tau) d\tau \quad (10)$$

где

$$X_1(t) = (h + a_{21}(t))P_1(t) + a_{22}(t)P_2(t) + a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$X_2(t) = (h - a_{21}(t))P_1(t) - a_{22}(t)P_2(t) - a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) - a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$M_1(t) = \frac{1}{2ha_{22}(t)} \left[a_{11}(t)a_{22}(t) + (h + a_{12}(t))(h - a_{21}(t)) \right] - t$$

$$M_2(t) = \frac{1}{2ha_{22}(t)} \left[a_{11}(t)a_{22}(t) - (h + a_{12}(t))(h - a_{21}(t)) \right]$$

$$N_1(t) = M_3(t)\bar{\varphi}_1(t) + M_4(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$N_2(t) = M_3(-t)\bar{\varphi}_1(t) + M_4(-t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$\begin{aligned}
M_3(t) &= a_{13}(t) - \frac{a_{23}(t)}{a_{22}(t)}(h + a_{12}(t)); & M_4(t) &= a_{14}(t) - \frac{a_{24}(t)}{a_{22}(t)}(h + a_{12}(t)) \\
a_{11}(t) &= h_2 \frac{t^2 + 1}{\Delta_1(t)} \sin 2\beta_0 + t \frac{t^2 + 1}{\Delta_2(t)} \cos^2 \beta_0 & (11) \\
a_{12}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} (\operatorname{ch} 2t\beta_0 + \cos 2\beta_0) + \frac{1}{2\Delta_2(t)} \left(\operatorname{sh} 2t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - t \sin 2\beta_0 \right) \\
a_{13}(t) &= -\frac{t^2 + 1}{\Delta_2(t)} \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 \\
a_{14}(t) &= \frac{1}{\Delta_2(t)} \left(t \operatorname{ch} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 - \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right) \\
a_{21}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} (\operatorname{ch} 2t\beta_0 - \cos 2\beta_0) + \frac{1}{2\Delta_2(t)} \left(\operatorname{sh} 2t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) + t \sin 2\beta_0 \right) \\
a_{22}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} \sin 2\beta_0 + \frac{t}{\Delta_2(t)} \cos^2 \beta_0 \\
a_{23}(t) &= -\frac{1}{\Delta_2(t)} \left(t \operatorname{ch} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 + \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right) \\
a_{24}(t) &= \frac{1}{\Delta_2(t)} \operatorname{sh} t \left(\frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 \\
h_1 &= \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, & h_2 &= \frac{\mu(1 - \nu_1)}{1 - \nu_2}, & \mu &= \frac{\mu_2}{\mu_1}, & h &= \frac{h_1}{2} + h_2 - 1
\end{aligned}$$

2. Решение определяющей системы уравнений.

Для решения сингулярных интегральных уравнений (10), представим их в виде

$$\begin{aligned}
M_1(t)Y_1(t) + M_4(t)Y_2(t) + K_1(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)Y_1(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \\
M_4(-t)Y_1(t) + M_1(-t)Y_2(t) + K_2(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)Y_2(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= e^{\frac{t\pi}{2}} X_1(t); & Y_2(t) &= e^{-t(\beta_0+\pi)} X_2(t) \\
K_1(t) &= e^{t(\beta_0-\pi)} N_1(t); & K_2(t) &= e^{-t(\beta_0+\pi)} N_2(t) \\
M_4(t) &= e^{2t\beta_0} M_2(t); & \theta(t) &= e^{2t\pi}
\end{aligned} \tag{13}$$

Интегральные уравнения (12) сведем к краевой задаче Римана-Гильберта [3,4,9,10].

Введем новую кусочно-голоморфную функцию

$$R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) Y_m(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (m=1,2) \tag{14}$$

исчезающую на бесконечности.

Если t –любая точка контура, то по формуле Сохоцкого-Племеля получаем:

$$\begin{aligned}
R_m^+(t) - R_m^-(t) &= Y_m(t) \\
R_m^+(t) + R_m^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) Y_m(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя эти выражения в систему сингулярных интегральных уравнений (12), получим следующие краевые задачи Римана Гилберта

$$\begin{aligned}
R_1^+(t) &= c_{11}(t) R_1^-(t) + c_{12}(t) R_2^-(t) + T_1(t) \\
R_1^+(t) &= c_{21}(t) R_1^-(t) + c_{22}(t) R_2^-(t) + T_2(t)
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11}(t) &= 1 + \frac{2i(M_1(-t) + i)}{\Delta_3(t)}; & c_{22}(t) &= 1 - \frac{2i(M_1(t) + i)}{\Delta_3(t)} \\
c_{12}(t) &= \frac{2iM_4(t)}{\Delta_3(t)}; & c_{21}(t) &= -\frac{2iM_4(-t)}{\Delta_3(t)} \\
T_1(t) &= \frac{1}{\Delta_3(t)} [M_4(t) K_2(t) - (M_1(-t) - i) K_1(t)] \\
T_2(t) &= \frac{1}{\Delta_3(t)} [M_4(-t) K_1(t) - (M_1(t) + i) K_2(t)] \\
\Delta_3(t) &= (M_1(t) + i)(M_1(-t) - i) - M_4(t) M_4(-t)
\end{aligned} \tag{17}$$

Обозначая матрицу коэффициентов через $G(t)$, а векторы с составляющими $R_m(t)$ и $T_m(t)$ ($m=1,2$) – через $R(t)$ и $T(t)$, можно краевые задачи (16) записать в матричной форме

$$R^+(t) = G(t)R^-(t) + T(t) \quad (18)$$

Решение уравнения (18), в общем случае, строится путем регуляризации, т.е. приведением к интегральному уравнению Фредгольма.

Над обеими частями уравнения по определенным правилам производится операция, устраняющая сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

$$R^+(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)R^+(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau, \quad R^-(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)R^-(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (19)$$

Подставляя $R^+(t)$ из уравнения (18) в первое уравнение (19), получаем

$$G(t)R^-(t) + T(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} [G(\tau)R^-(\tau) + T(\tau)] d\tau \quad (20)$$

Умножая эти уравнения на $[G(t)]^{-1}$ и сложив со вторым уравнением (19), получаем

$$\begin{aligned} R^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} \{ [G(t)]^{-1} G(\tau) - E \} R^-(\tau) d\tau = \\ = \frac{[G(t)]^{-1}}{2} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)T(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau - T(t) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

где E - единичная матрица.

Интеграл в левой части (21) собственный, так как подынтегральное выражение уже не имеет особенности в точках $\tau = t$. Таким образом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы $G(t)$ и свободные члены, входящие в уравнение (18), удовлетворяют условию Гельдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det G(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \quad \text{на контуре} \quad (22)$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи равен -1, и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (21) всегда эквивалентно исходному уравнению [4,8,9,10].

После несложных преобразований и упрощений, векторное уравнение (21) сводится к следующей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функции $P_m(t)$ ($m=1, 2$)

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [H_{11}(t,\tau)P_1(\tau) + H_{12}(t,\tau)P_2(\tau)]d\tau + F_1(t) \right\} \\ P_2(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [H_{21}(t,\tau)P_1(\tau) + H_{22}(t,\tau)P_2(\tau)]d\tau + F_2(t) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} H_{11}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \times \\ &\times [h(t-\tau)(a_{21}(\tau) - a_{12}(t)) - a_{12}(t)a_{11}(\tau) - (t^2+1)a_{22}(t)a_{12}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h((t^2+1)a_{22}(t) - a_{11}(\tau)) + (t-\tau)(a_{12}(t)a_{21}(\tau) - h^2)] \\ H_{12}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [a_{11}(t)(h + a_{11}(\tau)) + (t^2+1)(a_{21}(\tau) - h^2)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h(t^2+1)(a_{21}(\tau) - a_{21}(t)) - (t-\tau)a_{11}(t)a_{21}(\tau)] \\ H_{21}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \times \\ &\times [h^2 + h(t-\tau)a_{22}(\tau) - a_{12}(t)a_{12}(\tau) - (t^2+1)a_{22}(t)a_{22}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h(a_{12}(t) - a_{12}(\tau)) - (t-\tau)a_{22}(\tau)] \\ H_{22}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [a_{11}(t)a_{12}(\tau) - (t^2+1)a_{21}(t)a_{22}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h((t^2+1)a_{22}(\tau) - a_{11}(t)) - (t-\tau)a_{11}(t)a_{22}(\tau)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
F_1(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[(h(t-\tau) - (t^2+1))a_{22}(t)(a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) - \right. \right. \\
& - a_{12}(t)(a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) \left. \right] + \\
& + \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[(t-\tau)a_{12}(t)(a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) - \right. \\
& - h(a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) \left. \right] \Big\} d\tau + \\
& + (h(t^2+1) - ta_{11}(t))(a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)) + \\
& + ta_{21}(t)(a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t)) \\
F_2(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[-(t^2+1)a_{21}(t)(a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) + \right. \right. \\
& + a_{11}(t)(a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) \left. \right] + \\
& + \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[h(t^2+1) - (t-\tau)a_{11}(t), (a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau)) \right] \Big\} d\tau - \\
& - h(t^2+1)(a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t)) + \\
& + (t^2+1)(ta_{21}(t) - a_{11}(t)) + 2th(a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)) \\
\Delta(t) = & h_2 \left[\text{sh } 2t(\gamma_1 + \gamma_2) + t \sin 2(\gamma_1 + \gamma_2) \right] - h_1 h_2 \text{sh } 2t\gamma_1 \Delta_2(t) - \\
& - \Delta_1(t) \left[\frac{h_1^2}{4} \Delta_2(t) - h_1 \text{sh}^2 t\gamma_2 + h_2 - 1 \right] \tag{25}
\end{aligned}$$

Учитывая найденные значения, для контактных напряжений из (3) будем иметь

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) &= \frac{i(\text{ch } \alpha - \cos \beta_0)}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_2(t) e^{-it\alpha} dt \\
\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[-t^2(\text{ch } \alpha - \cos \beta_0) - it \text{sh } \alpha + \cos \beta_0 \right] P_1(t) - \right. \\
& \left. - \sin \beta_0 P_2(t) \right\} e^{-it\alpha} dt \tag{26}
\end{aligned}$$

В общем случае любое из трех напряжений (3) согласно (5), (9) и (23) выражается несобственным интегралом вида

$$\tau(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}(x, y, t) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-(1+it)}}{\Delta(t) \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{1-it}} dt \quad (27)$$

который, после определения $\bar{\tau}(x, y, t)$, можно вычислить приближенно с помощью различных численных методов.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $y = \pm a$ (т.е. в точках $\alpha = \pm\infty$) интеграл (27) по вещественной оси добавляется интегралом по правой (при $y < 0$ или $\alpha < 0$) или по левой (при $y > 0$ или $\alpha > 0$) полуокружности радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром в начале координат [6-10].

При увеличении радиуса полуокружности последовательность R может быть подобрана так, чтобы интеграл (27) по полуокружности стремился к нулю.

Применяя теорему о вычетах, представим (27) в виде бесконечного ряда

$$\tau(x, y) = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{\tau}(x, y, t_1) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-(1+it_1)}}{\Delta'(t_1) \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{1-it_1}} + \sum_{k=2,3} \text{выч} [f(x, y, t_k), t_k] \right\} \quad (28)$$

Здесь $f(x, y, t_k)$ – подынтегральная функция в (27), а $t_k = \xi_k - i\eta_k$ – корни уравнения $\Delta(t) = 0$, которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k .

Трансцендентное уравнение $\Delta(t) = 0$ зависит от четырех параметров γ_1 и γ_2 и комбинаций упругих характеристик материалов h_1 и h_2 .

Очевидно, характер напряженного состояния около края $y = a$ ($\alpha = \infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$, уравнения (25). Если $\eta_1 > 1$ около края имеем нулевое напряженное состояние, если $\eta_1 < 1$ имеет место явление концентрации напряжений. В случае $\eta_1 = 1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и, в общем случае, отличны от нуля.

Из уравнения $\Delta(t) = 0$ в зависимости от геометрических и физических параметров задачи можно найти области конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта и границу раздела между этими областями.

Упомянутая граница определяется из зависимости

$$\sin 2\beta_0 (h_1 \cos^2 \beta_0 + h_2 - 1) = 0 \quad (29)$$

3. Частные случаи.

$$\text{а) } \sin 2\beta_0 = 0 \quad \beta_0 = 0 \text{ или } \beta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

это значит что материал однородный.

$$\text{б) } \cos 2\beta_0 = \frac{2(1-h_2)}{h_1} - 1, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{2(1-h_2)}{h_1} - 1 \right] \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет решение, когда

$$\frac{(1+\mu)(1-\nu_1)}{1-\nu_2} \leq 2 \quad (32)$$

При $\mu = 1$ уравнение (31) имеет решение, когда $\nu_2 \leq \nu_1$.

При $\nu_1 = \nu_2$ уравнение (31) имеет решение, когда $\mu_2 \leq \mu_1$.

Следует отметить, что решением граничной задачи подтверждается утверждение, сделанное в [6] на основе локального решения, о том, что в случае кусочно – однородного тела угол, разделяющий зоны концентрации напряжений от зоны малонапряженности может быть меньше развернутого угла.

4. Заключение.

С помощью видоизменной системы биполярных координат и аппарата интеграла Фурье, дано решение плоской задачи для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной двумя симметрично расположенными луночными подушками из другого материала. На границе отверстия заданы нормальные и касательные напряжения, а на линии сопряжения около края соприкосновения подушек с плоскостью - условия полного контакта. При удовлетворении граничных и контактных условий получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений. Решение этих уравнений, в конечном итоге, сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Получено характеристическое уравнение, по корням которого определяется напряженное состояние около края соприкосновения подушки с плоскостью. В зависимости от геометрических и физических параметров найдены области конечных и бесконечных напряжений и граница раздела этих областей.

Отметим, что результаты рассмотренной здесь задачи могут быть использованы при оценке расчетов прочности туннельных сооружений, встречающихся в различных областях строительства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М. 1950.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Наука, Л. 1967, 402 ст.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений М. Наука, 1970.
5. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М., Наука, 1982, 344 ст.
6. Чобанян К.С. Нагружения в составных упругих тел. Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1987, ст. 338.
7. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван, Изд. Гитутюн, НАН 2014, 322 ст.
8. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казань. ун-та, т.116. кн.4, 1956.
9. Боджи Д.В. Плоская статистическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов, имеющих произвольные углы раствора. ПМ. т.38. сер. Е. №2, 1971.
10. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 29, №1, 1976. ст.51-66.
11. Арутюнян Л.А., Едоян В.А. Плоская задача теории упругости для внешности круговой луночки. Мат. V межд. Конф. Цахкадзор, Арм. 2017. Ст. 31-32.
12. Алексанян Р.К., Арутюнян Л.А., Седракян А.М. Плоская задача для внешности кругового сегмента. Slovak inter. Scientific journal N 80 (2024) p. 34-38.
13. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 N. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16.
14. Арутюнян Л.А., Закарян В.Г. Плоская задача для составной плоскости с конечным отверстием. Мат. IX межд. конф. 2025, Цахкадзор, Арм., см. 31-35.

Сведения об авторах:

Агаян Каро Леренцович—д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел.: (37491) 485566, **E-mail:** karo.aghayan@gmail.com

Арутюнян Левон Арсенович—к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел.: (37499) 675747, **E-mail:** arutyunyanlevon@gmail.com

Закарян Ваге Гришаевич—к.ф.м.н., ученый секретарь Института Механики НАН Армении, Тел.: (37477) 789264, **E-mail:** vahe-zaqaryan@mail.ru

Поступила в редакцию 15 ноября 2025

**О ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ТОНКОГО АБСОЛЮТНО ЖЁСТКОГО
МЕЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ
ПЛОСКОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ ПОКОЯ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Хачикян А.С.

Ключевые слова: смешанная задача, межфазное жёсткое включение, трение покоя

Накобян В.Н., Амиржанян А.А., Хачикян А.С.

On a Contact Problem of a Thin Absolutely Rigid Interphase Inclusion with a Piecewise Homogeneous Plane in the Presence of Static Friction

Key words: mixed boundary value problem, interphase rigid inclusion, static friction

The plane stress state of a piecewise homogeneous plane consisting of two heterogeneous half-planes with an interphase finite inclusion subjected to normal and horizontal loads applied at a certain point is considered. It is assumed that, in addition to normal pressure, static shear contact stresses also act on the long sides of inclusion. The jumps in normal and shear stresses are associated with the generalized law of dry friction, the coefficient of which is a linear function of the coordinates of the touching points of the contacting surfaces. A governing singular integral equation of the second kind with variable coefficients is derived. The exact solution is constructed.

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Ա.Ա., Խաչիկյան Ա.Ս.

Հանգստի շփման առկայության դեպքում բարակ, բացարձակ կոշտ միջֆազային ներդրակի և կտոր առ կտոր համասեռ հարթության կոնտակտի վերաբերյալ

Հիմնաբառեր: խառը եզրային խնդիր, կոշտ միջֆազային ներդրակ, հանգստի շփում

Դիտարկված է երկու տարասեռ կիսահարթություններից կազմված կտոր առ կտոր համասեռ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը, երբ այն պարունակում է վերջավոր միջֆազային ներդրակ և դեֆորմացվում է ներդրակի որևէ կետում ազդող նորմալ և հորիզոնական կենտրոնացած բեռների ազդեցության տակ: Ենթադրվում է, որ ներդրակի երկար կողմերին, բացի նորմալ ճնշումից, առաջանում են նաև հանգստի շոշափող լարումներ, որոնց թռիչքները կապված են նորմալ լարումների թռիչքների հետ չոր շփման օրենքով, որի գործակիցը գծային ֆունկցիա է կոնտակտի մեջ մտնող կետերի կոորդինատներից: Ստացված է խնդրի որոշիչ հավասարումը փոփոխական գործակիցներով երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման տեսքով և կառուցված է նրա փակ լուծումը:

Рассмотрено плоско-деформированное состояние кусочно-однородной плоскости, состоящей из двух разнородных полуплоскостей с межфазным конечным включением, находящимся под воздействием нормальной и горизонтальной нагрузок, приложенных в некоторой его точке. Считается, что на длинных сторонах включения помимо нормального давления действуют также касательные контактные напряжения покоя и скачки нормальных и касательных напряжений взаимосвязаны по обобщенному закону сухого трения, коэффициент которого является линейной функцией от координаты соприкасающихся точек контактирующих поверхностей. Получено определяющее сингулярное интегральное уравнение второго рода с переменными коэффициентами и построено его точное решение.

Введение

Изучению контактного взаимодействия абсолютно жёстких штампов и включений с различными однородными и составными деформируемыми основаниями посвящено огромное количество работ. Получены замкнутые и эффективные решения ряда эталонных задач в этом направлении, имеющие важное теоретическое и практическое значение. В монографиях [1-5] подытожены многие результаты, полученные в этом направлении. С другой стороны, известно, что напряжения, возникающие вблизи межфазных тонких остроугольных включений, находящихся на линиях стыка разнородных материалов в кусочно-однородных деформируемых телах у концевых точек включений имеют осциллирующие особенности, что, как и в контактных задачах с учётом полного сцепления, противоречит сути поставленных задач. В случае задач контактного взаимодействия штампа с плоским основанием и упругой полуплоскости для устранения этого дефекта Л.А. Галиным [6], А.В. Саакяном [7] и нами [8] были предложены новые модели контакта. В работе А.В. Саакяна [9] проведен сравнительный анализ этих трех моделей. Подобных исследований для межфазных включений, насколько нам известно, пока нет. Распространение модели контакта Л.А.Галина для модели межфазных включений приводит к сложным соотношениям, которые не допускают аналитических решений.

Исходя из этого, предлагается модель контакта для межфазных включений с учётом трения покоя, которая не имеет указанный дефект и позволяет построить замкнутое решение поставленной задачи.

О классической модели тонкого абсолютно жёсткого межфазного включения

Сначала приведем решение задачи о взаимодействии кусочно-однородной плоскости и абсолютно жёсткого межфазного остроугольного включения, находящегося на линии стыка двух полуплоскостей из различных упругих материалов с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 соответственно и полностью сцеплённого с матрицей. При этом полагаем, что кусочно-однородная плоскость находится в состоянии плоской деформации и отнесена к декартовой системе координат Oxy , ось абсцисс которой проходит вдоль линии стыка разнородных полуплоскостей, а включение размещено на интервале $(-a, a)$ оси абсцисс и находится под влиянием нормальной и горизонтальной сосредоточенных нагрузок величины P_0 и T_0 соответственно, приложенных к включению в некой внутренней точке x_0 (Фиг.1).

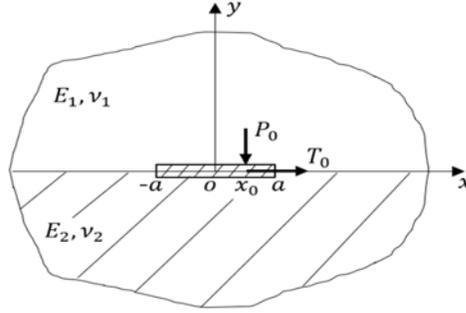
Условия контакта включения с плоскостью в рассмотренном случае можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x, 0) = \sigma_y^{(2)}(x, 0), \quad \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) \\ u^{(1)}(x, 0) = u^{(2)}(x, 0), \quad v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0) \end{cases} \quad |x| > a \quad (1a)$$

$$\begin{cases} v_1(x, 0) = v_2(x, 0) = \delta_1 + \gamma x \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \delta_2 \end{cases} \quad |x| < a \quad (1b)$$

Здесь $u_j(x, y)$ и $v_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) соответственно горизонтальные и нормальные составляющие вектора смещений точек разнородных полуплоскостей, δ_1 и δ_2 –

нормальное и горизонтальное жёсткие смещения включения , а γ – угол поворота включения.



Фиг. 1

Следует отметить, что указанная задача в общей постановке, когда на берегах межфазной трещины заданы смещения, впервые была рассмотрена Черепановым в работе [10], где её решение было сведено к решению задачи сопряжения.

Здесь же, для решения краевой задачи (1) будем использовать разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной плоскости с трещиной, приведенные в [5]. Эти решения удовлетворяют условиям (1а) и определяют компоненты напряжений $\sigma_y^{(j)}(x, y)$, $\tau_{xy}^{(j)}(x, y)$ ($j = 1, 2$) и производные от смещений точек разнородных полуплоскостей на линии их стыка через скачки нормальных и касательных напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$ и дислокации смещений на длинных сторонах включения. Так как в рассматриваемом случае дислокации смещений равны нулю, то

$$\begin{aligned} v_1'(x, 0) = v_2'(x, 0) &= -\frac{d_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds; \\ u_1'(x, 0) = u_2'(x, 0) &= \frac{d_0}{\Delta} \sigma(x) - \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) - \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \tau_{xy}^{(1)}(x, 0) - \tau(x),$$

где

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{l_0}{\Delta} \sigma(x) + \frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\tau(s)}{s-x} ds;$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{l_0}{\Delta} \tau(x) - \frac{l_2}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds;$$

$$d_0 = \frac{\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}}{2}, \quad d_1 = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{2}, \quad \vartheta_1^{(j)} = \frac{\mu_j^2}{(\lambda_j + 3\mu_j)},$$

$$\vartheta_2^{(j)} = \frac{\mu_j(\lambda_j + 2\mu_j)}{(\lambda_j + 3\mu_j)}, \quad \Delta = (\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)})^2 - (\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)})^2 \quad (j=1,2)$$

$$l_0 = \vartheta_2^{(1)}(\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}) - \vartheta_1^{(1)}(\vartheta_1^{(1)} - \vartheta_1^{(2)}); \quad l_2 = \vartheta_1^{(1)}\vartheta_2^{(2)} + \vartheta_2^{(1)}\vartheta_1^{(2)}.$$

При помощи третьей и четвертой формул (2) удовлетворив условиям (1b), после некоторых выкладок, для определения комплексной комбинации скачков напряжений на длинных сторонах включения, придём к следующему сингулярному интегральному уравнению второго рода:

$$\chi(x) - \frac{iq}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(s)ds}{s-x} = i\gamma_*; \quad (-a < x < a), \quad (3)$$

при условиях равновесия включения

$$\int_{-a}^a \chi(x)dx = Q_0; \quad \operatorname{Re} \int_{-a}^a x\chi(x)dx = x_0 P_0. \quad (4)$$

Здесь

$$Q_0 = P_0 - iT_0; \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\tau(x); \quad q = \frac{d_1}{d_0} = \frac{\vartheta_2^{(1)} + \vartheta_2^{(2)}}{\vartheta_2^{(1)} - \vartheta_2^{(2)}} > 1; \quad \frac{\Delta}{d_0} \gamma = \gamma_*.$$

Не останавливаясь на деталях, приведём решение уравнения (3) при условиях (4). Оно может быть записано в виде:

$$\chi(x) = \frac{\sqrt{|g|}}{1-q} \omega(x) \left[\gamma_* (x - 2i\beta a) - \frac{qQ_0}{\pi} \right]. \quad (5)$$

$$\text{где } g = \frac{1-q}{1+q} < 0.$$

При этом, приведённый поворот включения γ_* определяется через заданные нагрузки и координату x_0 точки приложения сосредоточенных сил по формуле:

$$\gamma_* = -\frac{2qP_0(x_0^* - 2\beta T_0/P_0)}{\pi a(1+4\beta^2)}. \quad (6)$$

Здесь

$$\omega(x) = (x+a)^{-1/2+i\beta} (a-x)^{-1/2-i\beta}; \quad \beta = \frac{\ln|g|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\alpha_2(\mu + \alpha_1)}{\alpha_1(1 + \mu\alpha_2)} \right);$$

$$x_0^* = x_0/a; \quad \mu = \mu_1/\mu_2; \quad \alpha_j = 3 - 4\nu_j \quad (j=1,2).$$

Из (5) для скачков напряжений, действующих на длинных сторонах включения, получим выражения:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \frac{\sqrt{|g|} \left[(\gamma_* x - qP_0 / \pi) \cos \beta(x) - (qT_0 / \pi - 2\gamma_* \beta a) \sin \beta(x) \right]}{(1-q)\sqrt{a^2 - x^2}}; \\
\tau(x) &= -\frac{\sqrt{|g|} \left[(\gamma_* x - qP_0 / \pi) \sin \beta(x) + (qT_0 / \pi - 2\gamma_* \beta a) \cos \beta(x) \right]}{(1-q)\sqrt{a^2 - x^2}}; \\
\left(\beta(x) &= \beta \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) \right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда, при помощи полученных значений скачков напряжений и разрывных решений можно определить комплексную комбинацию контактных напряжений на длинных сторонах включений по формулам:

$$\begin{aligned}
\chi_1(x) &= \sigma_y^{(1)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \frac{ql_0 - l_2}{q\Delta} \chi(x) + \frac{i\gamma_* l_2}{q\Delta} \\
\chi_2(x) &= \sigma_y^{(2)}(x, 0) - i\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \chi_1(x) - \chi(x),
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)}(x, 0) &= \operatorname{Re}[\chi_1(x)] = \frac{ql_0 - l_2}{q\Delta} \sigma(x); \\
\sigma_y^{(2)}(x, 0) &= \left(\frac{ql_0 - l_2}{q\Delta} - 1 \right) \sigma(x); \\
\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) &= \operatorname{Im}[\chi_1(x)] = -\frac{ql_0 - l_2}{q\Delta} \tau(x) + \frac{\gamma_* l_2}{q\Delta}; \\
\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) &= -\left(\frac{ql_0 - l_2}{q\Delta} + 1 \right) \tau(x) + \frac{\gamma_* l_2}{q\Delta}.
\end{aligned}$$

По этим формулам нетрудно установить, что контактные напряжения, как и скачки напряжений, в конечных точках включения имеют осциллирующую особенность.

При этом

$$\tau(x) = f(x)\sigma(x),$$

где

$$f(x) = -\frac{\left[(\gamma_* x - qP_0 / \pi) \sin \beta(x) + (qT_0 / \pi - 2\gamma_* \beta a) \cos \beta(x) \right]}{\left[(\gamma_* x - qP_0 / \pi) \cos \beta(x) - (qT_0 / \pi - 2\gamma_* \beta a) \sin \beta(x) \right]}.$$

Разложив функцию $f(x)$ в ряд Маклорана, когда $P_0 \neq 0$, и довольствуясь первыми двумя членами, получим

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx A - \frac{2\beta x}{a} [1 + A^2] + \frac{\gamma_* \pi A x}{qP_0} + O(x^2) = \\
&= A - \frac{2\beta x}{a} - \frac{\pi x A}{qP_0} \left[\frac{2qT_0\beta}{a\pi} - \gamma_* (1 + 4\beta^2) \right] + O(x^2)
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{qT_0 / \pi - 2\gamma_* \beta a}{qP_0 / \pi}$$

Отсюда видно, что когда горизонтальная нагрузка отсутствует и нормальная нагрузка приложена в средней точке включения, т.е. когда $T_0 = x_0 = 0$, следовательно и $\gamma_* = 0$, для функции $f(x)$ получим представление

$$f(x) \approx -\frac{2\beta x}{a} + O(x^2).$$

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим задачу в несколько изменённой постановке. При этом, первое условие контакта включения с кусочно-однородной плоскостью в (1b) сохраняется. Второе же условие контакта, опираясь на выше полученные результаты, заменим двумя условиями $\tau(x) = f(x)\sigma(x)$ и $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$, где как и выше функции $\tau(x)$ и $\sigma(x)$ соответственно скачки касательных и нормальных контактных напряжений, возникающих на длинных сторонах включения. При этом, коэффициент пропорциональности будем брать в виде линейного двучлена $f(x) = f_1 + f_2(x - x_0)/a$, где f_1 и f_2 – неизвестные постоянные, сумма которых равна заданному числу f , которое мы условно назовём коэффициентом трения. Считаем также, что $|f(x)| < 1$. Тогда поставленную задачу можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} v_1(x, 0) = v_2(x, 0) = \delta + \gamma x \\ \tau(x) = f(x)\sigma(x) \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \end{cases} \quad |x| < a \quad (8)$$

Требуется построить замкнутое решение поставленной задачи, изучить закономерности изменения контактных напряжений на длинных сторонах включения и угла поворота включений в зависимости от соотношений упругих характеристик полупространств, точки приложений сосредоточенных нагрузок и от величины коэффициента трения, а также провести сравнительный анализ решений граничных задач (1) и (8).

Для решения поставленной задачи при помощи представлений (2), удовлетворив условиям (8), придём к следующей системе определяющих уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d_0}{\Delta} \tau(x) + \frac{d_1}{\pi\Delta} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = -\gamma; \\ \tau(x) = f(x)\sigma(x), \end{cases} \quad (9)$$

которую нужно рассматривать при условиях равновесия включения:

$$\int_{-a}^a \sigma(s) ds = P_0; \quad \int_{-a}^a s\sigma(s) ds = x_0 P_0; \quad \int_{-a}^a \tau(s) ds = T_0. \quad (10)$$

Подставляя значение $\tau(x)$ из второго уравнения в первое придём к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению с переменными коэффициентами:

$$f(x)\sigma(x) + \frac{q}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma(s)}{s-x} ds = -\gamma_*, \quad (11)$$

где q и γ_* – введённые выше обозначения.

Для решения уравнения (11) при условиях (10) введём в рассмотрение аналитическую во всей комплексной плоскости разрезанной вдоль интервала $(-a, a)$ комплексную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\sigma(\tau) d\tau}{\tau - z}. \quad (12)$$

Тогда, как и в [8], решение уравнения (11) можно свести к решению следующей задачи Римана с переменным коэффициентом:

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g_*(x) \quad (|x| < a) \quad ; \quad (13)$$

$$\left(G(x) = \frac{f(x) - iq}{f(x) + iq}; \quad g_*(x) = -\frac{\gamma_*}{f(x) + iq} \quad (|x| < a) \right),$$

решение которого записывается в виде [11,12]:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{g_*(\tau) d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + C_0 X(z). \quad (14)$$

Здесь

$$X(z) = \frac{1}{z-a} e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau - z},$$

знаки \pm над функциями означают их значения соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала $(-a, a)$, а C_0 – постоянная, подлежащая определению. Причем, так как $|G(x)| = 1$, то

$$\ln G(x) = i \arg G(x) = i \arg \frac{f(x) - iq}{f(x) + iq} = i \arg \frac{f^2(x) - 2iqf(x) - q^2}{f^2(x) + q^2}.$$

При этом, как и в [10], нужно взять ту ветвь функции $G(x)$, аргумент которой в точке $x = -a$ находится в интервале $(0, 2\pi)$. Следовательно, так как $q > 1$, то имеем [10]

$$\arg G(x) = \left[\pi + \operatorname{arctg} \frac{2qf(x)}{q^2 - f^2(x)} \right] = \left[\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{q} \right].$$

Далее, перейдём к определению неизвестных постоянных, входящих в (14). Для этого, используя поведение интеграла Коши на бесконечности, несложно установить, что в рассматриваемом случае по формуле (12) функция $\Phi(z)$ на бесконечности имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \left[\int_{-a}^a \sigma(\tau) d\tau + \frac{1}{z} \int_{-a}^a \tau \sigma(\tau) + O(z^{-2}) \right] = \\ &= -\frac{1}{2\pi iz} \left[P_0 + \frac{1}{z} x_0 P_0 + O(z^{-2}) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

а по формуле (14) - представление

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{1}{2\pi iz} \left(1 + \frac{c_1}{z} + O(z^{-2}) \right) \left\{ \frac{1}{z} \int_{-a}^a \frac{g_*(\tau) d\tau}{X^+(\tau)} + O(z^{-2}) \right\} + \\ &+ C_0 \frac{1}{z} \left[\left(1 + \frac{c_1}{z} + O(z^{-2}) \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$c_1 = \frac{a}{\pi f_2} \left[f \operatorname{arctg} \left(\frac{f}{q} \right) - (f_1 - f_2) \operatorname{arctg} \left(\frac{f_1 - f_2}{q} \right) - \frac{q}{2} \ln \sqrt{\frac{q^2 + f^2}{q^2 + (f_1 - f_2)^2}} \right]$$

если $f_2 \neq 0$ и

$$c_1 = \frac{2a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f_1}{q} \quad \text{если} \quad f_2 = 0.$$

Сравнивая поведения функции $\Phi(z)$ на бесконечности по формулам (15) и (16), используя при этом условия (10), приходим к соотношениям:

$$f_1 = \frac{T_0 / P_0 - x_0^* f}{1 - x_0^*}; \quad f_2 = f - f_1 = \frac{f - T_0 / P_0}{1 - x_0^*}; \quad (17)$$

$$C_0 = -\frac{P_0}{2\pi i}; \quad \gamma_* = -\frac{a(x_0^* - c_1^*)}{I_0} P_0; \quad \left(x_0^* = \frac{x_0}{a} \right),$$

где

$$c_1^* = c_1 / a; \quad I_0 = \int_{-a}^a \frac{d\tau}{(f(\tau) + iq)X^+(\tau)} = \int_{-a}^a \frac{e^{-\psi_1(\tau)} \omega(\tau) d\tau}{\sqrt{q^2 + f^2(\tau)}}.$$

Отсюда следует, что для исключения поворота включения, т.е. чтобы γ_* равнялся нулю, нормальную нагрузку нужно приложить в точке $x_0 = c_1$. В случае, когда $T_0 = 0$, т.е. когда горизонтальная нагрузка отсутствует, очевидно, что для исключения поворота включения нормальную нагрузку следует приложить в точке $x_0 = 0$. Тогда из первого соотношения (17) получим $f_1 = 0$. Несложно проверить также, что при $f_1 = 0$ автоматически $c_1 = 0$.

Вычислим интеграл I_0 . При больших значениях z будем иметь:

$$\frac{z}{X(z)} = z^2 - c_1 z + \left(-a^2 / 2 + c_1^2 / 2 - c_2 \right) + O(z^{-1}),$$

где

$$c_2 = a^2 c_2^* = \frac{a^2}{2\pi f_2^2} \left[(f^2 + q^2) \operatorname{arctg} \frac{f}{q} + ((f_1 - f_2)^2 + q^2) \operatorname{arctg} \frac{f_1 - f_2}{q} - 2qf_2 \right] -$$

$$-\frac{a^2 f_1}{\pi f_2^2} \left[f \operatorname{arctg} \frac{f}{q} - (f_1 - f_2) \operatorname{arctg} \frac{(f_1 - f_2)}{q} - \frac{q}{2} \ln \frac{f^2 + q^2}{(f_1 - f_2)^2 + q^2} \right] \quad (f_2 \neq 0)$$

$$c_2 = 0 \quad (f_2 = 0)$$

Следовательно, если взять замкнутый контур Λ , содержащий интервал $(-a, a)$, то справедливо соотношение [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{tdt}{X(t)(t-z)} = \frac{z}{X(z)} - \left[z^2 - c_1 z + \left(-a^2 / 2 + c_1^2 / 2 - c_2 \right) \right].$$

Тогда, стягивая контур Λ на интервал $(-a, a)$, используя соотношения Племеля-Сохоцкого для интегралов Коши и учитывая, что $X(z)$ есть решение однородного уравнения (13), т.е. $X^+(x) = G(x)X^-(x)$, получим:

$$\frac{q}{\pi} \int_{-a}^a \frac{tdt}{(f(t)+iq)X^+(t)(t-x)} = \frac{x}{X^+(x)} \frac{f(x)}{f(x)+iq} - x^2 + c_1x + \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} + c_2 \right).$$

Отсюда, при $x = 0$ приходим к равенству:

$$I_0 = \int_{-a}^a \frac{dt}{(f(t)+iq)X^+(t)} = \frac{\pi}{q} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} + c_2 \right).$$

Далее, учитывая, что в рассматриваемом случае

$$X^\pm(x) = \frac{e^{\psi_1(x)}(f(x) \mp iq)}{\omega(x)\sqrt{q^2 + f^2(x)}}, \quad (18)$$

для скачка нормальных контактных напряжений на длинных сторонах включения получим формулу:

$$\sigma(x) = \frac{qP_0[1 - \gamma_*\pi(x - c_1)/q] \exp[\psi_1(x)]}{\pi\omega(x)\sqrt{q^2 + f^2(x)}} \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega(x) = (a+x)^{1/2+\beta(x)}(a-x)^{1/2-\beta(x)}; \quad \beta(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{q};$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg}(f(t)/q) - \operatorname{arctg}(f(x)/q)}{t-x} dt.$$

Определим также нормальные контактные напряжения на длинных сторонах включения. По формулам (2), используя уравнение (11), будем иметь

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \left[\frac{l_0}{\Delta} - \frac{f^2(x)l_2}{q\Delta} \right] \sigma(x) - \frac{\gamma_*f(x)l_2}{q\Delta} + \frac{P_0f_2l_2}{\pi a\Delta};$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, 0) = \left[\frac{l_0}{\Delta} - \frac{f^2(x)l_2}{q\Delta} - 1 \right] \sigma(x) - \frac{\gamma_*f(x)l_2}{q\Delta} + \frac{P_0f_2l_2}{\pi a\Delta};$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, 0) = \left[\frac{l_0}{\Delta} + \frac{l_2}{\Delta q} \right] f(x) \sigma(x) + \frac{\gamma_* l_2}{\Delta q};$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, 0) = \left[\frac{l_0}{\Delta} + \frac{l_2}{\Delta q} - 1 \right] f(x) \sigma(x) + \frac{\gamma_* l_2}{\Delta q}.$$

Вычислим также производную от горизонтальных смещений под включением. Используя при этом уравнение (11), найдём:

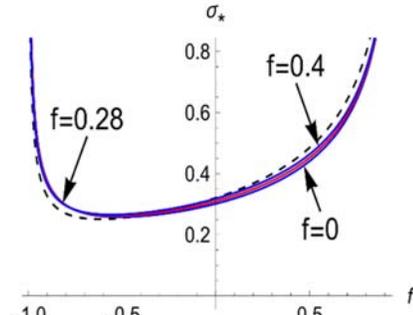
$$u_1'(x, 0) = u_2'(x, 0) = \frac{d_0}{\Delta} \left[(1 + f^2(x)) \sigma(x) - \frac{q f_2}{\pi a} P_0 \right] + \gamma f(x). \quad (20)$$

В выше рассмотренном случае, когда на включение в точке $x = 0$ действует только нормальная сосредоточенная нагрузка величины P_0 , скачки нормальных и касательных контактных напряжений принимают следующие простые виды:

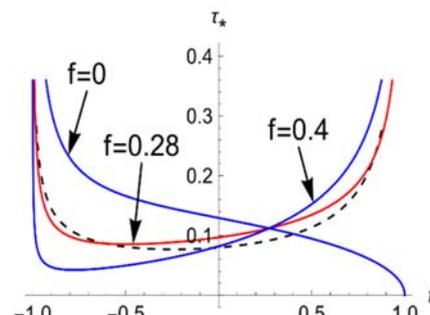
$$\sigma(x) = \frac{q P_0 \exp[\psi_1(x)]}{\pi \omega(x) \sqrt{q^2 + (f_2 x / a)^2}}; \quad \tau(x) = \frac{q f_2 x P_0 \exp[\psi_1(x)]}{\pi a \omega(x) \sqrt{q^2 + (f_2 x / a)^2}}. \quad (21)$$

Численные расчёты

Проведены численные расчёты и сравнены графики безразмерных скачков нормальных и касательных напряжений $\sigma_*(x) = a \sigma(ax) / P_0$, $\tau_*(x) = a \tau(ax) / P_0$, действующих на длинных сторонах включения, определённые по классической модели полного сцепления и по предложенной здесь модели с учётом трения покоя при одинаковых значениях физико-механических и геометрических параметров. На фигурах 2 и 3 соответственно пунктиром приведены графики скачков безразмерных нормальных и касательных напряжений, определённых в рамках модели полного



Фиг. 2



Фиг. 3

сцепления, а сплошными линиями графики тех же величин, полученные с использованием предложенной здесь модели, при различных значениях параметра f . При этом для упругих характеристик разнородных полуплоскостей, сосредоточенных

нагрузок и приведённой координаты их точки приложения приняты следующие значения $v_1 = 0.3$, $v_2 = 0.4$, $\mu = 2$, $T_0 / P_0 = 0.3$, и $x_0^* = 0.3$.

Из фигур видно, что графики безразмерных скачков нормальных напряжений, полученных по обеим моделям, очень близки и мало отличаются друг от друга. Что же касается скачков касательных контактных напряжений, то в рассматриваемом случае, самым близким к результату, полученному при полном сцеплении, получается в случае когда $f = 0.28$.

Заключение

Таким образом, в работе предложена модель контакта абсолютно жёсткого остроугольного межфазного включения с учётом трения покоя. В рамках этой модели выведено определяющее уравнение задачи в виде сингулярного интегрального уравнения второго рода с переменными коэффициентами и построено его точное решение. Получены простые выражения для контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включения и горизонтальных смещений точек плоскости, соприкасающихся с включением. Проведён численный эксперимент и сравнены графики безразмерных скачков контактных напряжений, построенных при помощи моделей полного сцепления и с учётом трения покоя. Сравнение показало, что при надлежащем выборе коэффициента трения результаты, полученные обеими моделями, в основной части контактной зоны, не содержащей концевые точки зоны контакта, где контактные напряжения полученные в рамках классической модели полного сцепления осциллируют, мало отличаются друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.- М.:Наука, 1980.- 304с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947 - 270с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.-М.: Наука, 1966.-708с.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев, Наукова Думка, 2006, 328с.
5. Nakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, *Advanced Structured Materials*, Volume 181, Springer 2022, 397p.
6. Галин Л.А. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. ПММ, 1945, т. 9, вып. 5, с. 413-424.
7. Саакян А.В., Иной подход к задаче контактного взаимодействия штампа с упругой полуплоскостью при наличии трения между ними. // Известия НАН РА, Механика, т.77, № 1, 2024г, с. 56-67.
8. Акопян В.Н., Акопян Л.В. Об одной модели трения применительно к контактным задачам теории упругости. // Известия НАН РА, Механика, т.76, № 2, 2023г, с. 20-31.
9. Sahakyan, A. (2024). Contact of the Stamp with an Elastic Half-Plane. Comparative Analysis of Models Accounting for Friction Between Them. In: Altenbach, H., Öchsner, A. (eds) *State of the Art and Future Trends in Materials Modelling 2. Advanced Structured Materials*, vol 200. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-72900-3_28

10. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами.
// Известия АН СССР , отделение тех. наук, механика и машиностроение, 1962г.,
№1, ст. 131-137.
11. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.-
511с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи.- М.: Наука, 1977.- 640с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович - доктор физ.-мат. наук., проф., гл. науч. сотрудник
Института механики НАН РА, тел.: (37491) 350-222, e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., вед. науч. сотрудник
Института механики НАН РА, тел.: (37444) 920-639, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Хачикян Альберт Серобович - кандидат физ.-мат. наук., науч. сотрудник Института
механики НАН РА, тел.: (37493) 048 837, e-mail: khachikyanalbert39@gmail.com

Поступила в редакцию 18 ноября 2025

**ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА ПРЕССОВАНИЯ
ОБРАЗЦА ИЗ НЕСПЕЧЕННОГО ПОРОШКА В ЖЕСТКОЙ ЦИЛИНДРИ-
ЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ, ИСПОЛЬЗУЯ МОДИФИЦИРОВАННУЮ МОДЕЛЬ
ТЕКУЧЕСТИ ДРУКЕРА-ПРАГЕРА**

Арзуманян М.Г.

Ключевые слова: неспеченный порошковый материал, модифицированная модель текучести Друкера-Прагера, жесткая цилиндрическая матрица, напряженное состояние, угол внутреннего трения, коэффициент сцепления, эволюционный параметр

Arzumanyan M.G.

Studying the stress state of the compaction process of specimens from non-sintered powder in a hard cylindrical die using the modified Drucker-Prager cap model

Keywords: non-sintered powder material, modified Drucker-Prager cap model, hard cylindrical die, stress state, internal friction angle, powder cohesion coefficient, evolution parameter.

For the compaction process stress state study of specimens from non-sintered powder materials in a hard cylindrical die, a simple theoretical formula for plastic deformation of powder materials for a cap surface of the modified Drucker-Prager cap model is used allowing to set a relation between the axial and lateral pressures. For some values of the internal friction angle, the cohesion factor between the grains of the powder material, the hydrostatic compression yield stress and the evolution parameter numerical calculations are performed, the diagrams of axial and lateral pressures dependent on specimen's axial coordinate are plotted, and the obtained results are analyzed.

Արզումանյան Մ.Գ.

Կոշտ զլանական մամլամայրում չեռակալված փոշենմուշի մամլման գործընթացի լարվածային վիճակի հետազոտման Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի օգտագործմամբ

Հիմնաբառեր: չեռակալված փոշենյութ, Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդել, կոշտ զլանական մամլամայր, լարվածային վիճակ, ներքին շփման անկյուն, կառչման գործակից, էվոլյուցիոն պարամետր

Կոշտ զլանական մամլամայրում չեռակալված փոշենմուշի մամլման գործընթացի լարվածային վիճակի հետազոտման համար օգտագործվել է Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի գլխակի մակերևույթի պարզ տեսական բանաձևը, ինչը հնարավորություն է տվել կապ հաստատել առանցքային և կողմնային ճնշումների միջև: Փոշու հատիկների միջև ներքին շփման անկյան, կառչման գործակցի, ամրացման լարման և էվոլյուցիոն պարամետրի որոշակի արժեքների դեպքում առանցքային և կողմնային ճնշումների համար կատարվել են թվային հաշվարկներ, կառուցվել են դրանց գրաֆիկները՝ կախված փոշենմուշի առանցքային կոորդինատից, և ստացված արդյունքերը վերլուծվել են:

Для исследования напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице была использована простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера, что дало возможность установить связь между осевым и боковым давлениями. При определенных значениях угла внутреннего трения, коэффициента сцепления между гранулами частиц порошка, напряжения упрочнения и эволюционного параметра для

осевого и бокового давлений выполнены расчеты, построены графики зависимости осевых и боковых давлений от осевой координаты образца и проанализированы полученные результаты.

Введение. В машиностроении широкое применение получили детали из порошковых материалов. Технологический процесс их изготовления в основном состоит из двух частей. Сначала проводят холодное прессование порошков в специальных прессформах. За счет пластической деформации материал уплотняется и получают неспеченные заготовки различных форм и размеров. Затем после спекания порошков их подвергают повторной обработке давлением, придавая им окончательный вид и плотность. В результате получают высококачественные детали с низким расходом энергии и материалов.

Таким образом, в порошковой металлургии одним из основных технологических процессов является холодное формование неспеченных заготовок. Детали, изготовленные из порошковых материалов, имеют разные пористость и плотность, что существенно влияет на их механические свойства. Отметим, что процесс холодного формования порошковых материалов используется также в производстве керамики, лекарственных препаратов, ядерного топлива и в других отраслях промышленности.

В [1] исследовано напряженное состояние полого шара из неспеченного порошкового материала, нагруженного внешним давлением. Задача решена с использованием условий пластичности Мора-Кулона для металлических порошков.

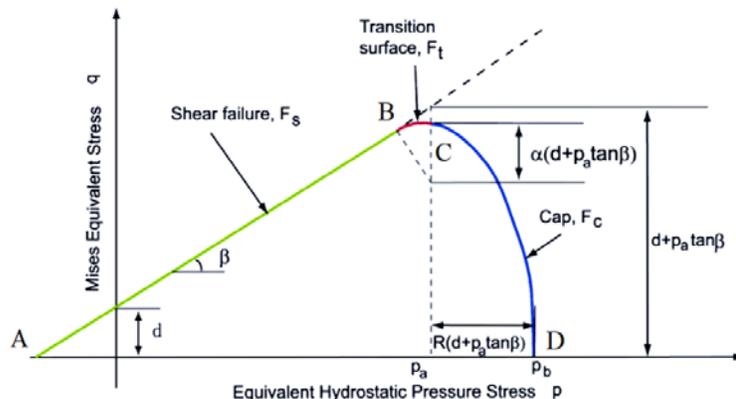
В [2] изучено напряженное состояние толстостенного полого шара из неспеченного металлического порошка в условиях всестороннего равномерного сжатия, используя условие пластичности Друкера-Прагера, и получены формулы для определения компонентов напряженного состояния. Произведены численные расчеты для радиального и меридионального напряжений при некоторых малых значениях угла внутреннего трения между частицами порошка, построены их графики в зависимости от текущего радиуса полого шара. Дан анализ полученных данных.

В [3] проанализирована модифицированная модель текучести Друкера-Прагера. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации неспеченного металлического порошкового материала для шляпкообразной поверхности. Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

В [4] проанализированы теоретические и экспериментальные исследования модифицированной модели текучести Друкера-Прагера. На основе формул теории пластичности получены теоретические формулы пластической деформации неспеченного металлического порошкового материала для шляпкообразной поверхности. Полученные формулы дают возможность не только проводить исследование компонентов напряженно-деформированного состояния деталей из порошковых материалов, но и определять их текущие пористости (плотности).

В [5] проанализированы исследования пластической деформации неспеченных порошковых материалов, имеющие большое теоретическое и практическое значение, и выявлены их особенности. Представлено условие пластичности, наиболее удобное для теоретического изучения напряженного состояния неспеченных порошковых материалов в процессах уплотнения, а также формула определения текущей пористости материала.

В [6,7] выполнен подробный анализ модифицированной модели текучести Друкера-Прагера для порошковых материалов. Модель состоит из двух основных частей: прямолинейной - поверхность текучести при сдвиге, и шляпообразной, пересекающей ось среднего напряжения, на основании чего осуществляется процесс пластического осаживания порошковых частиц. Эти части связаны друг с другом переходным участком (фиг. 1).



Фиг. 1. Типичная модифицированная модель текучести Друкера-Прагера [6,7]

Согласно фиг. 1, модифицированная модель текучести Друкера-Прагера состоит из трех участков [6,7]:

1. Поверхность (AB) текучести при сдвиге порошковых частиц, обеспечивающая течение, обусловленное сдвигом, записывается в виде [6]

$$f_{AB} = F_s = q - p \operatorname{tg} \beta - d = 0, \quad (1)$$

где p - среднее напряжение, а q - эквивалентное напряжение по Мизесу.

Здесь p и q , выраженные через главные напряжения, имеют следующий вид:

$$p = -(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3, \quad (2)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}. \quad (3)$$

2. Шляпообразная поверхность (CD), обеспечивающая механизм осаживания порошковых частиц, для представления пластического уплотнения записывается в виде [6]

$$f_{CD} = F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[\frac{Rq}{1 + \alpha - \alpha / \cos \beta} \right]^2} - R(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0, \quad (4)$$

где R - параметр, характеризующий свойство материала, который управляет формой "шляпы"; α - небольшое число (обычно в диапазоне от 0,01 до 0,05), используемое для определения плавной переходной поверхности; p_a - эволюционный параметр, обусловленный прочностью или хрупкостью материала и представляющий собой объемную пластическую деформацию.

Шляпкообразная поверхность в модифицированной модели текучести Друкера-Прагера упрочняет материал или делает его хрупким как результат объемной функции пластической деформации. Когда происходит пластическое объемное уплотнение (материал сдвигается по шляпкообразной поверхности), порошковый материал упрочняется, а когда происходит объемная пластическая дилатансия (материал сдвигается по поверхности текучести), он становится хрупким [6].

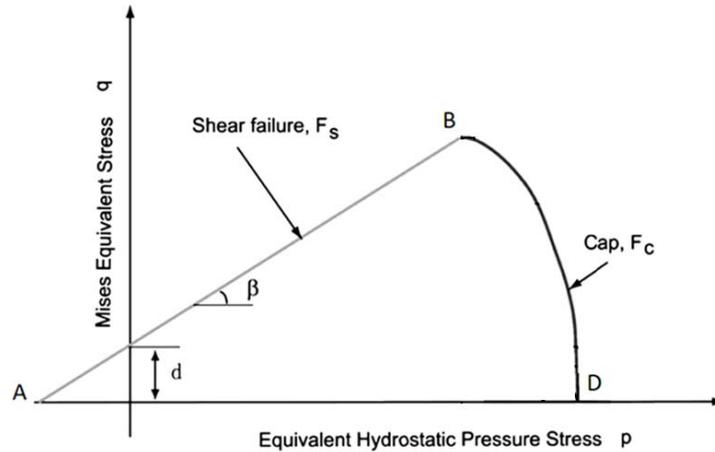
Связь между эволюционным параметром p_a и напряжением упрочнения p_b имеет следующий вид [6-8]:

$$p_b = p_a + R(d + p_a \operatorname{tg} \beta). \quad (5)$$

3. Участок плавного перехода (BC) между указанными двумя участками задается в виде [6,7]

$$f_{BC} = F_t = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[q - \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \rho} \right) (d + p_a \operatorname{tg} \beta) \right]^2} - \alpha(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0. \quad (6)$$

В [8-10] в модифицированной модели текучести Друкера-Прагера рассматриваются две следующие поверхности: поверхность текучести при сдвиге порошковых частиц и поверхность осаживания (шляпкообразный участок) (фиг. 2). При этом в представленной модели есть четыре независимых параметра R , d , β и p_b , значения которых должны определяться экспериментальными исследованиями порошковых материалов.



Фиг. 2. Модифицированная модель текучести Друкера-Прагера без переходного участка [8-10]

Как видно из фиг. 2, поверхность текучести при сдвиге сохраняет свой вид, а шляпкообразная поверхность представлена без коэффициента α , определяющего плавную переходную поверхность [8-10]:

$$f_{CD} = F_C = \sqrt{(p - p_a)^2 + (Rq)^2} - R(d + p_a \operatorname{tg} \beta) = 0. \quad (7)$$

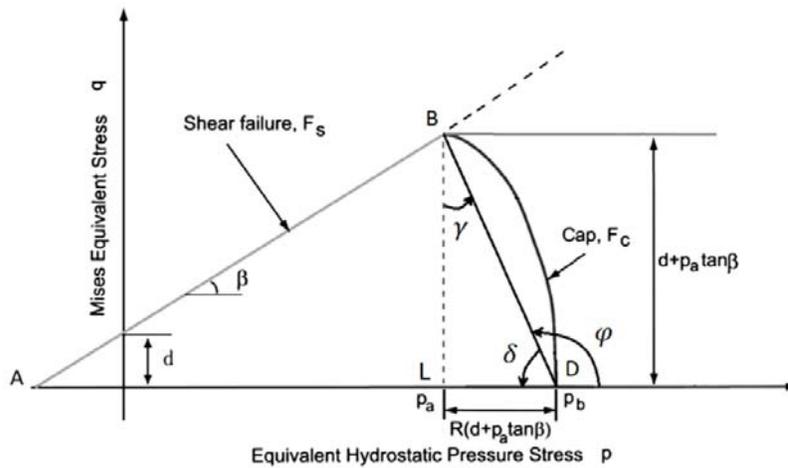
В [4] простым теоретическим методом обоснована модифицированная модель текучести Друкера-Прагера и на основе формул теории пластичности получена

простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера (фиг. 3):

$$f_{BD} = F_L = qR - p - p_b = 0. \quad (8)$$

Условие пластичности (8), выраженное через главные напряжения, имеет вид [4]

$$f_{BD} = F_L = 0, \quad \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}R - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} - p_b = 0. \quad (9)$$



Фиг. 3. Упрощенный вид типичной модифицированной модели текучести Друкера-Прагера [4]

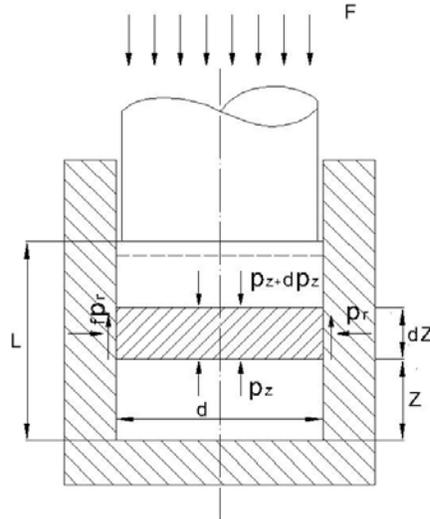
Отметим также, что на фиг. 3 котангенс угла, образованного прямой BD и осью p , равен $\text{ctg } \delta = R$.

Отметим, что теоретических исследований по пластической деформации для пористых материалов мало, особенно с использованием модифицированной модели текучести Друкера-Прагера. Следовательно, исследование напряженного состояния процесса прессования образца из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице является актуальной.

Постановка задачи и решение. Целью работы является исследование напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице с использованием простой теоретической формулы пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера.

Для исследования напряженного состояния процесса прессования цилиндрического брикета из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице используется условие равновесия элемента, отделенного от образца двумя

параллельными сечениями и простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпкообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера.



Фиг. 4. Схема напряженного состояния при наличии трения о стенки матрицы (контейнера)

Для решения данной задачи используется условие равновесия элемента высотой dz , отделенного от цилиндрического образца двумя параллельными сечениями (фиг. 4) [11]:

$$D \cdot dp_z = 4 f p_r dz, \quad (10)$$

где D - диаметр образца; f - коэффициент трения между матрицей и заготовкой; p_z - давление, действующее по направлению оси заготовки; p_r - боковое давление.

При анализе напряженного состояния образца, пренебрегая касательными напряжениями, осуществляется оценка главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 .

Принимается:

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \sigma_1 = \sigma_2 = -p_r, \quad \sigma_3 = \sigma_z = -p_z \quad (p_z > p_r).$$

где σ_z , σ_θ , σ_r - соответственно осевое, окружное и радиальное напряжения.

Определим значение p и q для вышеприведенного напряженного состояния

$$p = \left(\frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3} \right) = \left(\frac{-2p_r - p_z}{3} \right) = -\frac{2p_r + p_z}{3},$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}[(-p_r + p_z)^2 + (-p_z + p_r)^2]} = |p_r - p_z| = p_z - p_r.$$

Подставляя значение p и q в условие пластичности (8), представим его в следующем виде

$$(p_z - p_r)R + \frac{2p_r + p_z}{3} - p_b = 0,$$

$$3p_zR - 3p_rR + 2p_r + p_z - 3p_b = 0,$$

$$p_z(1 + 3R) + p_r(2 - 3R) - 3p_b = 0,$$

$$p_r(2 - 3R) = 3p_b - p_z(1 + 3R),$$

из которого определим p_r

$$p_r = \frac{3p_b - p_z(1 + 3R)}{2 - 3R}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение равновесия (10) приведем его к виду

$$dp_z = 4f \left[\frac{3p_b - p_z(1 + 3R)}{2 - 3R} \right] \frac{dz}{D}. \quad (12)$$

Запишем (12) в более удобном для нас виде

$$dp_z = \left[\frac{12fp_b}{2 - 3R} - \frac{p_z 4f(1 + 3R)}{2 - 3R} \right] \frac{dz}{D}. \quad (13)$$

Приняв обозначения

$$a = \frac{12fp_b}{2 - 3R}, \quad b = -\frac{4f(1 + 3R)}{2 - 3R}, \quad (14)$$

из (13) получим:

$$dp_z = (a + bp_z) \frac{dz}{D}. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение (15) сначала представим в виде

$$\frac{d(a + bp_z)}{(a + bp_z)} = b \frac{dz}{D},$$

и, интегрируя его, получим:

$$\int \frac{d(a + bp_z)}{(a + bp_z)} = \int b \frac{dz}{D},$$

$$\ln(a + bp_z) = \frac{b}{D} z + C. \quad (16)$$

Для определения константы C используем следующее граничное условие:

$$\text{при } z = H \quad p_z = p_0. \quad (17)$$

Подставляя условие (17) в (16), получим следующее значение C

$$C = \ln(a + bp_0) - \frac{b}{D} H, \quad (18)$$

что дает возможность из (16) получить следующую формулу для определения величины осевого давления p_z

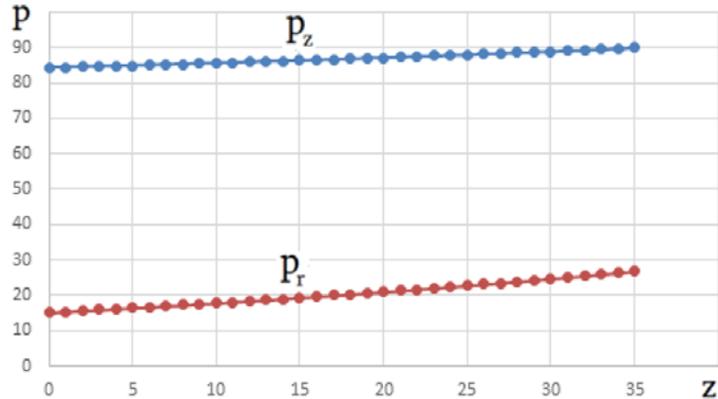
$$\begin{aligned} \ln(a + bp_z) &= \frac{b}{D} z + \ln(a + bp_0) - \frac{b}{D} H, \\ \ln\left(\frac{a + bp_z}{a + bp_0}\right) &= \frac{b}{D} (z - H), \\ \frac{a + bp_z}{a + bp_0} &= e^{\frac{b}{D}(z-H)}, \\ p_z &= \frac{(a + bp_0)e^{\frac{b}{D}(z-H)} - a}{b}. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая принятые в (14) обозначения, из (11) и получим окончательную формулу для определения p_r :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{3p_b}{2-3R} - \frac{p_z(1+3R)}{2-3R}, \\ p_r &= \frac{12fp_b}{4f(2-3R)} - \frac{4f(1+3R)p_z}{4f(2-3R)}, \\ p_r &= \frac{a}{4f} + \frac{bp_z}{4f}, \\ p_r &= \frac{a + bp_z}{4f}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для численных расчетов нужно корректно выбрать величины, которые характеризуют механические свойства порошка, а также коэффициент трения между матрицей и заготовкой, чтобы при решении задачи обеспечивалось выполнение условия положительности бокового давления $p_r > 0$.

Численные расчеты компонентов напряженного состояния проведены в программной среде "Excel" для значений $D = 25\text{мм}$ и $H = 35\text{мм}$ при $d = 40\text{МПа}$, $\beta = 60^\circ$, $R = 0.99$, $p_a = 4\text{МПа}$, $f = 0.05$, $p_0 = 90\text{МПа}$. С помощью полученных данных были построены графики p_z и p_r в зависимости от z (фиг. 5).



Фиг. 5. Графики осевого и бокового давлений

Заключение. Таким образом, изучено напряженное состояние процесса прессования неспеченной порошковой заготовки в жесткой цилиндрической матрице при наличии контактного трения между ней и матрицей. Была использована простая теоретическая формула пластической деформации порошковых материалов для шляпообразной поверхности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера и метод тонких сечений. Получены формулы для определения осевого и бокового давлений в зависимости от текущей высоты матрицы и были построены их графики в зависимости от z .

Из полученных графиков видно, что и осевое и боковое давления наибольшее значение принимают верхней поверхности образца и монотонно убывают вглубь образца, при этом значения бокового давления составляют 19-31% от осевого давления, что находится в пределах экспериментальных данных [12].

Полученные формулы позволяют определить параметры процесса уплотнения по всему объему заготовки (среднее напряжение и пористость), а также произвести расчет прочности пуансона и матрицы, выбора пресса и решать другие практические задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. - М.: Металлургия, 1979. – 232 с.
2. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г. Исследование напряженного состояния полого шара из неспеченного порошкового материала в условиях равномерного трехосного сжатия // ЛНТУ. Міжвузівський збірник "Наукові нотатки" - Луцьк, 2016. Випуск № 53- С.113-118

3. Петросян Г.Л., Арзуманян М.Г., Бабабян А.А. Особенности модифицированной модели текучести Друкера-Прагера в процессах деформирования неспечённых порошковых материалов // Вестник инженерной академии Армении. -2021.- Вып. 18, No2. - С. 211-218.
4. Арзуманян М.Г. Обоснование модифицированной модели текучести Друкера – Прагера для порошковых материалов // Доклады НАН РА. -2022.- Вып. 122, No2.- С.133-140
5. Арзуманян М.Г. Особенности пластического деформирования неспеченных порошковых материалов // Вестник, Механика, машиноведение, машиностроение. НПУА. Сер. -2023. - No2.-С.53-62
6. ABAQUS, 2006. ABAQUS 6.6 Theory Manual. ABAQUS Inc.
7. Han L.H., Elliott J.A., Bentham A.C., Mills A., Amidon G.E., Hancock B.C., 2007. A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders. International Journal of Solids and Structures 45 (2008) 3088–3106.
8. Rottman G. Mechanisches Verhalten beim Trockenpressen – Triaxialversuche an SiC and Stahlpulver zur Untersuchung von Werkstoffmodellen: Dissertation of Doctor of Material Science.- Fraunhofer IWM , Germany, Mai, 2001. – 102 p.
9. Goube O., Riedel H. Numerical simulation of powder die compaction with special consideration of cracking // Powder Metallurgy. – 2000.- Vol. 43, N2.- P. 123-131.
10. Doremus P., Toussaint F., Alvain O. Simple tests and standard procedure for the characterization of green compacted powder // Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes. IOS Press, 2001.- P. 29-41.
11. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов.-М.: Металлургия, 1988.-153 с.
12. Бальшин М.Ю. Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна. - М.: Металлургия, 1972. - 535 с.

Сведения об авторе:

Арзуманян Мартин Галерикович, к.т.н., доцент, кафедра “Машиноведение и Машиностроение”, НПУА. **Адресс:** 0009, Ереван, ул. Теряна, 105.

Тел.: (+37494) 751675, E-mail: arzmartin@rambler.ru

Поступила в редакцию 19 ноября 2025

**О МЕТОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ПОСАДКИ
БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ЛЕГКОГО ТИПА**

Гукасян К.А., Багдасарян А.С.

Ключевые слова: Беспилотные летательные аппараты (БПЛА), амортизационная подушка, парашют, посадка, круглый купол, компрессор.

Ghukasyan K.H., Baghdasaryan A.S.
One optimal way of the project of the light U.A.Vs landing system

Key words: Unmanned aerial vehicles (UAVs), shock-absorbing cushion, parachute, landing, round dome, compressor.

This study focuses on improving the landing system of lightweight UAVs (5 to 15 kg), which consists of a parachute and an amortization cushion.

It was determined that a circular parachute with an umbrella-shaped canopy and a 180 mm diameter hole in the center is preferable. The hole is designed to stabilize the parachute's motion after deployment and ensure a stable vertical descent and landing.

The developed amortization cushion is a rectangular inflatable cushion 40 cm high, supplemented by cylindrical sleeves. Optimal parameters for the cushion and additional sleeves were selected.

**Թեթև տեսակի անօդաչու թռչող սարքերի վայրէջքային համակարգի
օպտիմալ նախագծման մի եղանակի մասին**

Ղուկասյան Կ.Հ., Բաղդասարյան Ա.Ս.

Հիմնաբառեր՝ Անօդաչու թռչող սարքեր (ԱԹՍ), հարվածամեղմիչ բարձիկ, պարաշյուտ, վայրէջքի հարթակ, կլոր գմբեթ, կոմպրեսոր:

Աշխատանքը նվիրված է թեթև ԱԹՍ-ների (5-ից մինչև 15 կգ) վայրէջքի համակարգի կատարելագործմանը, որի բաղկացուցիչ տարրերն են պարաշյուտը և ամորտիզացիոն բարձիկը:

Հաստատվել է, որ նպատակահարմար է օգտագործել կլոր ձևի պարաշյուտ, որն ունի հովանոցաձև գմբեթ՝ կենտրոնում 180 մմ տրամագծով անցքով: Վերջինս նախատեսված է բացվելուց հետո պարաշյուտի տատանումները կայունացնելու, ինչպես նաև կայուն ուղղահայաց իջեցում և վայրէջք ապահովելու համար:

Մշակված ամորտիզացիոն բարձիկն իրենից ներկայացնում է 40 սմ բարձրությամբ ուղղանկյուն փչովի բարձիկ, որը համալրված է զլանաձև թևքերով: Ընտրվել են բարձիկի և հավելյալ թևքերի օպտիմալ պարամետրերը:

Работа посвящена усовершенствованию посадочной системы легких БПЛА (от 5 до 15 кг), составными элементами которой являются парашют и амортизационная подушка.

Установлено, что целесообразно использовать парашют круглой формы, имеющий зонтообразный купол, в центре которого проделано отверстие диаметром 180 мм. Последнее предназначено для стабилизации качки парашюта после его раскрытия и устойчивого вертикального снижения и посадки.

Разработанная амортизационная подушка представляет собой прямоугольную надувную подушку высотой 40 см, которая дополнена цилиндрическими рукавами. Выбраны оптимальные параметры подушки и дополнительных рукавов.

Введение

Авиация в последние годы становится все в большей степени беспилотной. Развитие современных технологий в области аэродинамики, композитных материалов, инерциальных и спутниковых навигационных систем, достижения в области электроники, а также развитие робототехники и компьютерных технологий позволило выйти на качественно новый уровень в создании беспилотных авиационных систем (БАС).

Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) как часть БАС уже нашли свое место в современной деятельности человечества. Среди приоритетных направлений — оборона и спасательные операции, правоохранительная и природоохранная деятельность, научные исследования, экологический мониторинг и др.

Для военных БПЛА можно выделить следующие основные задачи:

1. Разведывательные:

- разведка наземных, воздушных, морских целей, разведка местности;
- радиационная, химическая и биологическая разведка;
- радиотехническая разведка (сбор разведывательной информации на основе приема и анализа электромагнитного излучения).

2. Огневые (ударные):

3. Задачи, обеспечивающие:

- создание радиопомех противнику;
- управление огнем и целеуказание наземным, воздушным и морским огневым средствам;
- оценку результатов нанесенных по противнику ударов;
- ретрансляцию сообщений и данных;
- транспортные задачи.



(а)



(б)



(в)

Рис. 1. Различные типы старта БПЛА самолетного типа:
а) запуск с катапульты; б) запуск "с руки"; в) запуск с пусковой установки.

Ниже приводятся некоторые сведения о состоянии обсуждаемого здесь вопроса.

Известно, что для аппаратов самолетного типа с шасси обычно необходима взлетно-посадочная полоса (ВПП). Для некоторых типов БПЛА без шасси при взлете используют стартовые катапульты (рис. 1а), пусковые устройства (рис. 1в). Есть также самолетные БПЛА легкого класса, запускаемые "с руки" (рис. 1б) [2].

Посадка БПЛА самолетного типа без шасси осуществляется с помощью парашюта, а более безопасную посадку обеспечивает еще и соединенная с фюзеляжем снизу амортизационная подушка.

На рисунке 2 показана посадка БПЛА с двух ракурсов, для наглядного представления парашюта и амортизационной подушки в действии.



Рис. 2. Посадка БПЛА самолетного типа.

Система, предназначенная для безопасного приземления БПЛА легкого типа (с весом до 15 кг), включается в работу, когда оператор переводит БПЛА в режим посадки.

С помощью специальных механизмов (сервомашинки) открывается клапан конического контейнера, где находится парашют (рис. 3). В результате воздействия собственного веса и ветра контейнер отделяется от самолета и начинает падать вниз. Парашют постепенно (в течение 1-2 секунд) наполняется воздухом, а его конический контейнер с помощью веревки остается на куполе парашюта [3].



Рис. 3. Соединение контейнера парашюта с фюзеляжем

В посадочных системах для БПЛА без шасси т.е. с вертикальной посадкой используются парашюты, которые бывают крыльевидные, прямоугольные и с круглым куполом (рис. 4а, 4б, 4в).



(а)



(б)



(в)

Рис. 4. Типы парашюта:

а) - крыльевидный б) - прямоугольный в) - с круглым куполом.

Кроме парашютов на БПЛА при посадке, как отмечалось выше, применяют и надувные подушки (амортизационные подушки), которые, в свою очередь, тоже смягчают приземление БПЛА и предотвращают повреждение планера и оборудования. Амортизационная подушка (рис. 5) представляет собой сшитую из нейлонового материала многослойную подушку. Она находится в сложенном виде в специальном контейнере, находящемся внутри фюзеляжа БПЛА



Рис. 5. Амортизационная подушка во время посадки БПЛА.

Применение подушки было вызвано тем, что при посадках с применением только парашютов происходили множественные повреждения частей и агрегатов БПЛА. Обычно применяется шарообразная подушка с диаметром от 70 см и более, в зависимости от типа БПЛА, изготовленная из ткани толщиной 0,5 мм и с редкой плотностью плетения. Отметим, что применение шарообразных подушек для посадки БПЛА имеет ряд недостатков, так как при ударе о поверхность площадки зачастую происходит перекатывание БПЛА и вследствие этого все равно повреждений было не избежать, особенно при скоростях ветра от 3-5 м/сек [4]. В таких случаях, при ударе о землю, БПЛА повторно отскакивает вверх и той или иной частью ударяется о поверхность площадки и получает повреждение.

Бывают случаи, когда при ударе о землю БПЛА отскакивает вверх и, вследствие наличия еще и горизонтальной скорости, переворачивается на 180° вокруг горизонтальной оси и, ударяясь о землю, получает повреждения.

Изложенное выше указывает на то, что посадочные системы БПЛА легкого типа имеют ряд недостатков. В частности:

- при выполнении посадки данный вид парашюта в раскрытом положении находится под воздействием воздушных потоков и ветра, в результате чего движение в горизонтальной плоскости прямо зависит от направления и скорости ветра (имеет некоторое сопротивление ветру и небольшое его изменение ведет к нарушению устойчивого снижения на посадку),
- сшитая из тонкой ткани и имеющая шарообразную форму амортизационная подушка легко разрушается, рвется и мало обеспечивает безопасную посадку БПЛА, особенно при неустойчивом ветре.

Цель настоящей работы заключается в усовершенствовании посадочных систем БПЛА легкого типа.

Для достижения этой цели были решены следующие основные задачи: обработка и усовершенствование парашюта и амортизационной подушки.

На основе сравнительного анализа имеющихся данных, в проведенных исследованиях нами был выбран парашют с круглым куполом, так как данный тип купола в раскрытом положении имеет нейтральное состояние по отношению к воздушному потоку. Это означает, что движение такого парашюта зависит, в основном, от направления воздушного потока (мало сопротивляется ветру).

Предлагаемая посадочная система присоединяется к самолету (БПЛА) в центре его тяжести, где расположен специальный узел крепления. Парашют со стропами помещается в контейнер конической формы в задней части фюзеляжа самолета (рис. 3).

Места установки контейнера с парашютом и узла крепления парашюта с самолетом выбраны таким образом, чтобы при раскрытии парашюта БПЛА принудительно поворачивался вокруг горизонтальной оси на 180° (самолет вертикально снижается в перевернутом положении, чтобы избежать повреждений элементов конструкции и оборудования, расположенного под ним) и выполняет посадку на «спину».

При проведении исследований было установлено, что парашюту с круглым куполом еще большую устойчивость можно придать, если в центре его купола проделать отверстие диаметром 180 мм (рис. 6).

В связи со сказанным отметим, что выбранные для БПЛА первые парашюты были круглыми. Они просты в конструкции, надежны при эксплуатации и безопасны. Купола парашютов имели форму полусферы, по нижней кромке прикреплены

стропы, на которых висел парашютист и/или груз, а в вершине купола было проделано полюсное отверстие с диаметром 180 мм [5].

Круглые парашюты уменьшают скорость падения исключительно за счёт сопротивления воздуха. При снижении парашютиста во внутренний объём купола заходит воздух и создается избыточное давление. Далее этот воздух должен куда-то деваться. Незначительная его часть просачивается сквозь ткань купола. Остальной воздух выходит из-под кромки, поочередно с разных сторон, раскачивая купол. Раскачивание купола — нежелательное побочное явление, которое может привести к приземлению парашютиста или груза на увеличенной скорости снижения. Для устранения раскачки, как уже отмечалось, на вершине купола делается полюсное отверстие, через которое выходит значительная часть воздуха. Диаметр отверстия купола парашюта может изменяться в зависимости от веса БПЛА и скорости вертикального снижения.



Рис. 6. Парашют с круглым куполом.

Расчет парашюта

Площадь парашюта [6] определяется согласно формуле

$$S = \frac{2mg}{C_d \rho V_y^2}, \text{ м}^2 \quad (1)$$

где

m - вес БПЛА, кг,

g - ускорение свободного падения, м/сек²,

C_d - коэффициент сопротивления парашюта воздуху,

ρ - плотность воздуха, кг/м³,

V_y - вертикальная скорость парашюта при посадке, м/сек.

При проведении экспериментов были использованы значения $m = 5 \div 15$ кг ;

$C_d = 0.75$ [6]; $\rho = 1.2041$ кг/м³ (в нормальных сухих условиях при $T = +20^0$ C);

$V_y = 3 \div 5$ м/сек .

Эксперименты проводились в 3 этапа, где были выбраны:

- $V_y = 3$ м/сек, $m = 5$ кг, $m = 10$ кг, $m = 15$ кг.
- $V_y = 4$ м/сек, $m = 5$ кг, $m = 10$ кг, $m = 15$ кг.
- $V_y = 5$ м/сек, $m = 5$ кг, $m = 10$ кг, $m = 15$ кг.

При проведении испытательных работ, мы пришли к выводу, что для БПЛА с весом 5,10 и 15 кг необходим парашютный купол с площадью не менее 5.5 м^2 .

$$S = \pi(R^2 - r^2), \text{ м}^2$$

где R - радиус купола, r - радиус центрального отверстия купола, величина которого уже была указана выше: 90 мм.

Согласно данным проведенных расчетов в данном случае получается, что $R = 1.32 \text{ м}$.

Обычно длина парашютных веревок [6] выбирается согласно формуле

$$L = (0.8 \div 1.2) D, \text{ м} \quad (2)$$

где D - диаметр купола, величина которого в рассматриваемом случае составляет $D = 2.64 \text{ м}$.

Был выбран $L = 0.83D$.

При скоростях ветра от 3 до 5 м/с и, согласно формуле (2), будут применяться стропы длиной 2.2 м.

Длина переходных тросов была взята 30 см. Общая длина веревки получается $L_{об} = 2.5 \text{ м}$.

Итак, составные части парашюта, это купол в форме зонтика (с площадью $S = 5.5 \text{ м}^2$) (рис. 7), веревки, в количестве 12 штук, длина каждой составляет 2.2 м (рис. 8), переходные тросы, в количестве 2 штук (рис. 9).



Рис. 7. Парашют в закрытом положении.

Теперь обсудим вопрос оптимизации второго элемента системы приземления БПЛА – амортизационной подушки.

В этом случае заменен материал поверхности подушки. Был выбран прочный нейлоновый материал толщиной уже 0.8 мм, в отличие от используемой 0.5 мм.

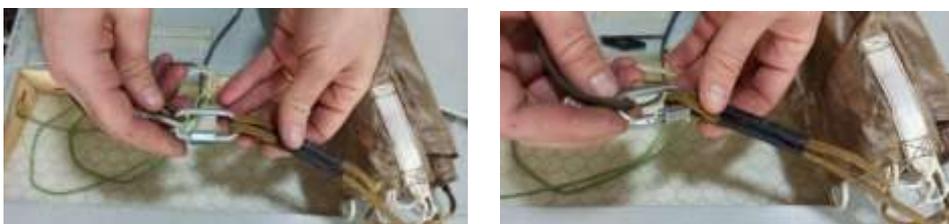


Рис. 9. Переходные тросы парашюта.

Были изменены геометрический вид и размеры подушки. Круглая форма была заменена на прямоугольную, высота надутой подушки составляет 40 см.

На рис. 10а показана ненадутая подушка, на которой видны наклейки и отверстие для накачки воздухом.

На рис. 10б показана не полностью надутая подушка, где видны внутренние швы.

На рис. 10в уже показано полностью надутое состояние подушки, где видна толщина подушки.



Рис. 10. Предлагаемая амортизационная подушка:

а) ненадутая; б) не полностью надутая; в) полностью надутая.

В центре разработанной подушки предусмотрено отверстие диаметром 80 мм, через которое она соединяется с электрическим двигателем винтового компрессора. Внутри вшиты перегородки, на которых сделаны по три 70 миллиметровых отверстия, предназначенные для проникновения воздуха при надувании подушки.

Во время удара о землю, из-за дополнительных перегородок внутри подушки, воздух не сразу выдавливается из подушки.

Таким образом, геометрические параметры амортизационной подушки были выбраны следующими: длина - 120 см, ширина - 70 см, высота - 40 см (когда подушка полностью наполнена воздухом). Проведенные исследования показали, что выбранные геометрические параметры подушки обеспечивают полный обхват верхней части фюзеляжа при приземлении самолета.



Рис. 8. Вертвкн парашюта.

На рис. 10б видны дополнительные трубчатые крылья подушки, необходимость которых была выявлена при проведении экспериментов. В частности, исследуя процесс приземления, было выявлено, что во время удара самолета (БПЛА) о землю происходит 2-3 вертикальных прыжка. Несмотря на то, что колебания этих прыжков затухающие, самолет зачастую получал некоторые повреждения.

Следуя вышеуказанному, было принято решение, направленное на усовершенствование амортизационной подушки. В его конструкцию были добавлены дополнительные трубчатые рукава (крылья) для выпуска воздуха. Они предназначены для постепенного выбрасывания в атмосферу накопившегося дополнительного давления воздуха в подушке, которое возникает в ней при ударе БПЛА о поверхность площади.

Концы трубчатых рукавов закрываются обычными резинками. При ударе о землю, благодаря возникшему при этом избыточному давлению в подушке, резинки отскакивают с рукавов, и давление в ней, с определенной скоростью, высвобождается и повторного отскока летательного аппарата от земли не происходит.



Рис. 11. Электрический винтовой приводной компрессор.

Трубчатые крылья подушки представляют собой цилиндры, которые в данном случае имеют диаметр 23 см и длину 17 см.

Внутри фюзеляжа БПЛА находится электрический винтовой приводной компрессор (рис. 11), который питается от батареи самолета.

При проведении экспериментов выяснилось, что во время посадки подушка надувается воздухом в течение 10-12 секунд.

Электрический компрессор продолжает работать пока БПЛА не коснется земли.

Заключение

Для посадочной системы БПЛА был выбран парашют с круглым куполом и экспериментально установлено, что большую устойчивость парашюту можно придать, если в центре купола будет проделано отверстие определенного диаметра.

В результате проведения сравнительного анализа соответствующих данных был выбран парашют (с оптимальными параметрами) и амортизационная подушка.

Показано, что амортизационная подушка обязательно должна иметь внутренние перегородки и дополнительные боковые цилиндрические трубки (крылья), оптимальные параметры которых были выбраны в результате проведенных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Անօդաչու թռչող սարքերի և FPV դրոնների ղեկավարման դասընթաց: VORON FPV ցրոյէկտ., Երևան, 2023 թ., 102 էջ:
2. Корнеев В.М. Особенности конструкции и эксплуатации беспилотных летательных аппаратов самолетного типа. 2019 г. – 284 стр.
3. Рэндал У. Биард, Тимоти У. МакЛэйн, Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. Техносфера Москва 2015. – 312 стр.
4. Адамян Г.А. Беспилотные авиационные системы: конспект лекций /Г.А. Адамян. – Ер.: ИИО ВАУ, 2020 – 172 стр.
5. <https://aviatus.ru/parachuting/parachutes/round/>
6. Лялин В.В. Парашютные системы. Проблемы, методы и решения.-Москва, 2009. – 575 стр.

Сведения об авторах:

Гукасян Карен – магистр инженерии, Военная академия МО РА им. В. Саргсяна. Начальник авиационного факультета института ВВС им. Маршала А. Ханферянца, полковник, тел.: (+37493) 39-39-71, email: karghukasyan77@mail.ru

Багдасарян Армине – канд., техн., наук, доцент, научный сотрудник Института механики НАН РА, Тел.: (+37493)80-60-11,

email: armine.baghdasaryan.2020@gmail.com

Поступила в редакцию 16 октября 2025

**НОВЫЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТРАЕКТОРИИ НАЗЕМНОГО
ТРАНСПОРТА НА ОСНОВЕ IMU ДАННЫХ**

Микилян М.А., Тоноян В.У.

Ключевые слова: IMU данные, отсутствие GPS данных, фильтр Калмана, фильтрация данных, траектория наземного транспорта.

Mikilyan M., Tonoyan V.

A new approach to draw trajectory of ground vehicles based on IMU data

Keywords: IMU data, GPS data denial, Kalman filter, data filtering, ground vehicle trajectory

This paper focuses on analyzing methods for solving the trajectory construction problem: an existing approach - the Kalman filter and an alternative algorithm we developed. This approach aims to understand their underlying mechanisms and evaluate their effectiveness, advantages, and potential limitations when working with real IMU data.

Միկիլյան Մ., Տոնոյան Վ.

Գետնի վրա շարժվող օբյեկտի հետագծի որոշման նոր մոտեցում՝ հիմնված IMU տվյալների վրա

Հիմնաբառեր՝ IMU տվյալներ, GPS տվյալների բացակայում, Կալմանի ֆիլտր, տվյալների գտում, գետնի վրա շարժվող օբյեկտի հետագիծ

Ներկայացված աշխատանքի նպատակը գետնի վրա շարժվող օբյեկտի հետագծի կառուցման խնդիրը լուծելու մեթոդների համեմատական վերլուծությունն է, որը կատարված է գիտական գրականության մեջ լայնորեն հայտնի Կալմանի ֆիլտրի և մեր կողմից մշակված այլընտրանքային ալգորիթմի հիման վրա: Այս մոտեցման նպատակն է հասկանալ կիրառված մեթոդների հիմքում ընկած մեխանիզմները և գնահատել դրանց արդյունավետությունը, առավելությունները և հնարավոր սահմանափակումները իրական IMU (Իներցիալ չափման միավոր) տվյալների հետ աշխատելիս:

В данной работе анализируются методы решения задачи построения траектории, используя известный фильтр Калмана и разработанный нами альтернативный алгоритм. Целью данного подхода является понимание их базовых механизмов и оценка их эффективности, преимуществ и потенциальных ограничений при работе с реальными данными IMU (Инерциальный Измерительный Блок).

Введение. Задача математического моделирования и оценки траектории движущегося объекта является неотъемлемой составляющей более крупных задач слежения и распознавания движущихся объектов, сопровождения целей. Без сомнения, указанная задача является актуальной и важной областью научных исследований. В последние годы наблюдается активное развитие технологий автономного управления, систем мониторинга и навигации. Задача отслеживания траектории движения объектов в пространстве становится всё более актуальной в самых разных областях: от логистики и транспорта до робототехники, авиации и даже бытовых электронных устройств.

Одной из важнейших задач в таких системах является определение текущего положения и ориентации объекта, то есть его траектории. В большинстве совре-

менных решений для этого используется система глобального позиционирования (GPS). Однако, когда использование GPS невозможно или затруднено, задача определения положения и ориентации движущегося объекта становится более важной.

Для этих целей используются инерциальные измерительные устройства (IMU) – сенсоры, которые фиксируют также линейные ускорения и вращение объекта. С их помощью можно, теоретически, восстановить полную траекторию движения объекта, даже без внешних источников навигации. Однако такой подход сталкивается с рядом трудностей. Накапливающиеся ошибки, шумы и дрейфы, особенно при двойном интегрировании ускорений, могут быстро привести к сильным отклонениям от реальной траектории. Поэтому ключевую роль в системах навигации на базе IMU играют алгоритмы фильтрации и оценки состояния, способные минимизировать ошибки и стабилизировать расчёты.

В научной литературе [1-5] и математической практике [8-11] активно изучаются гибридные модели. Гибридная модель - это математическая модель процесса или явления, основанная на сочетании различных математических объектов. Гибридные системы - математические модели систем управления, в которых “непрерывная динамика, порождаемая в каждый момент времени одной из априорно заданного набора непрерывных систем, перемежается с дискретными операциями, подающими команды либо на мгновенное переключение с одной системы на другую, либо на мгновенную перестройку с заданных текущих координат на другие координаты, либо на то и другое одновременно”. Таким образом, решение задачи для нелинейной системы может быть заменено решением такой же задачи для гибридной системы. Гибридные системы встречаются в прикладных областях электроэнергетики, авиационного, автомобилестроения, обеспечения безопасности движения.

В этой связи особый интерес представляют алгоритмы фильтрации, не требующие большого количества вычислительных ресурсов, но при этом обеспечивающие надёжную работу в реальном времени. Одним из таких алгоритмов является фильтр Калмана [1,7], разработанный специально для обработки числовых данных. Он использует методы градиентного спуска и работу с углами Эйлера или кватернионами в упрощённой двумерной модели, что позволяет с высокой точностью определять ориентацию объекта на основе доступных измерений.

В современных исследованиях [12-17] особое внимание уделяется также адаптивным методам, способным своевременно обнаруживать момент изменения режима движения и перестраивать модель в соответствии с новой динамикой объекта. Это особенно важно в задачах автономного вождения и робототехники, где даже незначительная ошибка в оценке положения может привести к серьёзным последствиям. Таким образом, проблема построения точной, адаптивной и эффективной системы оценки траектории на основе IMU является актуальной и практически значимой.

Целью данной работы является: изучение алгоритма фильтра Калмана и его практическое применение для вычисления траектории движения наземного транспорта; представление нового алгоритма построения траектории движения наземного транспорта, а также вычисление длины пройденной траектории; сравнение результатов этого алгоритма с уже существующими решениями данной проблемы, такими как фильтр Калмана. Планируется рассмотреть теоретические основы работы с IMU, разобраться в математических моделях движения, способных на основе углов поворота и ускорений восстанавливать траекторию движения объекта во времени.

В данной работе делается упор на анализ методов решения задачи построения траектории: уже существующего подхода - фильтра Калмана и альтернативного, нами выведенного алгоритма, с целью понять их внутренние механизмы, оценить их эффективность, преимущества и возможные ограничения при работе с реальными ИМУ-данными. В рамках работы был разработан альтернативный подход к определению траектории движения наземного объекта, позволяющий также оценивать пройденное расстояние. Ключевая особенность предложенного метода заключается в использовании модифицированной формулы, основанной на преобразовании формулы усиления, которая внедряется на одном из этапов алгоритма. Согласно общепринятым научным представлениям, для подавления шума в данных ускорения эффективно применять фильтр нижних частот, в то время как к ориентационным данным на основе углов Эйлера подходит фильтрация верхних частот. После этого ускорения пересчитываются с учетом текущей ориентации с помощью матрицы поворота. На основании этих скорректированных данных проводится двойное интегрирование, в результате чего вычисляются координаты и расстояние. Однако, как показано как в научных публикациях, так и в ходе собственных экспериментов, такой подход подвержен значительным ошибкам, в особенности из-за накопления дрейфа при расчете скорости. В этой статье предлагается метод фильтрации данных ускорения, чтобы сделать данные ускорения доступными для интегрирования.

Модель траектории движения объекта. Модели движения являются простым типом предиктора и довольно распространены среди простых систем. Цель моделей движения — предсказать следующую позицию на основе ряда прошлых наблюдений. Они могут не использовать ускорение и могут быть выражены как

$$s(t+1) = s(t) + v(t) \cdot t,$$

где t – текущее время, $s(t+1)$ - ожидаемое положение на следующем временном шаге, $s(t)$ - положение на текущем временном шаге, а $v(t)$ - скорость на текущем временном шаге. Для простейшей реализации,

$$v(t+1) = \frac{s(t+1) - s(t)}{t}.$$

Предположим, что выбор данных начинается в момент времени t_0 . Интегрируя полученные данные, получим расчетное соотношение между перемещением $s(t)$, скоростью $v(t)$ и ускорением $a(t)$ в области непрерывного времени:

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + s(t_0) \tag{1}$$

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau + v(t_0) \tag{2}$$

где $s(t_0)$ – накопительное смещение от 0 до t_0 , $v(t_0)$ – скорость движения системы при t_0 . Так как выходные из ИМУ данные являются дискретными, то вместо формул (1) и (2) должны воспользоваться квадратурными формулами, например, формулой трапеции. Принимая $s(t_0) = 0$ и $v(t_0) = 0$, для $s(t)$ получим:

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau = \frac{v(t_0) + v(t_1)}{2} (t_1 - t_0) + \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2} (t_2 - t_1) + \dots + \frac{v(t_{N-1}) + v(t_N)}{2} (t_N - t_{N-1}) \quad (3)$$

Предполагая, что $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_N - t_{N-1} = \Delta t$, то при $N > 1$ получим

$$s(t) = \sum_{k=1}^N \frac{v(t_k) + v(t_{k-1})}{2} \Delta t \quad (4)$$

В дискретной области уравнение (4) принимает вид:

$$s[N] = \sum_{k=1}^N \frac{v[k] + v[k-1]}{2} \Delta t \quad (5)$$

когда $N > 1$, таким образом,

$$v[N] = \sum_{k=1}^N \frac{a[k] + a[k-1]}{2} \Delta t = v[0] + \frac{1}{2} (a[0] + a[N]) \Delta t + (a[1] + a[2] + \dots + a[N-1]) \Delta t \quad (6)$$

$$s[N] = \sum_{k=1}^N \frac{v[k] + v[k-1]}{2} \Delta t = s[0] + \frac{1}{2} (v[0] + v[N]) \Delta t + (v[1] + v[2] + \dots + v[N-1]) \Delta t \quad (7)$$

Тогда, смещение объекта по одной оси представится в виде:

$$s[N] = N \cdot v[0] \cdot [(N-1) \cdot a[1] + (N-2) \cdot a[2] + \dots + v[N-1]] \cdot \Delta t^2 + \frac{1}{4} (a[0] + a[N]) \cdot \Delta t^2 \quad (8)$$

Таким образом, после получения начального ускорения от ИМУ и вычисления скорости, по формуле (8) вычисляется смещение. Однако, для больших N , применение этого уравнения приводит к огромной вычислительной нагрузке на систему компьютера, поскольку системе необходимо выделять огромные источники памяти для хранения данных ускорения с момента времени от 0 до N . Кроме того, система должна повторить все предыдущие расчеты относительно ускорений, чтобы обновить смещение движения объекта.

Из уравнения (6) получим

$$v[N] - v[N-1] = \frac{a[N] + a[N-1]}{2} \Delta t \quad (9)$$

$$\begin{aligned} s[N] - s[N-1] &= \frac{v[N] + v[N-1]}{2} \Delta t = \\ &= v[N-1] \cdot \Delta t + \frac{1}{4} (a[N-1] + a[N]) \cdot \Delta t^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) представим в виде:

$$v[N] = v[N-1] + \frac{a[N] + a[N-1]}{2} \Delta t \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s[N] &= s[N-1] + \frac{v[N] + v[N-1]}{2} \Delta t = \\ &= s[N-1] + v[N-1] \cdot \Delta t + \frac{1}{4} (a[N-1] + a[N]) \cdot \Delta t^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Из формул (11) и (12) получим, что скорость объекта $v[N]$ и перемещение движения $s[N]$ можно вычислить рекурсивно. IMU дает данные ускорений a_x , a_y и a_z на X , Y и Z декартовых осях. На основании уравнения (11), скорость объекта вдоль X , Y и Z осей представляются формулами:

$$v_x[t] = \bar{v}_x[t - \Delta t] + \frac{a_x[t] + a_x[t - \Delta t]}{2} \Delta t \quad (13)$$

$$v_y[t] = \bar{v}_y[t - \Delta t] + \frac{a_y[t] + a_y[t - \Delta t]}{2} \Delta t \quad (14)$$

$$v_z[t] = \bar{v}_z[t - \Delta t] + \frac{a_z[t] + a_z[t - \Delta t]}{2} \Delta t \quad (15)$$

Скорость объекта в трехмерном пространстве вычисляется по формуле:

$$v[t] = \bar{v}_x[t] + \bar{v}_y[t] + \bar{v}_z[t] \quad (16)$$

Аналогично, перемещение объекта вдоль осей X , Y и Z – представляется в форме:

$$s_x[t] = s_x[t - \Delta t] + v_x[t - \Delta t] \cdot \Delta t + \frac{1}{4} (a_x[t - \Delta t] + a_x[t]) \cdot \Delta t^2 \quad (17)$$

$$s_y[t] = s_y[t - \Delta t] + v_y[t - \Delta t] \cdot \Delta t + \frac{1}{4} (a_y[t - \Delta t] + a_y[t]) \cdot \Delta t^2 \quad (18)$$

$$s_z[t] = s_z[t - \Delta t] + v_z[t - \Delta t] \cdot \Delta t + \frac{1}{4} (a_z[t - \Delta t] + a_z[t]) \cdot \Delta t^2 \quad (19)$$

В интервале времени $[t - \Delta t, t]$, перемещение объекта в пространстве равно:

$$s_{\Delta}[t] = \sqrt{(s_x[t] - s_x[t - \Delta t])^2 + (s_y[t] - s_y[t - \Delta t])^2 + (s_z[t] - s_z[t - \Delta t])^2} \quad (20)$$

Итак, в момент времени t , пространственная координата объекта равна $(s_x[t], s_y[t], s_z[t])$. В пространственной системе координат траекторию объекта можно построить, соединив все точки пространственных координат из t_0 до t_N .

Поскольку система слежения основана на двойном интегрировании ускорения, то ошибки измерений IMU приводят к неверным результатам интегрирования и накопленному смещению во время интегрирования. Даже минимальные ошибки измерений приведут к огромным ошибкам вычислений, что приведет к низкой точности результатов отслеживания.

Основная идея фильтра Калмана. Три последовательных вращения координат могут описать любое вращение. Рассмотрим тройные повороты, в которых первый поворот представляет собой угол ψ вокруг оси z , второй поворот представляет собой угол θ вокруг оси y , а третий поворот - угол φ вокруг оси x . Не вдаваясь в подробности, расположим эти углы в трехмерном векторе, называемом вектором углов Эйлера и определяемым вектором $(\varphi, \theta, \psi)^T$. Функция, которая сопоставляет вектор углов Эйлера с соответствующей матрицей вращения имеет следующий вид

$$R_{zx}(\varphi, \theta, \psi) = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\varphi), \quad (21)$$

где

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Известно [6,7], что если $b \in R^3$ – вектор в мировых координатах и $a \in R^3$ – тот же вектор, выраженный в координатах, фиксированных на теле, то выполняются следующие соотношения:

$$a = R_{zx}(\varphi, \theta, \psi) b \quad (22)$$

или

$$b = R_{zx}(\varphi, \theta, \psi)^T a. \quad (23)$$

Основная идея фильтра Калмана заключается в оптимальной оценке состояния динамической системы, используя серию наблюдений, которые могут быть подвержены случайным ошибкам (шумам). Это достигается за счет комбинирования предсказаний системы и реальных измерений, чтобы минимизировать ошибку оценки. Метод используется в случае, когда наблюдения могут быть неполными или

неточными, а также когда система подвергается случайным изменениям, что делает традиционные методы недостаточно точными.

Фильтр Калмана работает с динамическими системами, которые могут быть описаны линейными уравнениями состояния и наблюдения. Система описывается следующими уравнениями:

1. Уравнение состояния:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k . \quad (24)$$

где:

x_k - вектор состояния системы на шаге k ,

A_k - матрица перехода состояния, описывающая, как состояние системы изменяется во времени,

B_k - матрица, учитывающая влияние управляющих воздействий u_k ,

w_k - шум процесса, представляющий случайные изменения в системе (обычно предполагается, что w_k имеет нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей Q_k).

2. Уравнение наблюдения:

$$z_k = H_k x_k + v_k . \quad (25)$$

где:

z_k - вектор наблюдений на шаге k ,

H_k - матрица наблюдения, которая связывает состояние системы с наблюдаемыми величинами,

v_k - шум наблюдений, также предполагающий нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей R_k .

3. Прогнозирование

На каждом шаге фильтра выполняется прогноз состояния и ковариации ошибки:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_k \\ P_k^- &= A_k P_{k-1} A_k^T + Q_k \end{aligned} \quad (26)$$

где

\hat{x}_k^- - предсказанное состояние,

P_k^- - предсказанная ковариация ошибки.

4. Коррекция:

Когда становятся доступны новые данные z_k , фильтр корректирует предсказание, используя формулу обновления:

$$\begin{aligned}
K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
P_k &= (I - K_k H_k) P_k^-
\end{aligned} \tag{27}$$

где

K_k - матрица усиления (или коэффициент Калмана), которая контролирует насколько сильно обновление влияет на оценку состояния,

\hat{x}_k - итоговая оценка после коррекции,

P_k - ковариация ошибки после коррекции.

Фильтр Калмана минимизирует ошибку состояния, основанную на предсказаниях и реальных измерениях, и адаптируется к изменяющимся условиям. Это делает его мощным инструментом для применения в задачах, где необходима высокая точность и надежность в условиях неопределенности и шума, например, в навигационных системах, робототехнике и динамическом управлении. Однако важным недостатком фильтра Калмана является

- при решении задач позиционирования нужно иметь два источника данных. Так как мы рассматриваем случай, когда второго источника (например, GPS) нет, то этот фильтр, который детально исследован в литературе, невозможно применить. Поэтому, для фильтрации данных нами выведена формула и произведены десятки тестов для проверки полученной формулы,
- огромное количество арифметических операций, которое приводит к замедлению полученных результатов. В связи с этим возникает вопрос выработки нового вычислительного метода, который дает нужный результат, используя значительно меньшее количество арифметических операций.

Основная идея разработанного метода. Фильтрация данных. Одной из важных особенностей, которую необходимо учесть, это то, что используемые алгоритмы фильтрации не могут быть слишком сложными, чтобы процессор компьютера не замедлялся. Фильтры обычно используются для стабилизации данных, повышения точности и удаления шума. Датчик, который подвергается вибрации или электромагнитным силам, может выдавать неверный выходной сигнал и делать собираемые им данные непригодными для использования.

В литературе известны фильтры нижних и верхних частот [10,11]. Принцип работы фильтра нижних частот заключается в реализации фильтра нижних частот на показаниях акселерометра и фильтра верхних частот на гироскопе с последующим объединением отфильтрованных данных. Задача фильтров нижних частот - отфильтровывать слишком высокие сигналы и пропускать только частоты ниже выбранного числа, фильтры верхних частот делают противоположное относительно данных гироскопа. Это означает, что фильтр верхних частот пропускает только частоты выше выбранного числа, что делает фильтр нижних частот дополнением к фильтру верхних частот.

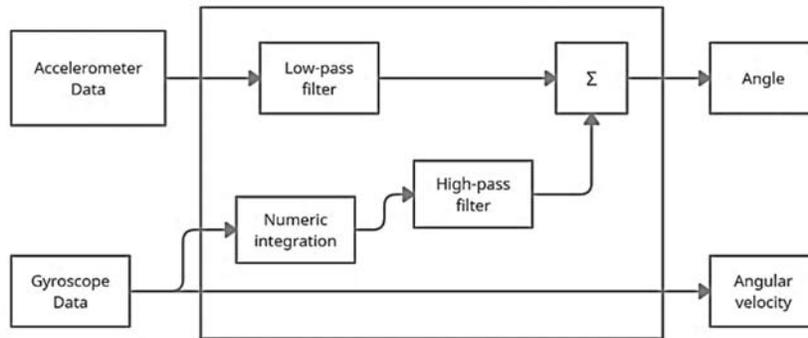


Рис.1. Схема работы фильтра нижних и верхних частот

В настоящей работе предложен новый подход к построению фильтра данных на основе фильтров нижних и верхних частот. С целью уменьшения помех, которые возникают при передаче данных с IMU датчика на контроллер, пропустим полученный сигнал акселерометра через фильтры, описание которых приведено ниже.

При применении фильтра нижних и верхних частот, важным является вычисление частоты среза (cut-off frequency). Частота среза фильтра - это частота, на которой затухание сигнала достигает определенного минимального значения, или составляет $1/\sqrt{2} (\approx 0,71)$ в линейном масштабе. То есть амплитуда сигнала на частоте среза составляет 71% от входного значения.

Так как при вычислениях используются несколько (в основном три по трем координатным осям) наборов данных акселерометра, то при обработки данных по каждой оси и по каждому направлению в фильтре нижних частот выбираем минимальное значение частоты пакета данных. Основываясь на многочисленных опытах и тестовых данных, выведена формула вычисления частоты среза, которая имеет следующий вид

$$\text{cut_off} = \min \left| \text{Re}(\text{max_peak}_x), \text{Re}(\text{max_peak}_y), \text{Re}(\text{max_peak}_z) \right|, \quad (28)$$

где max_peak_i – максимальное из значений данных в координатных направлениях $i = x, y, z$.

После переходим к вычислению параметра усиления p . Этот коэффициент вычисляется следующей формулой, которая выведена на основе многочисленных тестовых примеров, при которых расчеты показывали, что она дает приемлемый результат и отличается от соответствующей формулы метода Калмана своей простой формой и незначительным количеством арифметических операций.

$$p = \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot N \cdot M}, \quad (29)$$

где N - число отсчетов, M - максимум среди минимальных амплитуд ускорений по трем направлениям.

Для анализа выведенной формулы рассмотрены конкретные данные. Применяя ее относительно собранных многочисленных данных, и, для сравнения, применяя относительно этих данных формулы (1)-(19) и сравнивая с реальными результатами, выяснилось, что, например, если реальный путь движущегося объекта составляет 6.1 км, то численные расчеты дают примерно 5.5 км, то есть разница составляет не более 600 метров, т.е. примерно 10%. Для сравнения отметим, что в работах [1,2] отмечено, что при соответствующих расчетах погрешность фильтра Калмана составляет 13%.

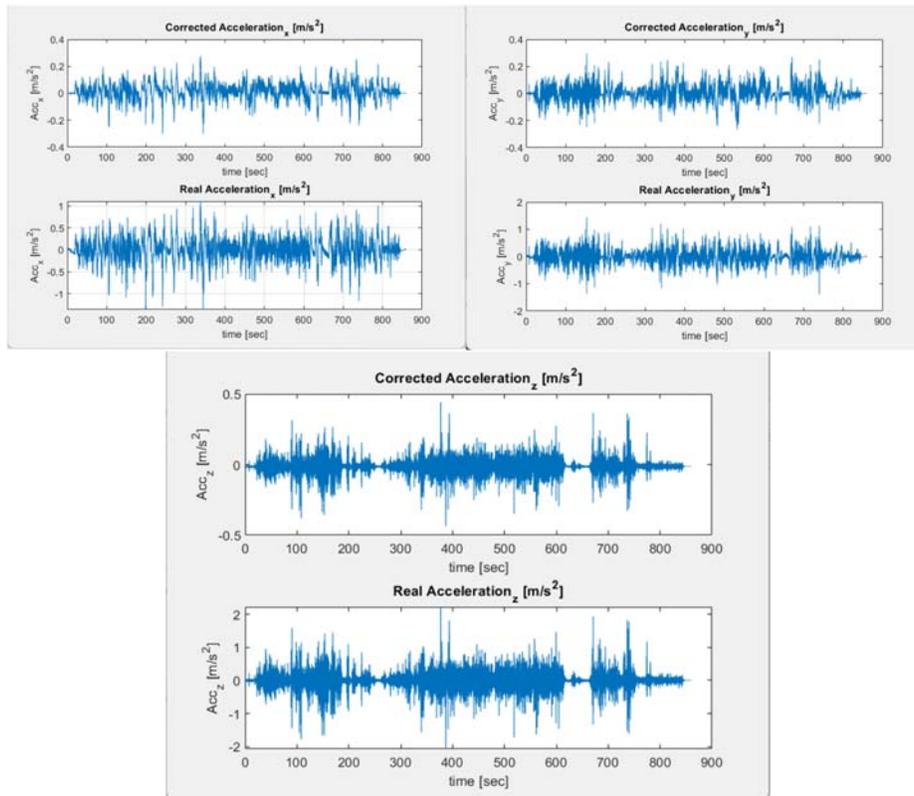


Рис.2. Данные ускорения по трем координатным направлениям до и после фильтрации

На рис.2 приведены графики данных, полученных из IMU датчика и обработанных приведенным методом. Судя по рис.2, ускорение колеблется случайным образом с максимальным значением в 1 м/с^2 . Это означает, что объект имеет максимальное смещение на 1 м, даже когда он неподвижен. А это значит, что независимо от точности вычислений, ошибки и шум будут оказывать большое влияние на точность системы отслеживания. Для устранения шума и повышения точности применили полученную формулу, после чего данные ускорения можно будет использовать для интегрирования. После фильтрации данных ускорений, их приводим к глобальной системе координат по формулам (20)-(23).

Кроме того, разработан также способ сглаживания скорости, убирания дрейфа и высокочастотных шумов. Результат приведен на рис.3, который показывает, что соответствующий результат, полученный методом Калмана (24)-(27), не устраняет явление дрейфа.

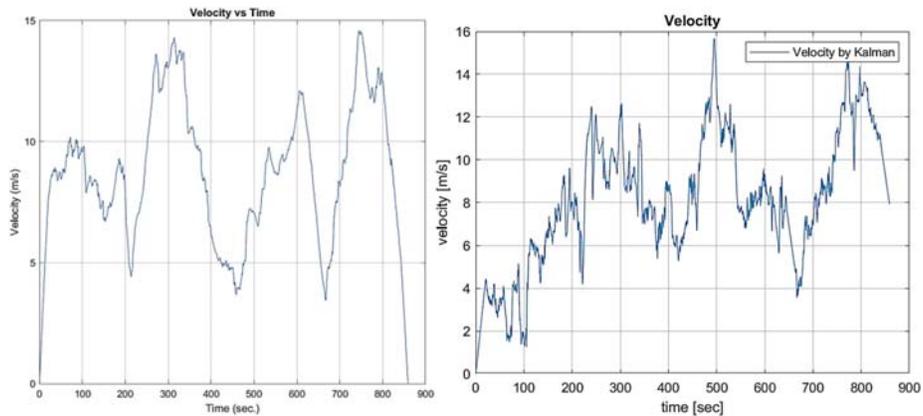


Рис.3. Исключение дрейфа

После фильтрации данных и исключения дрейфа на основе тестовых данных по формуле (19) построены траектории наземного транспорта на плоскости и для сравнения приведены соответствующие пути из Google Map. Нужно отметить, что так как одной из целей разработанного метода было использование минимального количества данных IMU и при расчетах угловые скорости не были учтены, то ориентация построенных графиков может не совпадать с ориентацией пути на карте.

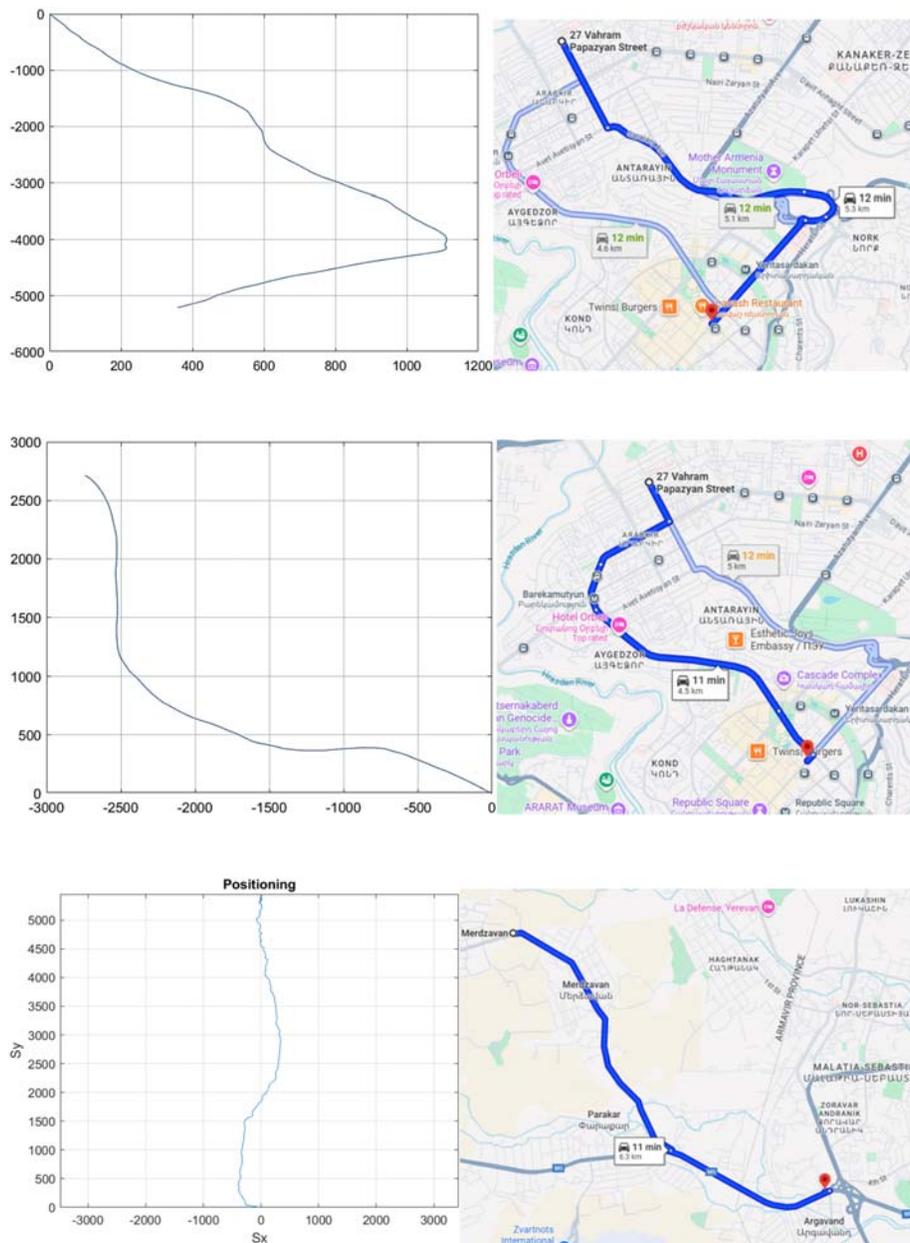


Рис.4. Построение траектории и их сравнение с реальными на карте

Пошаговое описание метода.

- Масштабирование. Переход из координатной системы на теле к глобальной с использованием углов Эйлера.
- Преобразование Фурье относительно ускорений. Находим, из каких частотных компонент состоит сигнал в каждом направлении.
- Спектральная фильтрация. Обнуляются низкочастотные составляющие спектра (подавление "дрейфа" и шумов низкой частоты).
- Обратное преобразование Фурье. Преобразуем очищенный сигнал обратно во временную область.
- Зануление первых отсчетов. Устраняется начальный шум после фильтрации.
- Обрезка интервала. Убираем начальное время, т.е. время, когда объект трогается, разгоняется и т. д., так как в это время дрейфа очень много из-за больших колебаний.
- Оценка максимальных пиков (колебаний). Cut-off выбирается как 0.75 от максимального ускорения. Мы их удаляем. Вычисления показывают, что 0.75 лучший коэффициент на статистической основе.
- Проектирование фильтров High pass/low pass. Проектируются фильтры, характеризуется максимально гладкой амплитудно-частотной характеристикой в полосе пропускания.
- Разделение сигнала на низкочастотные и высокочастотные составляющие.
- Вычисление параметра усиления. Вычисляется коэффициент смешивания на основе минимальной амплитуды спектра.
- Смешивание низкочастотных и высокочастотных частей. Восстанавливается сигнал с учетом вклада этих частот.
- Переход к глобальной системе координат. Применение матриц вращения.
- Интегрирование ускорений для получения скоростей. Используются формулы (1)-(19).
- Фильтрация скоростей. Сглаживание скоростей, убирание дрейфа и шумов.
- Коррекция скоростей. Устраняется накопленная ошибка в интегрировании.
- Вычисление пути. Интегрируются скорости по формулам (1)-(19), чтобы получить пройденный путь.
- Расчет длины пройденного пути и построение графиков.

Основные результаты. Можно отметить, что траектория, рассчитанная предложенным методом, визуально совпадает с маршрутом, отображённым на карте. Кроме того, итоговое значение пройденной дистанции соответствует ожидаемому и погрешность составляет не больше 8%. Это позволяет заключить, что представленный подход обеспечивает не только высокую точность, но и демонстрирует лучшую производительность по сравнению с решением, полученным на основе традиционного фильтра Калмана.

Предложенный нами метод демонстрирует лучшие характеристики по сравнению с фильтром Калмана, особенно в плане скорости обработки и устойчивости к ошибкам. В отличие от фильтра Калмана, наш алгоритм не требует построения сложных математических моделей, что значительно упрощает его реализацию и ускоряет работу. Кроме того, в отличие от простых фильтров вроде low-pass и high-

pass, наш подход позволяет эффективно бороться с дрейфом, не теряя важных деталей движения. Благодаря предварительной очистке данных от смещений до интегрирования, удаётся повысить точность восстановления траектории и снизить влияние накопленных погрешностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman, R. E. 1960. "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering, pp. 35-45 (March 1960).
2. Bar-Shalom, Y., & Li, X.-R. (1993). Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software: ArtecHouse, Inc.
3. Gelb, A. 1974. Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, MA.
4. Leland, R. P. (2005). Mechanical-thermal noise in MEMS gyroscopes. IEEE Sensors Journal, 5(3), 493–500. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2005.844538>
5. Brown, R. G., & Hwang, P. Y. C. (1996). Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: with MATLAB Exercises and Solutions (Third ed.): Wiley & Sons, Inc.
6. Pan, T.; Kuo, C.; Hu, M. A noise reduction method for IMU and its application on handwriting trajectory reconstruction. In Proceedings of the IEEE International Conference on Multimedia Expo Workshops, Seattle, WA, USA, 11–15 July 2016; pp. 1–6.
7. Zhang, P., Gu, J., Milios, E. E., & Huynh, P. (2005). Navigation with IMU/GPS/digital compass with unscented Kalman filter. IEEE International Conference Mechatronics and Automation, 2005, 3(July), 1497–1502. <https://doi.org/10.1109/ICMA.2005.1626777>
8. Welch, G., & Bishop, G. (2006). An Introduction to the Kalman Filter. In Practice, 7(1), 1–16. <https://doi.org/10.1.1.117.6808>
9. Grewal, M., S., & Andrews, A., P. (2001). Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB (Second ed.). New York, NY USA: John Wiley & Sons, Inc.
10. Information Systems, Vol. 10, No. 3, March 2013, pp. 131-143. doi: 10.2514/1.54899.
11. Gross, J., Gu, Y., Rhudy, M., Gururajan, S., and Napolitano, M., "Flight Test Evaluation of GPS/INS Sensor Fusion Algorithms for Attitude Estimation," IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, Vol. 48, No. 3, July 2012, pp. 2128-2139.
12. Liu Y., Fan X., Wu C. Lv, Li L., and D. Ding An innovative information fusion method with adaptive Kalman filter for integrated INS/GPS navigation of autonomous vehicles," Mechanical systems and signal processing, vol. 100, pp. 605–616, 2018.
13. Park G. Optimal vehicle position estimation using adaptive unscented Kalman filter based on sensor fusion, Mechatronics, vol. 99, pp. 103144, 2024.
14. El-Sheimy, N.; Youssef, A. Inertial sensors technologies for navigation applications: State of the art and future trends. Satell. Navig. 2020, 1, 2.
15. Fang, W.; Jiang, J.; Lu, S.; Gong, Y.; Tao, Y.; Tang, Y.; Yan, P.; Luo, H.; Liu, J. A LSTM Algorithm Estimating Pseudo Measurements for Aiding INS during GNSS Signal Outages. Remote Sens. 2020, 12, 256.
16. Rowida Meligy, Anton R. Ahmad, Nariman E. Elbaly, Arafa S. Sobh and Sherif A. Elatraby Development of an Autonomous Unmanned Ground Vehicle for Artistic Landscaping. Eng. Proc. 2025, 118(1), 9.

17. Clyde Sanmig Domin D. Corpuz, Gilroy A. Cuaycong, Raffaello Giuliano D. Diño, Raphael C. Estacio, Gregg Angelo C. Señar, Alvin Y. Chua A Novel Cost-Effective Unmanned Ground Vehicle Platform for Robotics Education. HighTech and Innovation Journal, vol. 6 No. 1 (2025), p.303-327

Информация об авторах

Марине А. Микилян – ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА, тел.: (+374 91) 191129, E-mail: mikilyan@sci.am

Ваграм У. Тоноян – научный сотрудник группы грантов Института механики НАН РА, тел.: (+374 955) 555076, E-mail: var10email@gmail.com

Поступила в редакцию 15 октября 2025

**КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ,
ПОРОЖДЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ ВЕБЕРА – ШАФХЕЙТЛИНА, В
ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.**

Саакян А.В.

Ключевые слова: интеграл Вебера-Шафхейтлина, квадратурная формула, осесимметричная контактная задача, функции Бесселя, механические квадратуры.

Sahakyan A.V.

Quadrature formula for an integral with a kernel generated by the Weber-Schafheitlin integral, applied to solving an axisymmetric contact problem of elasticity theory

Keywords: Weber-Schafheitlin integral, quadrature rule, axisymmetric contact problem, Bessel functions, mechanical quadratures

A quadrature formula is constructed for calculating integrals with a kernel in the form of a discontinuous Weber-Schafheitlin integral. It is shown that for the order n of the quadrature formula, the formula is satisfied exactly for odd polynomials of order $2n - 1$. As an example, an axisymmetric contact problem of pressing a smooth stamp into an elastic layer whose lower edge is rigidly fixed was solved and both the convergence and the efficiency of applying the mechanical quadrature method using the constructed quadrature formula are shown.

Սահակյան Ա.Վ.

Վեբեր-Շաֆհեյտլինի ինտեգրալով տրվող կորիզով ինտեգրալի համար քառակուսացման բանաձևի կիրառությունը առաձգականության տեսության առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի լուծման համար

Հիմնաբաներ՝ Վեբեր-Շաֆհեյտլինի ինտեգրալ, քառակուսացման բանաձև, առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդիր, Բեսելի ֆունկցիաներ, մեխանիկական քառակուսացման բանաձևեր

Կառուցված է քառակուսացման բանաձև Վեբեր-Շաֆհեյտլինի խզվող ինտեգրալ տեսք ունեցող կորիզով ինտեգրալի հաշվման համար: Ցույց է տրված, որ n կարգի քառակուսացման բանաձևը ճշգրիտ է $2n - 1$ կարգի կենտ բազմանդամների համար: Ստորին եզրով կոշտ ամրակցված առաձգական շերտի մեջ ողորկ շտամպի մխրճման առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի լուծման օրինակի վրա ցույց են տրված կառուցված բանաձևի հիման վրա մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի մեթոդի զուգամիտությունը և արդյունավետությունը:

Построена квадратурная формула для вычисления интегралов с ядром в виде разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина. Показано, что при порядке квадратурной формулы n формула выполняется точно для нечетных многочленов порядка $2n - 1$. На примере решения осесимметричной контактной задачи о вдавлении гладкого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко закреплена, показаны как сходимость, так и эффективность применения метода механических квадратур с использованием построенной квадратурной формулы.

Введение. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений начали интенсивно развиваться с середины XX века. Среди первых работ в этом направлении отметим работы [1-9]. В дальнейшем было выполнено огромное

количество работ, посвященных приближенному вычислению сингулярных интегралов и решению интегральных уравнений, содержащих такие интегралы, отметим лишь небольшую часть из работ, опубликованных после 2000-ого года [10-26]. Несомненно, этот перечень является далеко неполным и его можно было бы продолжить.

Несмотря на такое большое количество работ по приближенным методам решения сингулярных интегральных уравнений, интерес к этой проблеме не убывает и продолжает оставаться на повестке дня.

В настоящей работе предлагается квадратурная формула для вычисления интеграла с ядром, порожденным разрывным интегралом Вебера-Шафхейтлина, тем самым и возможность решения осесимметричных задач методом механических квадратур. Известно, что осесимметричные задачи теории упругости решаются, как правило, или в тороидальных координатах, например [27, 28], или при помощи оператора вращения, например [29-32]. В обоих случаях используются сложные преобразования, иногда приводящие и к замкнутым решениям, которые, однако, достаточно сложны для численного анализа. На примере осесимметричной контактной задачи о вдавлении гладкого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко закреплена, показана эффективность применения метода механических квадратур. Рассмотрен случай, когда основание штампа полностью контактирует со слоем и, следовательно, размеры зоны контакта подлежат определению. При помощи предлагаемой квадратурной формулы проведен детальный численный анализ задачи.

1. Квадратурная формула. Пусть имеем интеграл

$$I_v^\gamma(r) = \int_0^1 W_v^\gamma(r, \rho) (1 - \rho^2)^{\gamma-1} \rho^\nu f(\rho) d\rho \quad (1)$$

где

$$W_v^\gamma(r, \rho) = \int_0^\infty J_\nu(rt) J_\nu(\rho t) t^{2\gamma-1} dt \quad \left(\operatorname{Re} \nu \geq 0; \gamma = \mu + \frac{1}{2}; |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

разрывной интеграл Вебера-Шафхейтлина достаточно общего вида, $J_\nu(r)$ -функция Бесселя первого рода, $f(r)$ удовлетворяет условию Гельдера-Липшица на отрезке $[0, 1]$.

Основой для построения квадратурной формулы для указанного интеграла является спектральное соотношение, полученное в [33, 34],

$$\int_0^1 W_v^\gamma(r, \rho) (1 - \rho^2)^{\gamma-1} \rho^{\nu+1} T_n^{(\nu, \gamma-1)}(\rho) d\rho = \lambda_{\nu n}^\gamma r^\nu T_n^{(\nu, \gamma-1)}(r) \quad (3)$$

$$\left(\operatorname{Re} \nu \geq 0; \gamma = \mu + \frac{1}{2}; |\operatorname{Re} \mu| < \frac{1}{2} \right)$$

где

$$T_n^{(v,\gamma-1)}(\rho) = P_n^{(v,\gamma-1)}(1-2\rho^2); \quad \lambda_{v_n}^\gamma = \frac{2^{2(\gamma-1)}\Gamma(n+v+\gamma)\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+v+1)\Gamma(n+1)};$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ - многочлен Якоби.

Имея в виду спектральное соотношение (3), подынтегральную функцию $f(\rho)$ аппроксимируем интерполяционным многочленом с узлами в корнях многочлена $T_n^{(v,\gamma-1)}(r)$. Из представления многочлена $T_n^{(v,\gamma-1)}(r)$ очевидным образом следует, что он четный и имеет $2n$ корней $\pm x_i$ ($i=1, n$). Следовательно, интерполяционный многочлен можно выписать в следующем виде:

$$f(r) = -\frac{1}{2(n+v+\gamma)} \sum_{i=1}^n \left[\frac{f(x_i)}{(r-x_i)} - \frac{f(-x_i)}{(r+x_i)} \right] \frac{T_n^{(v,\gamma-1)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(x_i)} \quad (4)$$

Здесь

$$x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad T_n^{(v,\gamma-1)}(x_i) = P_n^{(v,\gamma-1)}(\xi_i) = 0 \quad (i=1, n),$$

а также использовано выражение для производной от многочлена $T_n^{(v,\gamma-1)}(r)$:

$$\frac{d}{dr} T_n^{(v,\gamma-1)}(r) = -2r(n+v+\gamma) T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(r)$$

Функцию $f(r)$, определенную на $(0,1)$, продолжим на $(-1,0)$ нечетным образом. Тогда, из формулы (4) будем иметь:

$$f(r) = -\frac{r}{(n+v+\gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{(r^2-x_i^2)} \frac{T_n^{(v,\gamma-1)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(v+1,\gamma)}(x_i)} \quad (5)$$

Воспользуемся формулой Кристоффеля-Дарбу для многочленов Якоби [35]

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(y)}{h_m^{(\alpha,\beta)}} = \frac{k_{n-1}^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(y) - P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(y)}{k_n^{(\alpha,\beta)} h_{n-1}^{(\alpha,\beta)} (x-y)}$$

где

$$h_m^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(m+\beta+1)}{(2m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1)},$$

$$k_m^{(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(2m+\alpha+\beta+1)}{2^m \Gamma(m+\alpha+\beta+1) \Gamma(m+1)}$$

и сделаем в ней замену переменных $x = 1-2r^2$ и $y = x_i = 1-2\xi_i^2$, получим

$$\frac{T_n^{(v,\gamma-1)}(r)}{r^2-x_i^2} = -\frac{(2n+v+\gamma-1)(2n+v+\gamma)}{(n+v)(n+\gamma-1) T_{n-1}^{(v,\gamma-1)}(x_i)} h_n^{(v,\gamma-1)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{T_m^{(v,\gamma-1)}(r) T_m^{(v,\gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(v,\gamma-1)}} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), будем иметь

$$f(r) = A_n^{(\nu, \gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{x_i T_{n-1}^{(\nu+1, \gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(\nu, \gamma-1)}(x_i)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{r T_m^{(\nu, \gamma-1)}(r) T_m^{(\nu, \gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(\nu, \gamma-1)}} \quad (7)$$

где

$$A_n^{(\nu, \gamma)} = 2^{\nu+\gamma} (2n + \nu + \gamma - 1) \frac{\Gamma(n + \nu) \Gamma(n + \gamma - 1)}{\Gamma(n + \nu + \gamma + 1) \Gamma(n + 1)}.$$

Подставляя последнее выражение в интеграл (1) и меняя порядок интегрирования и суммирования, будем иметь:

$$I_\nu^\gamma(r) = A_n^{(\nu, \gamma)} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{a_i} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{T_m^{(\nu, \gamma-1)}(x_i)}{h_m^{(\nu, \gamma-1)}} \int_0^1 W_\nu^\gamma(r, \rho) (1 - \rho^2)^{\gamma-1} \rho^{\nu+1} T_m^{(\nu, \gamma-1)}(\rho) d\rho$$

$$a_i = x_i T_{n-1}^{(\nu+1, \gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(\nu, \gamma-1)}(x_i)$$

Подставляя же сюда значение интеграла из спектрального соотношения (3), окончательно получим следующую квадратурную формулу:

$$I_\nu^\gamma(r) = \sum_{i=1}^n w_i^{(\nu, \gamma)} f(x_i) R^{(\nu, \gamma)}(r, x_i) \quad (8)$$

$$x_i = \sqrt{\frac{1 - \xi_i}{2}}; \quad P_n^{(\nu, \gamma-1)}(\xi_i) = 0;$$

$$w_i^{(\nu, \gamma)} = \frac{2n + \nu + \gamma - 1}{2x_i T_{n-1}^{(\nu+1, \gamma)}(x_i) T_{n-1}^{(\nu, \gamma-1)}(x_i)} \frac{\Gamma(n + \nu) \Gamma(n + \gamma - 1)}{\Gamma(n + \nu + \gamma + 1) \Gamma(n + 1)};$$

$$R_n^{(\nu, \gamma)}(r, x_i) = r^\nu \sum_{m=0}^{n-1} \frac{2m + \nu + \gamma}{2^{1-2\gamma}} \left(\frac{\Gamma(m + \nu + \gamma)}{\Gamma(m + \nu + 1)} \right)^2 T_m^{(\nu, \gamma-1)}(x_i) T_m^{(\nu, \gamma-1)}(r);$$

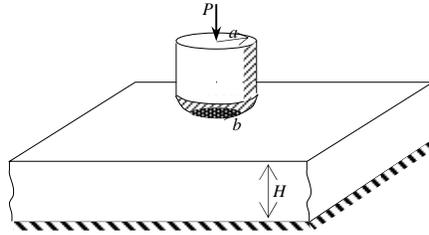
Нетрудно проверить, что имеет место и следующая квадратурная формула:

$$\int_0^1 f(x) (1 - x^2)^{\gamma-1} x^{2\nu} dx = \sum_{i=1}^n w_i^{(\nu, \gamma)} f(x_i) \quad (9)$$

Отметим, что формулы (8) и (9) выполняются точно, если функция $f(r)$ является нечетным многочленом порядка $2n-1$, т.е. представима в форме $f(r) = r Q_{n-1}(r^2)$, где $Q_{n-1}(x)$ - многочлен порядка $n-1$.

2. Осесимметричная контактная задача о вдавливании гладкого кругового жесткого штампа в упругий слой, нижняя грань которого жестко защемлена. В цилиндрической системе координат $O r \theta z$ рассмотрим упругий слой $0 \leq z \leq H$, в граничную поверхность $z = 0$ которой, под действием силы P , вдавливается круговой цилиндрический штамп с гладким основанием в форме тела вращения,

описываемого функцией $af\left(\frac{r}{a}\right)$ ($0 \leq r \leq a$). Предполагается, что торец штампа-цилиндра неполностью контактирует со слоем, т.е. зона контакта является кругом с радиусом $b < a$.



Фиг. 1 Схематическое представление задачи

Перейдем к безразмерным координатам:

$$\{r, z\} = a\{\rho, \zeta\}$$

и величинам

$$\{u_r, u_z, b, H\} = a\{u, w, b_*, h\}; \quad \{\sigma_z, \tau_{rz}\} = \mu\{\sigma, \tau\}.$$

Здесь, независимо от пункта 1, используются обозначения μ для модуля сдвига и ν для коэффициента Пуассона материала упругого слоя.

Решив осесимметричную задачу для слоя при граничных условиях

$$\sigma(\rho, 0) = \begin{cases} -p(\rho) & 0 \leq \rho \leq b_*, \\ 0 & b_* < \rho < \infty, \end{cases}$$

$$\tau(\rho, 0) = 0 \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (10)$$

$$u(\rho, h) = 0; \quad w(\rho, h) = 0; \quad 0 \leq \rho < \infty.$$

где $p(\rho)$ - искомое нормальное контактное напряжение, для нормальной компоненты перемещения граничных точек слоя будем иметь:

$$w(\rho, 0) = (1 - \nu) \int_0^{b_*} (L_0(t, \rho) - M(t, \rho)) p(t) t dt \quad (11)$$

Здесь

$$L_0(t, \rho) = \int_0^\infty J_0(ts) J_0(s\rho) ds, \quad \kappa = 3 - 4\nu,$$

$$M(t, \rho) = \int_0^\infty \left(\frac{2(2hs - \kappa \operatorname{sh} 2hs)}{4h^2 s^2 + 1 + \kappa^2 + 2\kappa \operatorname{ch} 2hs} + 1 \right) J_0(\rho s) J_0(st) ds$$

В зоне контакта штампа-цилиндра с упругим слоем имеем условие:

$$w(\rho, 0) = \delta_* - f(\rho) \quad (0 < \rho < b_* < 1) \quad (12)$$

где $\delta_* = \delta/a$ - относительная осадка штампа, $f(\rho)$ - функция, описывающая основание штампа.

Должно выполняться также условие равновесия штампа-цилиндра:

$$2\pi \int_0^{b_*} p(\rho) \rho d\rho = \frac{P}{\mu a^2} \quad (13)$$

Подставив выражение $w(\rho, 0)$ из (11) в условие контакта (12), получим определяющее интегральное уравнение с логарифмической особенностью в виде разрывного интеграла Вебера-Шафхейтлина $L_0(t, \rho)$:

$$(1-\nu) \int_0^{b_*} (L_0(t, \rho) - M(t, \rho)) p(t) t dt = \delta_* - f(\rho) \quad (14)$$

Для того, чтобы построить решение уравнения (14) при условии (13) методом механических квадратур на основе предложенных выше квадратурных формул (8) и (9), сведем интервалы интегрирования к интервалу $(0, 1)$. Будем иметь:

$$(1-\nu) b_* \int_0^1 (L(\eta, \xi) - N(\eta, \xi)) \varphi(\eta) d\eta = \delta_* - f(b_* \xi) \quad (0 < \xi < 1) \quad (15)$$

$$b_*^2 \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = Q$$

где $\varphi(\eta) = p(b_* \eta) \eta$ - новая искомая функция, $Q = \frac{P}{2\pi \mu a^2}$ - безразмерная внешняя сила,

$$L(\eta, \xi) = \int_0^\infty J_0(\eta \tau) J_0(\xi \tau) d\tau,$$

$$N(\eta, \xi) = \int_0^\infty \left(\frac{2b_* \left(2h\tau - b_* \kappa \operatorname{sh} 2 \frac{h\tau}{b_*} \right)}{4h^2 \tau^2 + b_*^2 \left(1 + \kappa^2 + 2\kappa \operatorname{ch} 2 \frac{h\tau}{b_*} \right)} + 1 \right) J_0(\eta \tau) J_0(\xi \tau) d\tau.$$

Решение системы уравнений (15) будем искать в виде:

$$\varphi(\eta) = \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad (16)$$

тогда система (15) примет вид:

$$\int_0^1 (L(\eta, \xi) - N(\eta, \xi)) \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{\delta_* - f(b_*\xi)}{(1-\nu)b_*} \quad (0 < \xi < 1) \quad (17)$$

$$\int_0^1 \frac{\varphi_*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{Q}{b_*^2}$$

Условием для определения длины зоны контакта b_* является

$$\varphi_*(1) = 0 \quad (18)$$

Выпишем формулы (8) и (9) применительно к системе (17), т.е. когда $\nu = 0$, $\gamma = 0.5$,

$$\int_0^1 L(\eta, \xi) \frac{f(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) R_0(\xi, x_i) \quad (19)$$

$$\int_0^1 \frac{g(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \sum_{i=1}^n w_i g(x_i)$$

где

$$T_n^{(\nu, \gamma-1)}(\rho) = P_n^{(\nu, \gamma-1)}(1-2\rho^2); \quad x_i = \sqrt{\frac{1-\xi_i}{2}}; \quad P_n^{(0, -\frac{1}{2})}(\xi_i) = 0;$$

$$w_i = \frac{4n-1}{x_i T_{n-1}^{(1, \frac{1}{2})}(x_i) T_{n-1}^{(0, -\frac{1}{2})}(x_i)} \frac{1}{n(4n^2-1)};$$

$$R_0(r, x_i) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (4m+1) \left(\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)} \right)^2 T_m^{(0, -\frac{1}{2})}(x_i) T_m^{(0, -\frac{1}{2})}(r).$$

Согласно (5) имеем

$$\varphi_*(r) = -\frac{2r}{(2n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2-x_i^2)} \frac{T_n^{(0, -0.5)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(1, 0.5)}(x_i)} \quad (20)$$

Применив формулы (19) к системе (17), получим:

$$\sum_{i=1}^n w_i [R_0(\xi, x_i) - N(x_i, \xi)] \varphi_*(x_i) = \frac{\delta_* - f(b_*\xi)}{(1-\nu)b_*} \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(x_i) = \frac{Q}{b_*^2}$$

Выбрав в качестве точек коллокации для первого уравнения узлы квадратурных формул (19), получим систему линейных алгебраических уравнений из $n+1$ урав-

нений относительно $n+1$ неизвестных: n значений $\varphi_*(x_i)$ ($i=1, n$) и безразмерной осадки штампа δ_* .

$$\sum_{i=1}^n w_i [R_0(x_k, x_i) - N(x_i, x_k)] \varphi_*(x_i) - \frac{\delta_*}{(1-\nu)b_*} = -\frac{f(b_*x_k)}{(1-\nu)b_*} \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \varphi_*(x_i) = \frac{Q}{b_*^2}$$

Очевидно, что при каждом значении b_* система (22) будет иметь решение, однако оно будет удовлетворять условию (18) только при определенном значении b_* .

Условие (18) с учетом выражения (20) записывается в виде:

$$\varphi_*(1) = -\frac{2}{(2n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(1-x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}(1)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} = 0 \quad (23)$$

Подбором b_* , по методу деления отрезка пополам, добиваемся удовлетворения условия (23) и находим искомое значение b_* .

После определения величин $\varphi_*(x_i)$ ($i=1, n$), контактное давление под штампом определится по формуле:

$$p(r) = -\frac{2b_*^3}{(2n+1)\sqrt{b_*^2-r^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2-b_*^2x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}\left(\frac{r}{b_*}\right)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} \quad (r \leq b_*) \quad (24)$$

Очевидно, что при $b_* \leq 1$ и выполнении условия (23), т.е. при определенном значении внешней силы Q_{\max} , контактное давление на границе зоны контакта обращается в ноль. Если же $b_* = 1$ и $Q > Q_{\max}$, то контактное давление определяется формулой

$$p(r) = -\frac{2}{(2n+1)\sqrt{1-r^2}} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_*(x_i)}{(r^2-x_i^2)} \frac{T_n^{(0,-0.5)}(r)}{x_i T_{n-1}^{(1,0.5)}(x_i)} \quad (25)$$

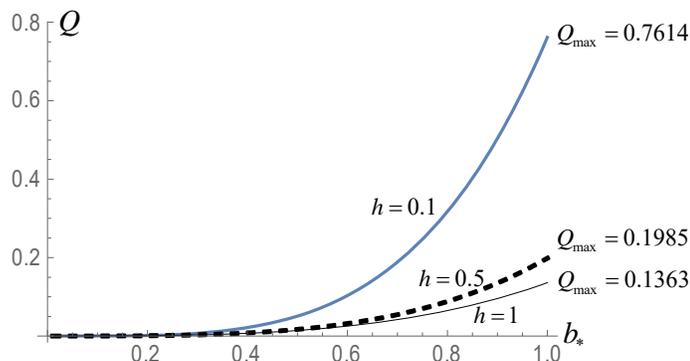
где $\varphi_*(x_i)$ ($i=1, n$) решение системы (22) при $b_* = 1$.

2.1 Численный анализ. Расчеты проводились для штампа с параболическим основанием, задаваемым формулой $f(\rho) = 0.1\rho^2$. Численный анализ сходимости решения показал, что даже при достаточно малой толщине слоя $h = 0.1$, когда в большей степени проявляется влияние регулярного ядра, значения b_* , найденные

при $n = 8$ и $n = 16$ с обеспечением выполнения условия (23) до порядка 10^{-9} , отличаются друг от друга на величину порядка 10^{-5} . Расчеты, проведенные для заданного значения внешней силы Q по описанной выше процедуре, оказались сильно времязатратными.

Для построения зависимости между приложенной силой Q и радиусом зоны контакта b_* , целесообразно применить следующий подход: задать значение b_* , решить систему из первых n уравнений системы (22) вместе с уравнением (23) и затем из последнего уравнения системы (22) найти соответствующее значение силы Q .

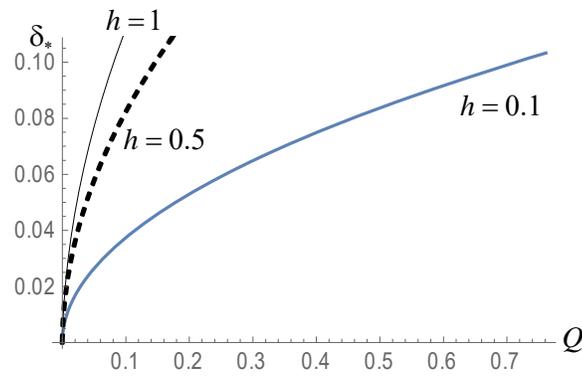
На фиг. 2 приведены графики зависимости между приложенной силой Q и радиусом зоны контакта b_* , рассчитанные для разных значений толщины слоя. У правого конца каждой кривой приведено то значение силы Q_{\max} , когда основание штампа полностью контактирует с основанием, но концентрации напряжений у границы пока нет.



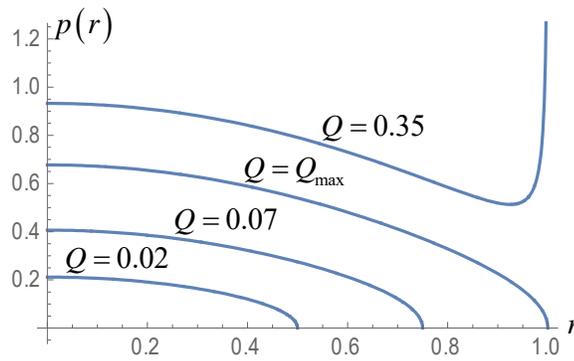
Фиг. 2. Кривые зависимости Q - b_* при разных значениях толщины h .

На фиг. 3 приведены графики зависимости между приложенной силой Q и осадкой штампа δ_* , рассчитанные для тех же значений толщины слоя. Графики обрываются на соответствующих значениях Q_{\max} . Для выяснения закономерности поведения кривой для $Q > Q_{\max}$ были проведены расчеты осадки штампа в случае, когда на границе зоны контакта контактное давление обращается в бесконечность. Выяснилось, что кривые плавно продолжают, не претерпевая никаких изменений при переходе через значение Q_{\max} .

На Фиг.4 представлены кривые распределения контактного давления при разных значениях внешней силы $Q = 0.02; 0.07; Q_{\max} = 0.1985; 0.35$, когда $h = 0.5$.

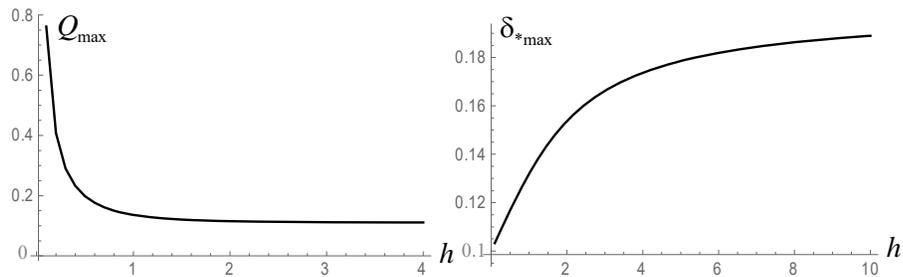


Фиг. 3. Кривые зависимости $\delta_* - Q$ при разных значениях толщины h .



Фиг. 4 Распределение контактного давления

На фиг.5 представлены зависимости предельной силы Q_{\max} и соответствующей ей осадке штампа $\delta_{*\max}$ от толщины слоя h .



Фиг. 5 Кривые зависимости $Q_{\max} - h$ и $\delta_{*\max} - h$.

Заклучение. Возможно впервые построена квадратурная формула для вычисления интеграла с ядром, являющимся разрывным интегралом Вебера-Шафхейтлина достаточно общего вида. Метод механических квадратур на основе построенной квадратурной формулы опробован на решении осесимметричной контактной задачи о вдавливании гладкого штампа с неплоским основанием в упругой слой, закрепленный по нижней грани. Эффективность метода проявляется в возможности подробнейшего численного анализа, представленного в виде графиков на Фиг. 2-5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Young A. The application of product integration to the numerical solution of integral equations, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 224 (1954), 561–573.
2. Wagner C. On the numerical solution of Volterra integral equations, J. Math. Phys. 32 (1954), 289–301.
3. Белоцерковский С.М. Подковообразный вихрь при неустановившемся движении // ПММ.-1955. -т. XIX, вып.2., с. 159-164
4. Иванов В.В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае разомкнутых контуров интегрирования ДАН СССР, 1956, т.108, №5, с.933-936.
5. Сафронов Н.Д. К приближенному решению сингулярных уравнений //ДАН СССР, 1956, т.111, №1, с.37-39.
6. Каландия А.И., Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., 42(84):2 (1957), 249–272.
7. Пыхтеев Г.Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши, ПММ, 1959, т. 23, № 6, сс.1074-1082.
8. Elliott D., The numerical solution of integral equations using Chebyshev polynomials, J. Australian Math. Soc. 1, 1959/60, pp. 334-356.
9. Stewart C. On the numerical evaluation of singular integrals of Cauchy type. J. Soc. Ind. and Appl. Math.-1960,-V.8, №2., 156-163.
10. Junghanns P. and Rathsfeld A. On polynomial collocation for Cauchy singular integral equations with fixed singularities. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 43(2002), No. 2, 155-176.
11. M Sheshko Singular integral equations with Cauchy and Hilbert kernels and theirs approximated solutions. The Learned Society of the Catholic University of Lublin, Lublin, 2003, 288p.
12. Iovane G., Lifanov I.K. and Sumbatyan M.A., On direct numerical treatment of hypersingular integral equations arising in mechanics and acoustics. Acta Mechanica 162(2003), 99–110.
13. Ma L.F. and Korsunsky A.M. A note on the Gauss-Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind. International Journal of Fracture, Vol. 126 (2004), No 4, 399-405.
14. Okecha G.E. Solution of Cauchy-Type Singular Integral Equations of the First Kind with Zeros of Jacobi Polynomials as Interpolation Nodes. Hindawi Publ. Corp., International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2007, Article ID 10957, 12 pages.

15. Cuminato J.A., Fitt A.D. and McKee S. A review of linear and nonlinear Cauchy singular integral and integro-differential equations arising in mechanics. *Journal of Integral Equations and Applications*. Vol. 19, No 2, Summer 2007, pp. 163-207.
16. Capobianco M. R., Criscuolo G. and Junghanns P. On the numerical solution of a hypersingular integral equation with fixed singularities. *Operator Theory: Advances and Applications, Recent Advances in Operator Theory and Applications Volume 187*, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland, 2008, pp. 95-116.
17. Andreev, A.V. Method for determining power-type complex singularities in solutions of singular integral equations with generalized kernels and complex conjugate unknowns. *Mech. Solids*, 2009, v.44, pp. 691–704.
18. Nagamine A. and Cuminato J.A., A collocation method for solving singular integro-differential equations. *BIT Numer Math* (2010) 50: 657–688
19. Keller, P. A practical algorithm for computing Cauchy principal value integrals of oscillatory functions. *Appl. Math. Comput.* 2012, 218, 4988–5001.
20. Sahakyan, A.V., Shavlakadze, N.N. Two methods for direct numerical integration of the Prandtl equation and comparative analysis between them. *Comput. Math. and Math. Phys.* 54, 1244–1250 (2014).
21. Hota, M.K.; Soha, A.K.; Ojha, P.; Mohanty, T. On the approximate evolution of oscillatory-singular integrals. *Cogent Math.* 2017, 4, 1314066
22. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
23. Wang, Y.; Xiang, S. A Levin method for logarithmically singular oscillatory integrals. *arXiv* 2019, arXiv: 1901.05192v1
24. Саакян А.В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур. *Известия НАН РА. Механика*. 2020, т.73, №2. с. 44-57, DOI: 10.33018/73.2.4.
25. Gao, J., Condon, M., Iserles, A., Gilvey, B., Trevelyan, J. Quadrature methods for highly oscillatory singular integrals. *Journal of Computational Mathematics*, Vol.39, No.2, 2021, 227–260. doi:10.4208/jcm.1911-m2019-0044
26. Boykov, I., Roudnev, V., Boykova, A. approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals with rapidly oscillating kernels. *Axioms* 2022, 11, 150.
27. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., Наука, 1967, 404 с.
28. Zhupanska, O. I. (2009). Axisymmetric contact with friction of a rigid sphere with an elastic halfspace. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2018), 2565–2588
29. Александров А.Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимостей между осесимметричными и плоскими основаниями. *ПММ*, 1961, т. 25, вып.5, сс. 912-920.
30. Айзикович С.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // *ПММ*. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
31. Попов Г.Я. Избранные труды. Том 1, Одесса, Издательско-полиграфический дом ВМВ, 2007, 438 с.

32. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ер., «Гитутюн» НАН РА, 2014, 322с.

33. Попов Г.Я. О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений. Изв. ВУЗ-ов, Математика, 1966, № 4, сс. 77-85.

34. Мхитарян С.М. О спектральных соотношениях для интегральных операторов, порожденных ядром в виде интеграла Вебера-Сонина, и их приложениях к контактным задачам. ПММ, 1984, №1, сс. 105-113.

35. Szego G. Orthogonal polynomials. American Mathematical Society. 1939, 432 p.

Сведения об авторе:

Саакян Аветик Вараздатович - д.ф.м.н., зав.отделом Института механики НАН РА, Тел. (37494) 579348, E-mail: avetik.sahakyan@sci.am, avsahakyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12 августа 2025

**МИНИМИЗАЦИЯ УСТАЛОСТНЫХ ЯВЛЕНИЙ В СВАРНЫХ ШВАХ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТРУБ С ПРИМЕНЕНИЕМ УПРОЧНЯЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Торосян М.С., Стакян М.Г.

Ключевые слова: газотранспортная система, газопровод, сварной шов, усталость, упрочняющая технология, деформированный слой, сжимающее напряжение.

Torosyan M.S., Stakyan M.G.
Minimizing Fatigue in Welded Joints of Metal Pipes Using Strengthening Technologies

Key words: gas transportation system, gas pipeline, weld seam, fatigue, strengthening technology, deformed layer, compressive stress.

Fatigue phenomena under cyclic loading of the gas transport system are considered, occurring in welded seams of pipelines, which initiate fatigue damage in the micro-roughness of the working surfaces of the seams and can lead to their failure and cessation of gas supply. To prevent such failures, it is proposed to perform plastic deformation of the outer surfaces of the welded seams, which allows the residual compressive stresses in the deformed seam layer to counteract cyclic stresses. The physical and mechanical characteristics of the specified layer material have been studied, which depend on the parameters of the deformation technology, internal composition, and microstructure, as well as the ductility of the steel grade. By using low- and medium-carbon steels with high ductility and employing strengthening technology, their physical and mechanical characteristics can be brought to values comparable to those of high-alloy steels and replaced with medium-carbon steels with low cost, which, when used in the installation of gas pipelines of sufficient length, can ensure the profitability of the gas transportation facility.

Թորոսյան Մ.Ս., Ստակյան Մ.Գ.

Մետաղական խողովակների եռակցման կարերում առաջացող հոգնածային երևույթների նվազարկումն ամրացնող տեխնոլոգիաների կիրառմամբ

Հիմնաբաներ՝ գազատրանսպորտային համակարգ, գազատար, եռակցման կար, հոգնածություն, ամրացնող տեխնոլոգիա, դեֆորմացված շերտ, սեղմող լարում:

Դիտարկվում են գազատրանսպորտային համակարգի ցիկլային բեռնվածության պայմաններում աշխատող գազատարների եռակցված կարերում ընթացող հոգնածային երևույթները, որոնց աշխատանքային մակերևույթների միկրոանհարթություններում առաջացող հոգնածային վնասվածքներն աճելով կարող են կարերի քայքայման և գազամատակարարման դադարեցման պատճառ դառնալ: Նշված քայքայումներին դիմակայելու նպատակով առաջադրվում է կատարել եռակցված կարերի արտաքին մակերևույթների պլաստիկ դեֆորմացում, որի շնորհիվ կարի դեֆորմացված շերտում առաջացած մնացորդային սեղմող լարումները կարող են ազդեցություն գիլային լարումները: Ուսումնասիրված են նշված շերտի նյութի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերը, կախված դեֆորմացման տեխնոլոգիայի պարամետրից, կարում օգտագործված պողպատի ներքին բաղադրությունից, միկրոկառուցվածքից և պլաստիկությունից: Բարձր պլաստիկությամբ օժտված ցածր և միջին ածխածնային պողպատների կիրառման դեպքում ամրացնող տեխնոլոգիայի կիրառման շնորհիվ կարելի է հասնել բարձր լեզիված պողպատների ֆիզիկամեխանիկական բնութագրերին և դրանց փոխարինել համեմատաբար ցածր ինքնարժեքի միջին ածխածնային պողպատներով, որը զգալի երկարությամբ մոնտաժված խողովակաշարերի դեպքում ապահովում է տեղակայման տնտեսական շահավետությունը:

Рассматриваются усталостные явления в условиях циклического нагружения газотранспортной системы, протекающие в сварных швах газопроводов, которые инициируют усталостные повреждения в микронеровностях рабочих поверхностей швов и могут стать причиной их разрушения и прекращения подачи газа. С целью предотвращения указанных разрушений предложено выполнить пластическое деформирование наружных поверхностей сварных швов, благодаря чему остаточные сжимающие напряжения, возникшие в деформированном слое шва, могут противостоять циклическим напряжениям. Изучены физико-механические характеристики материала указанного слоя, зависящие от параметров технологии деформирования, внутреннего состава и микроструктуры, а также пластичности марки стали. При использовании низко- и среднеуглеродистых сталей с высокой пластичностью применением упрочняющей технологии их физико-механические характеристики можно довести до аналогичных значений для высоколегированных сталей и заменить их среднеуглеродистыми сталями с низкой себестоимостью, которые при монтаже газопроводов с достаточной протяженностью могут обеспечить рентабельность газотранспортной установки.

Введение

Расширение сети газотранспортных систем (ГТС), что характерно для стран с развитой промышленностью, сельским хозяйством и социальной инфраструктурой, связано с усовершенствованием всего комплекса расчетно-проектных, технологических, материаловедческих и эксплуатационных процедур ответственных элементов (например, сварных швов трубопроводов) конструкций ГТС. При этом экономическая рентабельность создания газопроводов ГТС обеспечивается применением в трубопроводах малоуглеродистых и низколегированных конструкционных сталей [1, 2, 3].

ГТС обычно эксплуатируется в условиях комплексного воздействия факторов, вызванных режимом нагружения, геометрией элементов, трибологией и износом, коррозией окружающей среды и сейсмичностью зоны прокладки газопровода, которые проявляются и действуют в различных сочетаниях и количествах. Микроповерхностное состояние рабочих поверхностей элементов (рис. 1) в значительной степени воздействует на усталостную прочность и износостойкость, а применение упрочняющих технологий повышает их несущую способность, приближая физико-механические характеристики малоуглеродистых конструкционных сталей к аналогичным значениям для высокоуглеродистых и высоколегированных сталей [4, 5, 6, 7]. Учитывая это обстоятельство, в исследовательских организациях подробно изучены условия упрочнения с поверхностным пластическим деформированием (ППД) и сконструированы необходимые упрочняющие инструменты. Но указанные работы носят сравнительно узкий и конкретный характер учета метода упрочнения без комплексного изучения действующих факторов микрогеометрии и рабочей поверхности элементов [8, 9, 10] (рис.1).

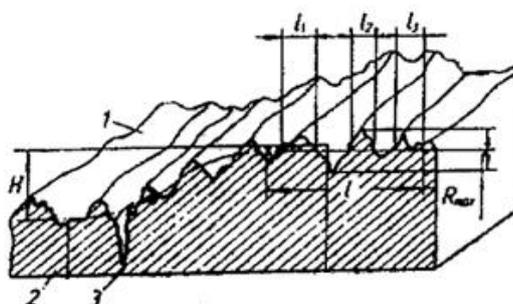


Рис. 1. Микрорельеф поверхности сварного шва и его геометрические параметры: 1-продольные микронеровности, 2-поперечные микронеровности, 3-микротрещина

Анализ воздействия факторов свидетельствует о том, что основным из них является процесс усталостного разрушения сварных швов, который приводит к примерно 75–80% -ому выходу из строя газопроводов из-за высокой степени концентрации напряжений ($\alpha_\sigma \approx 2.75$), вызывающей возникновение и рост усталостных микротрещин. Применение ППД в достаточной степени уменьшает процесс усталостного воздействия за счет появления остаточных сжимающих напряжений в подповерхностных слоях сварных швов трубопроводов [11, 12, 13].

Метод исследования

Целью исследования является повышение несущей способности и эксплуатационной надежности сварных швов трубопроводов ГТС, применяя методы системного анализа, материаловедения, строительной механики и математической статистики для учета комплексного воздействия факторов, и выбор приоритетного из них, для которого логично использовать упрочняющую технологию (ППД). Эффективность ППД связана с благоприятным воздействием остаточных сжимающих напряжений, глубина расположения которых связана с параметрами режима упрочнения при обкатке поверхностей сварных швов. Пластичность малоуглеродистых конструкционных сталей способствует к возникновению в поверхностных слоях остаточных сжимающих напряжений, которые повышают эффект сопротивления усталости, минимизируя циклические перенапряжения [14, 15, 16].

Учитывая необходимость повышения сопротивления усталости элементов, спроектированы совместно действующее упрочняющее устройство и прибор для нанесения антикоррозионной пленки после упрочнения шва, а также оформлена технология ППД, которые запатентованы в Республике Армения [17, 18].

Обеспечение эксплуатационной надежности элементов ГТС, учитывая комплексное взаимодействие разнородных факторов, является сложной проблемой, связанной с организацией совместной работы специалистов разных технических наук и технологий, поэтому на данном этапе как приоритетные факторы будут рассмотрены вопросы повышения сопротивления усталости элементов и эффект влияния ППД [19,20].

Математическая модель несущей способности элементов ГТС в случае воздействия нескольких факторов имеет вид

$$\Phi_1 \left[(F, S), (d, \alpha_\sigma), (\bar{\sigma}_{Rv}, \overline{\lg N_{Gv}}, \bar{m}_v, \bar{C}_v), (HV, \Delta h), (R_a, R_z, R_{\max}) \right] = 0, \quad (1)$$

где F, S – нормальная сила упрочнения и продольная подача инструмента, d, α_σ – диаметр образца и коэффициент концентрации напряжений; $\bar{\sigma}_{Rv}, \overline{\lg N_{Gv}}, \bar{m}_v, \bar{C}_v$ – средневероятные параметры линии усталости; $HV, \Delta h$ – микротвердость по Викерсу и глубина упрочненного слоя, R_a, R_z, R_{\max} – поверхностные неровности образца.

Многопараметрическая функция (1), в которую включены 5 подгрупп параметров, позволяет выполнить также дополнительные оценки геометрии деталей, материалоемкости и циклической долговечности при ППД, которые ранее не проводились. Как показывает относительное расположение линий усталости $(\bar{\sigma}_{Rv}, \overline{\lg N_{Gv}}, \bar{m}_v, \bar{C}_v)$, эффективность ППД на циклическую долговечность при высоких значениях α_σ

также повышается и практически уравнивает влияние концентрации напряжений, что является новизной данного исследования.

Результаты исследования

Дана обобщенная оценка циклической прочности с использованием коэффициентов усталости: K_d - масштабного; K_F - микрогеометрии поверхности ($K_d, K_F \leq 1$); K_σ - концентрации напряжений; K_v - упрочнения ($K_\sigma, K_v \geq 1$); $K_D = K_\sigma / (K_d \cdot K_F \cdot K_v) \geq 1$ - суммарного, а также исходных пределов выносливости лабораторных образцов ($d = 7.5 \dots 20 \text{ мм}$) $\bar{\sigma}_{R(v)}$.

Структура коэффициентов указывает на их взаимосвязанность, что позволяет для расчета их значений использовать комплексный метод оценки. При этом математическую модель ППД можно представить в виде функции

$$\Phi_2 \left[(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma), (K_{d\sigma}, K_\sigma, K_{v\sigma}, K_{\sigma D}, \bar{\sigma}_{R(v)}) \right] = 0. \quad (2)$$

Структура функции (2) зависит от характера предложенной проблемы исследования, формирующего систему уравнений с определенными подгруппами параметров и устанавливающего внутри подгрупп их доминантность, исходя из степени важности одного из действующих факторов. Исходя из вышеуказанного, функцию (2) можно заменить двумя системами параметрических уравнений:

1) отдельные уравнения $K_{d\sigma}, K_\sigma, K_{v\sigma}, K_{\sigma D} = f_{1,2,3,4}(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma)$ и $\bar{\sigma}_{R(v)} = f_5(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma)$ при разной доминантности параметров $\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma$;

2) уравнения с взаимосвязанными коэффициентами $K_{d\sigma}, K_\sigma, K_{v\sigma}, K_{\sigma D}$, пределами выносливости $\bar{\sigma}_{R(v)}$ и параметрами $\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma$.

1. Согласно методу системного анализа, для п.1 возможно 6 вариантов доминантности $\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma$, из которых рассмотрены часто встречающиеся 3 варианта для оценки ППД (Δh), размеров (d) и концентрации напряжений ($\bar{\alpha}_\sigma$), формирующих следующие подгруппы уравнений:

I	II	III	
$K_{d\sigma} = f_1(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{d\sigma} = \varphi_1(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{d\sigma} = \psi_1(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d),$	
$K_\sigma = f_2(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_\sigma = \varphi_2(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_\sigma = \psi_2(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d),$	
$K_{v\sigma} = f_3(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{v\sigma} = \varphi_3(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{v\sigma} = \psi_3(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d),$	(3)
$K_{\sigma D} = f_4(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{\sigma D} = \varphi_4(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma),$	$K_{\sigma D} = \psi_4(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d),$	
$\bar{\sigma}_{R(v)} = f_5(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma),$	$\bar{\sigma}_{R(v)} = \varphi_5(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma),$	$\bar{\sigma}_{R(v)} = \psi_5(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d),$	
$(x = \Delta h),$	$(x = d),$	$(x = \bar{\alpha}_\sigma).$	

С целью выполнения расчетов из базы данных [9, 12, 19, 20, 21] (совместный циклический изгиб и кручение) для $\Delta h_{1-4} = 0 \dots 0.15 \text{ мм}$, $d_{1-4} = 7.5 \dots 20.0 \text{ мм}$ и $\bar{\alpha}_{\sigma 1-4} = 1.00 \dots 2.75$ выбраны 64 средневероятные кривые усталости для образцов – гладких и с концентрацией напряжений (галтель, поверхностная выточка, сплошное поперечное отверстие) и по величинам $\bar{\sigma}_{R(v)}$ определены значения $K_{d\sigma}, K_{\sigma}, K_{v\sigma}$ и $K_{\sigma D}$, которые распределены в подгруппах I, II, III. При этом для каждой подгруппы получено по 80 уравнений (3). В подгруппе функций I ($x = \Delta h$) рассмотрены изменения коэффициентов и $\bar{\sigma}_{R(v)}$ при доминантном учете ППД. Для крайних значений $\Delta h = 0.15 \text{ мм}$ и $\bar{\alpha}_{\sigma 4} = 2.75$ исходные значения $K_{d\sigma} = 0.82 \dots 0.94$ достигают $0.90 \dots 0.98$, т.е. эффект упрочнения несколько подавляет влияние масштабного фактора. Существенное влияние ППД проявляется при высокой концентрации напряжений, снижая значения $K_{\sigma} = 2.5 \dots 2.6$ до $1.6 \dots 1.8$, а суммарный коэффициент $K_{\sigma D}$ уменьшается от 3.1 до 1.6. Для $\bar{\sigma}_{R(v)}$, комплексно учитывающего влияние всех коэффициентов, увеличение значений достигает $75 \dots 95\%$, т.е. при ППД предел выносливости достигает исходных значений при $\Delta h_1 = 0$ и $\bar{\alpha}_{\sigma 1,2} = 1.0 \dots 1.5$.

В подгруппе функций II ($x = d$) с увеличением d и Δh значения коэффициента $K_{d\sigma}$ стабилизируются и достигают величины, соответствующей $\bar{\alpha}_{\sigma 2} = 1.5$. При $d = 20.0 \text{ мм}$ процесс упрочнения уменьшает влияние концентрации напряжений до 40%. Коэффициент упрочнения $K_{v\sigma}$ при $\Delta h_4 = 0.15 \text{ мм}$ и $d_4 = 20.0 \text{ мм}$ почти полностью подавляет совместное действие $K_{d\sigma}$ и K_{σ} , а следовательно, их действие и на $\bar{\sigma}_{R(v)}$.

В подгруппе функций III ($x = \bar{\alpha}_{\sigma}$) влияние $\bar{\alpha}_{\sigma}$ присутствует во всех деталях, упрочнение их контуров является обязательным условием для обеспечения циклической прочности и долговечности. При $d_4 = 20.0 \text{ мм}$ и $\bar{\alpha}_{\sigma} = 1.0$ снижение значений $\bar{\sigma}_{R(v)}$ достигает 22%, а упрочнение поверхностей до $\Delta h_4 = 0.15 \text{ мм}$ восстанавливает и даже увеличивает значения $\bar{\sigma}_{R(v)}$ на $10 \dots 14\%$. Этот процесс существенно проявляется при $\bar{\alpha}_{\sigma} = 1.5 \dots 1.75$ – снижение $\bar{\sigma}_{R(v)}$ составляет $45 \dots 95\%$, а при упрочнении $\bar{\sigma}_{R(v)}$ достигает исходных значений при $\Delta h = 0$. При $\bar{\alpha}_{\sigma} = 2.5 \dots 3.5$ это снижение достигает $155 \dots 200\%$, что приводит к необходимости в обязательном порядке применять ППД, уменьшающее это снижение до $6 \dots 14\%$ от исходных значений $\bar{\sigma}_{R(v)}$.

На рис. 2-4 представлены функции $\bar{\sigma}_{R(v)}$ из п/г I, II, III, комплексно учитывающие совместное действие указанных коэффициентов. При этом выявляется основное преимущество применения ППД – при умеренной концентрации напряжений пределы выносливости упрочненных деталей приближаются к $\bar{\sigma}_{R(v)}$ неупрочненных гладких деталей, а при высокой концентрации – к $\bar{\sigma}_{R(v)k}$ деталей с умеренной концентрацией напряжений, т.е. упрочнение подавляет действие K_σ на $\bar{\sigma}_{R(v)}$.

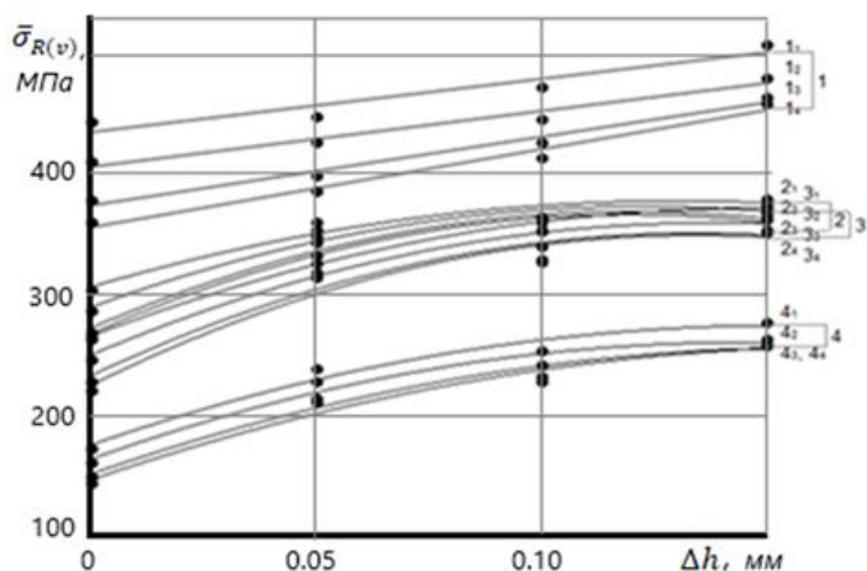


Рис. 2. Изменения функций $\bar{\sigma}_{R(v)} = f_5(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma)$: $1_1, \dots, 1_4, 2_1, \dots, 2_4, 3_1, \dots, 3_4, 4_1, \dots, 4_4$ – при $\bar{\alpha}_{\sigma 1}, \bar{\alpha}_{\sigma 2}, \bar{\alpha}_{\sigma 3}, \bar{\alpha}_{\sigma 4}$; индексы $1, \dots, 4$ соответствуют: d_1, d_2, d_3, d_4

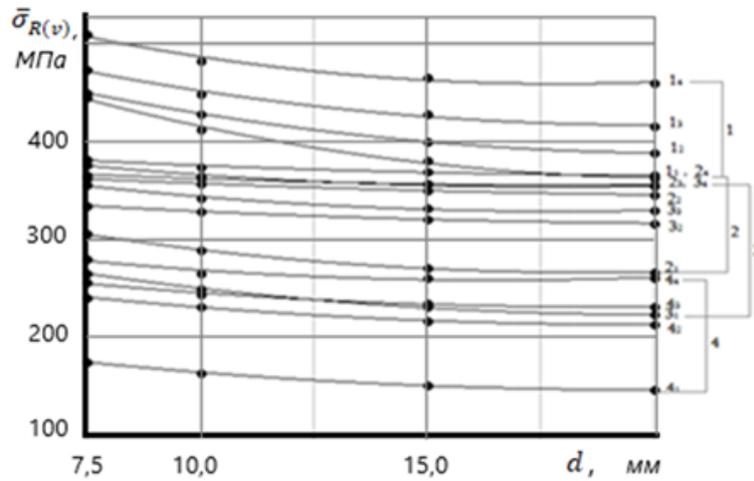


Рис. 3. Изменения функций $\bar{\sigma}_{R(v)} = \varphi_5(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma)$: $1_1, \dots, 1_4, 2_1, \dots, 2_4, 3_1, \dots, 3_4, 4_1, \dots, 4_4$ – при $\bar{\alpha}_{\sigma 1}, \bar{\alpha}_{\sigma 2}, \bar{\alpha}_{\sigma 3}, \bar{\alpha}_{\sigma 4}$; Индексы $1, \dots, 4$ соответствуют: $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3, \Delta h_4$

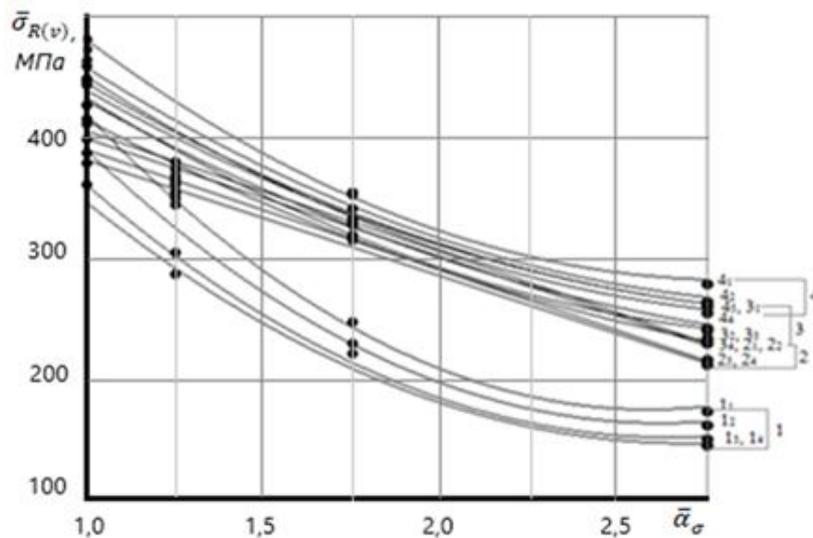


Рис. 4. Изменения функций $\bar{\sigma}_{R(v)} = \psi_5(\bar{\alpha}_\sigma, \Delta h, d)$: $1_1, \dots, 1_4, 2_1, \dots, 2_4, 3_1, \dots, 3_4, 4_1, \dots, 4_4$ – при d_1, d_2, d_3, d_4 . Индексы $1, \dots, 4$ соответствуют: $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3, \Delta h_4$

2. Комплексное рассмотрение изменений коэффициентов $K_{d\sigma}, K_\sigma, K_{v\sigma}, K_{\sigma D}$ и $\bar{\sigma}_{R(v)}$ от действующих факторов, продиктованное требованиями обеспечения несущей способности деталей, предполагает выявление взаимосвязанных функций.

В отличие от (3), при таком подходе число аргументов функций увеличивается и аналогичные системы уравнений принимают вид

$$\begin{array}{llll}
 1. K_{d\sigma} = f_1(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) & x = \Delta h & 6. K_{d\sigma} = \varphi_1(d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma) & x = d \\
 2. K_{d\sigma} = F_2(K_\sigma, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_\sigma & 7. K_{d\sigma} = \Phi_2(K_\sigma, d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_\sigma \\
 3. K_{v\sigma} = F_3(K_\sigma, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_\sigma & 8. K_{v\sigma} = \Phi_3(K_\sigma, d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_\sigma \\
 4. K_{v\sigma} = F_4(K_{\sigma D}, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_{\sigma D} & 9. K_{v\sigma} = \Phi_4(K_{\sigma D}, d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_{\sigma D} \\
 5. \bar{\sigma}_{R(v)} = F_5(K_{\sigma D}, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_{\sigma D} & 10. \bar{\sigma}_{R(v)} = \Phi_5(K_{\sigma D}, d, \Delta h, \bar{\alpha}_\sigma) & x = K_{\sigma D} \\
 11. K_{d\sigma} = \Psi_1(\bar{\alpha}_\sigma, d, \Delta h) & x = \bar{\alpha}_\sigma & 12. K_{d\sigma} = \Psi_2(K_\sigma, \bar{\alpha}_\sigma, d, \Delta h) & x = K_\sigma \\
 13. K_{v\sigma} = \Psi_3(K_\sigma, \bar{\alpha}_\sigma, d, \Delta h) & x = K_\sigma & 14. K_{v\sigma} = \Psi_4(K_{\sigma D}, \bar{\alpha}_\sigma, d, \Delta h) & x = K_{\sigma D} \\
 15. \bar{\sigma}_{R(v)} = \Psi_5(K_{\sigma D}, \bar{\alpha}_\sigma, d, \Delta h) & x = K_{\sigma D} & &
 \end{array} \quad (4)$$

Связь между системами (3) и (4) проявляется в идентичности их функций 1-го ряда в каждой из подгрупп I-III. Такая интерпретация структур функций (4) позволяет в логической последовательности распределить их в квадрантах I-IV координатной системы при масштабной идентичности общих координатных осей и простыми графическими процедурами получить взаимосвязанные значения $K_{d\sigma}, K_\sigma, K_{v\sigma}, K_{\sigma D}$ и $\bar{\sigma}_{R(v)}$ при комплексном воздействии факторов геометрии и концентрации напряжений, которые уравниваются оптимальными параметрами ППД. Произведены классификация и группировка аргументов и параметров для формирования структур функций (4):

- №№ 1-5 - по аргументам $\Delta h, K_\sigma, K_{\sigma D}$ и параметрам $d, \bar{\alpha}_\sigma$;
- №№ 6-10 - по аргументам $d, K_\sigma, K_{\sigma D}$ и параметрам $\Delta h, \bar{\alpha}_\sigma$;
- №№ 11-15 - по аргументам $\bar{\alpha}_\sigma, K_\sigma, K_{\sigma D}$ и параметрам $d, \Delta h$.

В итоге, для каждой функции (4) также получено по 16 регрессионных уравнений, в основном, в виде степенных уравнений 1...3 порядка. Всего получено 192 двумерных регрессионных уравнения, которые сгруппированы и, согласно (4), введены в три сводные номограммы. Они могут быть использованы при конструкторских разработках, выборе технологических режимов упрочнения деталей и установлении норм и сроков эксплуатации машин. На рис. 3 дана номограмма для 1-й подгруппы функций (4).

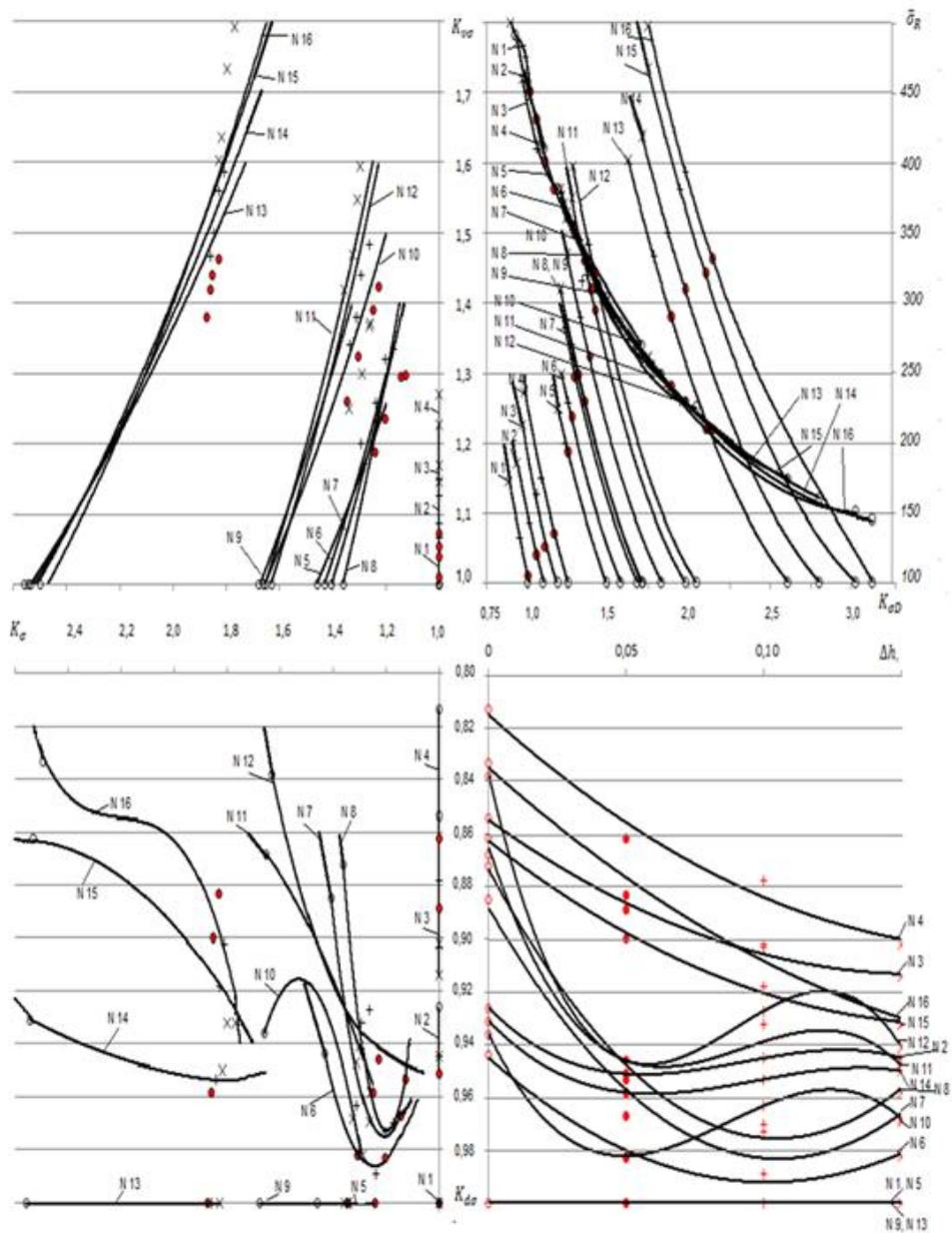


Рис. 3. Номограмма системы уравнений №№1...5 из (4). Обозначения данных: \circ , \bullet , $+$, \times - при $\Delta h = 0; 0.05; 0.10; 0.15$ мм. Линии №№1...16 в квадрантах I-IV соответствуют функциям:

$$I - K_{d\sigma} = f_1(\Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma); \quad II - K_{d\sigma} = F_2(K_\sigma, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma); \quad III - K_{v\sigma} = F_3(K_\sigma, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma);$$

$$IV - K_{v\sigma} = F_4(K_{\sigma D}, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma) \text{ и } \bar{\sigma}_{Rv} = F_5(K_{\sigma D}, \Delta h, d, \bar{\alpha}_\sigma)$$

Основные выводы

1. Выполнен комплексный анализ ранее проведенных исследований, посвященных изучению влияния ППД на показатели усталостной прочности элементов конструкций, и произведена классификация работ по типу конструкционных материалов, ППД, геометрическим параметрам и состоянию поверхностных слоев деталей. Составлена база данных по параметрам факторов и характеристикам сопротивления усталости $\bar{C}_{(v)}$, $\bar{m}_{(v)}$, $\bar{N}_{G(v)}$ и $\bar{\sigma}_{R(v)}$ деталей из стали 40X.

2. Для оптимальной оценки влияния факторов составлена сводная математическая модель ППД в виде многопараметрической функциональной связи, которая для практических целей заменена частными системами параметрических уравнений.

Получены регрессионные уравнения указанных систем, которые позволяют определить взаимосвязанные оптимальные значения всего комплекса параметров без выполнения дополнительных испытаний.

3. Для изучения влияния ППД на показатели состояния поверхностных слоев деталей выполнено комплексное исследование для типов деталей, конструкционного материала (сталь 40X) и ППД (обкатка шариковым деформирующим инструментом).

4. Показано, что выявленные функциональные связи, которые являются частными математическими моделями ППД, подтверждают улучшение состояния поверхностных слоев и повышение прочности деталей. ППД эффективно компенсирует совместное влияние масштабного эффекта и концентрации напряжений, приближая $\bar{\sigma}_{R(v)}$ к исходным значениям гладких образцов.

5. Анализ влияния ППД на коэффициенты $K_{d\sigma}$, K_{σ} , $K_{v\sigma}$, $K_{\sigma D}$ и $\bar{\sigma}_{R(v)}$ при различных сочетаниях доминантности параметров Δh , d и $\bar{\alpha}_{\sigma}$, выдвигаемой требованиями расчетно-технологических и эксплуатационных процедур проектируемой конструкции, показал возможность применения в расчетах ранее неучтенных коэффициентов и $\bar{\sigma}_{R(v)}$. Получены сводные номограммы, применением которых решаются задачи выбора оптимальных параметров ППД, уточняются характеристики работоспособности элементов конструкций, достигаются низкие материалоемкость и себестоимость конструкции, которые в заданном сроке службы обеспечат надежную и безопасную работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Besserdich, Untersuchungen zur Eigenspannungs und Verzugsausbildung beim Abschrecken von Yulindern aus den Stählen 42 CrMo 4 und Ck 45 unter Berücksichtigung der Umwandlungsplastizität: Dissertation, University of Karlsruhe, 1993.
2. U. Ahrens, Beanspruchungsabangiges Umwamlungsverhalten und Umwamlungplastiyität niedrig legierter Stähle emit unterschiedlich hohen Kohlenstoffgehalten: Dissertation, University of Paderborn, 2003.
3. А.В. Ежелев, И.Н. Бобровский, А.А. Лукьянов, Анализ способов обработки поверхностно-пластическим деформированием, Фундаментальные исследования, 2012, № 6-3, 642-646.

4. В.А. Кирпичев и др., Прогнозирование сопротивления усталости упрочненных деталей с различными концентраторами напряжений, Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. V Всеросс. конф. с междунар. уч. Ч.1, Самара, 2008, 143-147.
5. В.Ф. Павлов и др., Остаточные напряжения и пределы выносливости упрочненных деталей с концентраторами при различных видах упрочнения, Надежность и долговечность машин и сооружений: Междунар. науч.-техн. сб.- Киев, 2008, Вып. №30, 108-113.
6. В.Г.Санамян, Упрочнение деталей машин поверхностным пластическим деформированием: Уч. пос., Ростов н/Д: РГУПС, 2003, 64с.
7. В.Ю. Блюменштейн, М.С. Малахов, Влияние режимов на формирование остаточных напряжений в поверхностном слое при размерном совмещенном обкатывании, Обработка металлов, 2008, №2, 15-23.
8. Л.В. Агамиров, А.Н. Лисин, В.В. Мозалев, Прогнозирование сопротивления усталости барабанов авиационных колес, подверженных поверхностному пластическому деформированию, Упрочняющие технологии и покрытия, 2011, №3, 8-15.
9. А.Г. Суслов, Р.В. Гуров, Проектирование операций отделочно-упрочняющей обработки поверхностно-пластическим деформированием, Упрочняющие технологии и покрытия, 2010, №3, 14-17.
10. В.Ф. Губанов и др., Технология обработки обкатыванием, Ремонт, восстановление, модернизация, 2008, №11, 36-38.
11. О.Н. Федонин, С.В. Степашина, Научное обоснование выбора режимов обработки при поверхностном пластическом деформировании, Вестн. БГТУ, 2011, №1, 4-8.
12. Р.В. Гуров, Взаимосвязь режимов обработки и геометрических параметров инструмента с параметрами качества поверхностного слоя при отделочных и отделочно-упрочняющих режимах ОУО ППД, Упрочняющие технологии и покрытия, 2010, №8, 7-10.
13. М.Н. Саушкин и др., Расчетно-экспериментальное исследование устойчивости остаточных напряжений в упрочненном слое цилиндрического изделия к температурным нагрузкам, Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, Сер. Физ.-мат. науки, 2009, №1(18), 101-113.
14. H. Luo, J. Liu, L. Wang, O. Zhong, Study of the mechanism of the burnishing process with cylindrical polycrystalline diamond tools, Journ.of Mater.Process. Techn., 2006, Is. 1-3, 9-16.
15. J.D. Landes, Evaluation of the ASTM and ESIS multiple specimen J initiation procedures using the EURO fracture toughness dataset. GKSS 2001/9, 2001, 73p.
16. M. Dalgic, A. Irretier, H-W. Zoch, and G. Lowisch, Transformation plasticity at different phase transformation of a through hardening bearing steel, Int. Journ. Microstruct. Mater. Prop., 2008, 3-1, 49-64.
17. ՀՀ Արտոնագիր, AM 20220021 Ս 08.03.22թ. №756 Ս. Եռակցված խողովակների կցվանքային կարերի վերջնամշակման սարք/ Մ.Գ. Ստակյան, Ն.Վ.Փիրումյան, Հ.Ս.Ղազարյան. ՄԱԴ (2022.01), B23K, 11/00, B21C, 43/00, գրանցված է 16.02.2022թ.
18. ՀՀ Արտոնագիր, AM 20220021 Ս 08.04.22թ. №762 Ս. Խողովակաշարերի կցվանքային եռակցված կարերի ամրության և երկարակեցության

բարձրացման եղանակ/ Մ.Գ. Ստակյան, Ն.Վ.Փիրումյան, Հ.Ս.Ղազարյան.
ՄԱԴ (2022.01), B23K, 11/00, B21C, 43/00, գրանցված է 16.09.2022թ.

19. Ն.Վ.Փիրումյան, Մ.Ս. Թորոսյան, Մ.Գ. Ստակյան, Մեքենամասերի հոգնածային դիմադրության բարձրացումն ամրացնող տեխնոլոգիաների կիրառմամբ, ՃՇՀԱՀ Տեղեկագիր, 2019, №1(62), 31-39.
20. В.Р. Гуров, Учет упругого восстановления в процессе отделочно-упрочняющей обработки поверхностно-пластическим деформированием, Упрочняющие технологии и покрытия, 2012, №3, 9-15.
21. М.Г. Стакян, Ш.Дж. Систани, М.С. Торосян, Оценка прочности и долговечности деталей машин при поверхностном пластическом деформировании, Изв. НАН РА и ГИУА, сер. ТН, 2013, т. 66, N-2, 95-112.

Сведения об авторах

Торосян Мгер Серезаевич – кандидат технических наук, научный сотрудник Института механики НАН РА, ассистент каф. «Машиноведения и машиностроения» ИПУА, тел. +374-55-72-82-22, e-mail: mhertorosyan@list.ru

Стакян Мигран Григорьевич – доктор технических наук, проф., НУАСА, тел. +374-33-55-45-60, e-mail: stakyan.mihran@yandex.ru

Поступила в редакцию 02 октября 2025

**ENERGY-OPTIMAL COMBINED CONTROL OF AN ELECTROMECHANICAL
MANIPULATOR UNDER CONTROL VOLTAGE CONSTRAINT**

Avetisyan V.V.

Keywords: electromechanical manipulator, optimal control, energy consumption

Аветисян В.В.

**Оптимальное по энергозатратам комбинированное управление электромеханическим
манипулятором с ограничением на управляющее напряжение**

Ключевые слова: электромеханический манипулятор, оптимальное управление, энергозатраты

Рассматривается задача построения оптимального по энергозатратам управления однозвенным электромеханическим манипулятором с ограничением на управляющее напряжение. Проанализированы различные структуры оптимального управления, вытекающие из принципа максимума Понтрягина. Показано, что при больших временах перехода оптимальным является управление, полученное без учёта ограничений, тогда как при малых временах возможны комбинированные управления двух различных структур. Однако лишь одно из них, в определённом диапазоне изменения конечного времени, является единственно допустимым и, следовательно, оптимальным. Разработан алгоритм построения такого комбинированного управления, реализуемость которого подтверждается результатами численного моделирования.

Ավետիսյան Վ.Վ.

**Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ըստ էներգաձախսերի օպտիմալ համակցված
ղեկավարումը՝ ղեկավարող լարման սահմանափակմամբ**

Հիմնաբառեր: էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատոր, օպտիմալ ղեկավարում, էներգաձախսեր

Դիտարկվում է միաթև էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի օպտիմալ ըստ էներգաձախսերի ղեկավարման խնդիրը՝ ղեկավարող լարման սահմանափակման առկայության պայմաններում: Վերլուծվել են Պոնտրյագինի մաքսիմումի սկզբունքից բխող օպտիմալ ղեկավարման տարբեր կառուցվածքները: Ցույց է տրվել, որ տեղափոխման բավականին մեծ ժամանակահատվածի դեպքում օպտիմալ է այն ղեկավարումը, որը գտնվել է առանց սահմանափակումների հաշվի առնելու, մինչդեռ փոքր ժամանակահատվածի դեպքում հնարավոր են երկու տարբեր կառուցվածքով համակցված ղեկավարումներ: Սակայն դրանցից միայն մեկն է հանդիսանում միակ թույլատրելին և, հետևաբար, օպտիմալը՝ վերջնական ժամանակի փոփոխման որոշակի տիրույթում: Մշակվել է համապատասխան համակցված ղեկավարման կառուցման ալգորիթմը, որի իրագործելիությունը հաստատվել է թվային մոդելավորմամբ:

The problem of designing energy-optimal control for a single-link electromechanical manipulator with a constraint on the control voltage is considered. Various structures of optimal control, derived from Pontryagin's maximum principle, are analyzed. It is shown that for large transition times, the optimal control is the one obtained without accounting for constraints, whereas for small transition times, combined controls of two different structures are possible. However, only one of them, within a certain range of terminal time variation, is uniquely admissible and, consequently, optimal. An algorithm for constructing such combined control is developed, and its feasibility is confirmed by numerical simulation results.

Introduction. Modern electromechanical manipulators are widely used in automated control systems, where the issues of energy efficiency, accuracy, and compliance with technological constraints play a crucial role [1–4]. When moving a manipulator under specified boundary conditions, the control problem for the electric drive arises in such a way as to minimize energy (in particular, thermal) losses while satisfying constraints on the control input [5]. These problems are especially relevant when operating with limited power sources or when it is necessary to extend the service life of the electric motor [6]. Similar problems have been repeatedly addressed in the scientific literature. For instance, [7] proposes a method for constructing energy – optimal trajectories for robot manipulators with holonomic constraints, based on minimizing energy consumption while considering control force limitations. In [8], the problem of optimal control of a flexible single – link manipulator is studied, taking into account inertial properties and vibrations; special attention is given to the energy functional and to control structures that include both bang – bang and smooth control segments. Moreover, in the context of modern high degree of freedom robots, [9] develops an energy – efficient trajectory planning strategy aimed at reducing energy consumption and improving motion smoothness. Various problems of minimizing energy consumption during transport and search operations performed by electromechanical manipulators are addressed in [10–14] and [15,16], respectively.

In this paper, we address the problem of designing energy – optimal control for a single-link electromechanical manipulator subject to a constraint on the control voltage. The focus is on identifying the structure of the optimal control for different transition durations and on developing an algorithm for its construction based on Pontryagin’s maximum principle.

1. Mathematical model of the electromechanical manipulator and problem statement. Let us consider a simple model of an electromechanical manipulator consisting of a separately excited direct current motor, a gearbox, and an arm with a load, rotating in the horizontal plane. Such a system can be regarded as a model of the simplest manipulator with a single degree of freedom. The motion of the described electromechanical system, in the given form, is defined by the following differential equation [17]:

$$R(I + Jn^2)\ddot{\varphi} + k^2 n^2 \dot{\varphi} = knu. \quad (1.1)$$

Here φ is the angular position of the manipulator arm relative to a fixed axis; I is the moment of inertia of the arm (including the driven gear of the gearbox) with respect to the axis of rotation; J is the moment of inertia of the motor armature (including the driving gear) relative to its rotation axis; n is the gear ratio of the gearbox; R is the electrical resistance of the armature winding; k is a motor constant; u is the control voltage applied to the motor input.

Equation (1.1) is valid under the assumption that the electromagnetic time constant of the system is significantly smaller than both the duration of the robot’s working operation and the time required for the electric motor to reach a steady – state rotational mode under constant voltage. For many industrial electromechanical robots, this assumption is generally satisfied [1].

Let us now consider the problem of optimal control for system (1.1).

It is required to find a programmed law of variation of the control voltage that transfers the manipulator, described by equation (1.1), from a given initial rest state

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.2)$$

to a specified terminal rest state (1.3) at a fixed moment of time T

$$\varphi(T) = \varphi^T, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.3)$$

under the condition that the control satisfies the constraint

$$|u(t)| \leq U \quad (1.4)$$

where $U > 0$ is the prescribed maximum allowable value of the control voltage and minimizes the functional

$$Q = R^{-1} \int_0^T (u - k\dot{\varphi})^2 dt, \quad (1.5)$$

The functional (1.5) characterizes the total heat dissipation in the rotor winding of the electric motor during the control process [18]. The terminal time T is fixed, but its value is refined in the course of solving the problem.

In equations (1.1)–(1.5), we transition to dimensionless units (with primes subsequently omitted) and introduce the following notation and new variables:

$$\begin{aligned} t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/U, \quad k' = kn/(U\bar{T}), \quad R' = RA/(knU\bar{T}^2), \\ Q' = \bar{T}^2 A^{-1} Q, \quad Q'_1 = Q'k'R', \quad A = I + Jn^2, \quad \varphi_1 = \varphi - \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

where \bar{T} is the characteristic time of the robot's working operation, taken as the unit of measurement and to be specified below.

Then, relations (1.1)–(1.5) take the following form:

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \quad (1.7)$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad (1.8)$$

$$\varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \varphi_2(T) = 0, \quad (1.9)$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad (1.10)$$

$$Q_1 = \int_0^T (u - k\dot{\varphi})^2 dt. \quad (1.11)$$

Thus, the problem formulated above is reduced to the equivalent problem (1.7)–(1.11). Without loss of generality, we assume that in (1.9) $\varphi_1^T > 0$.

2. Analysis of the admissibility and optimality of various control structures. To solve problem (1.7)–(1.11), we apply the Pontryagin's maximum principle [19]. The Hamiltonian of the system (1.7)–(1.11) has the form

$$H = -(u - k\varphi_2)^2 + p_1\varphi_2 + p_2(uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2), \quad (2.1)$$

where p_1, p_2 are the adjoint variables determined from the equations

$$\dot{p}_1 = -H_{\varphi_1} = 0, \quad \dot{p}_2 = -H_{\varphi_2} = -2ku + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

The maximum of the function (2.1), without taking into account the constraint (1.10), is found from the condition that the derivative of H with respect to u is zero:

$$H_u(t) = -2(u(t) - k\varphi_2(t)) + p_2(t)R^{-1} = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

and is attained at the point

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) + p_2(t)(2R)^{-1}. \quad (2.4)$$

The variables φ_2 and p_2 in (2.4) are obtained by solving the boundary value problem (1.7)–(1.9), (2.4) with the optimal control (2.4) and have the form

$$\varphi_1(t) = (-2T^{-3}t^3 + 3T^{-2}t^2)\varphi_1^T, \quad \varphi_2(t) = (-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t)\varphi_1^T, \quad (2.5)$$

$$p_1(t) = 24R^2T^{-2}\varphi_1^T, \quad p_2(t) = -24T^{-3}R^2\varphi_1^T t + 12T^{-2}R^2\varphi_1^T. \quad (2.6)$$

According to (2.4)–(2.6), the optimal control (2.4) takes the form

$$u^*(t) = -6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}(k - 2RT^{-1})\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T. \quad (2.7)$$

From (2.7) it follows that $u^*(t)$ is a concave quadratic function that reaches its maximum at the point

$$t_* = T/2 - k^{-1}R. \quad (2.8)$$

The corresponding maximum value is

$$u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6R^2k^{-1}T^{-3}\varphi_1^T. \quad (2.9)$$

Note that at the ends of the interval $[0, T]$, the function $u^*(t)$ takes the values

$$u^*(0) = 6T^{-2}R\varphi_1^T, \quad u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T, \quad (2.10)$$

which is important when verifying the fulfillment of the constraint $|u(t)| \leq 1$.

As follows from (2.8) and (2.9), if $t_* \leq 0$, then the function $u^*(t)$ is monotonically decreasing over the entire interval $[0, T]$. If $0 < t_* < T$, then $u^*(t)$ increases monotonically on the interval $[0, t_*]$ and decreases monotonically on $[t_*, T]$. In both cases the maximum value $u^*(t_*)$, regarded as a function of T , decreases monotonically on the interval $[0, +\infty)$, taking values from $+\infty$ to 0 . Therefore, there exists a value $T = T' \in (0, +\infty)$ such that the maximum value (2.9) reaches the admissible boundary of control: $u^*(t_*) = 1$. From this equality, we find [20]

$$T' = \sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}} - b/(3a), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
p &= -b^2 / (3a^2) = -3k^2(\varphi_1^T)^2 / 4, \\
q &= 2b^3 / (27a^3) + d / a = -k^3(\varphi_1^T)^3 / 4 - 6R^2\varphi_1^T / k, \\
b / (3a) &= -k\varphi_1^T / 2, \\
D &= (p/3)^3 + (q/2)^2 = 3k^2R^2(\varphi_1^T)^4 / 4 + 9R^4(\varphi_1^T)^2 / k^2 > 0.
\end{aligned}$$

Thus, for a fixed value of φ_1^T and for any T satisfying the inequality $T' \leq T < \infty$, the control defined by formula (2.7) transfers system (1.7) from the initial state of rest (1.8) to the final state of rest (1.9), satisfies the constraint (1.10) and minimizes the functional (1.11).

Taking into account the constraint (1.10) and according to the maximum principle, the optimal control that maximizes the Hamiltonian (2.3) is determined as follows:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } u^*(t) > 1, \quad (\text{т.е. } H_u(t) > 0), \\ u^*(t), & \text{если } |u^*(t)| \leq 1, \quad (\text{т.е. } H_u(t) = 0), \\ -1, & \text{если } u^*(t) < -1, \quad (\text{т.е. } H_u(t) < 0), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T', \quad (2.12)$$

where $u^*(t)$ denotes the optimal control (2.7) derived from the maximum condition (2.3) without considering the constraints.

Let us examine the possible control structures (2.11) that may qualify as optimal.

From the concavity property of the function $u^*(t)$, it follows that for $0 < T < T'$, the maximum value of the control exceeds the constraint: $u^*(t) > 1$. Let us denote by

$$T^* = \sqrt{6R\varphi_1^T} \quad (2.13)$$

– the critical value of time at which the function $u^*(t)$ first reaches the constraint at the endpoints of the interval $[0, T]$.

Then, the following cases are possible:

$$\text{if } T^* < T < T', \text{ then } u^*(t_*) > 1 \text{ and } u^*(0) = -u^*(T) = 6T^{-2}R\varphi_1^T < 1, \quad (2.14)$$

$$\text{if } 0 < T \leq T^*, \text{ then } u^*(t_*) > 1 \text{ and } u^*(0) = -u^*(T) = 6T^{-2}R\varphi_1^T \geq 1. \quad (2.15)$$

Definition. A control $u(t)$ is said to be admissible for problem (1.7)–(1.11) if it belongs to the class of piecewise – continuous functions $KC[0, T]$, satisfies the constraint (1.10), and the corresponding solution of the system (1.7), (1.8) satisfies the terminal conditions (1.9).

In accordance with the definition of admissible control and taking into account cases (2.14) and (2.15), let us represent control (2.12) in more specific structures corresponding to these cases:

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [0, t_1] \text{ and } H_u(t) = 0, \\ 1, & t \in (t_1, t_2) \text{ and } H_u(t) > 0, \\ u_1(t), & t \in [t_2, T] \text{ and } H_u(t) = 0. \end{cases} \quad T^* \leq T \leq T', \quad (2.16)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1) \text{ and } H_u(t) > 0, \\ u_2(t), & t \in [t_1, t_2] \text{ and } H_u(t) = 0, \\ -1, & t \in (t_2, T] \text{ and } H_u(t) < 0, \end{cases} \quad 0 \leq T \leq T^*. \quad (2.17)$$

In (2.16) and (2.17), the moments t_1 and t_2 denote the switching points between control regimes that arise when the optimal control reaches its boundary values: $u^*(t) = \pm 1$. The functions $u_1(t)$ and $u_2(t)$ are defined on the intervals $[t_2, T]$ and $[t_1, t_2]$, respectively, and satisfy the conditions $|u_{1,2}(t)| \leq 1$ and $H_u(t) = 0$. These functions may partially coincide with $u^*(t)$, but in the general case they are chosen to ensure admissibility.

We use the results of work [20], in which, for given values of $R > 0$, $k > 0$, $\varphi_1^T > 0$, the conditions for admissibility of controls (2.16) and (2.17) were established.

Let us denote by

$$T_{\min} = \frac{R}{k^2} \ln \left\{ \left[1 + \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{k\varphi_1^T}{R}\right)} \right] \left[1 - \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{k\varphi_1^T}{R}\right)} \right]^{-1} \right\} \quad (2.18)$$

– the minimum transition time of system (1.7) from state (1.8) to state (1.9) in the time-optimal control problem with constraint (1.10) [21].

According to the results of [20] and taking into account cases (2.14) and (2.15), the admissibility of controls (2.16) and (2.17) is determined by the relationships between the quantities T' (2.11), T^* (2.13) and T_{\min} (2.18). Two cases are possible.

Case A. If $T_{\min} < T^* < T'$, then the structure (2.17) is inadmissible for $T \in (T_{\min}, T^*]$, while the structure (2.16) is admissible for $T \in (T^*, T')$.

Case B. If $T^* \leq T_{\min} < T'$, then for all $T \in (T_{\min}, T')$ the structure (2.17) is inadmissible, and the structure (2.16) is admissible. In the latter case, the optimality of structure (2.16) in problem (1.7)–(1.11) is also proven.

In summary:

- if $T' < T < \infty$, then control (2.7) is optimal in problem (1.7)–(1.11);
- if $T \in (T_{\min}, T')$, then the optimal control is the combined control (2.16), for which an algorithm is presented in Section 3;
- if $T \in (0, T_{\min}]$, then no admissible controls exist.

3. Algorithm for constructing the optimal combined control and numerical simulation. Let us proceed to the construction of the combined control (2.16) and the corresponding dependencies of $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ for problem (1.7)–(1.11), relying on the conditions of admissibility and optimality established above. Let the problem parameters be fixed: terminal time T , coefficients R , k and the terminal coordinate value $\varphi_1(T) = \varphi_1^T$.

We integrate system (1.7) with the initial condition (1.8) over the interval $[0, t_1]$, where the control is given by the function $u(t) = u^*(t)$ obtained without considering the control constraint. At the moment

$$t_1 = T / 2 - R / k - \sqrt{T^2 / 4 - T^3 / (6k\varphi_1^T) + R^2 / k^2}, \quad (3.1)$$

when the control (2.7) reaches the boundary value $u^*(t) = 1$, we obtain the values of the phase variables

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_1) &= (-2T^{-3}t_1^3 + 3T^{-2}t_1^2)\varphi_1^T = \varphi_1^{(1)}, \\ \varphi_2(t_1) &= (-6T^{-3}t_1^2 + 6T^{-2}t_1)\varphi_1^T = \varphi_2^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

On the next interval (t_1, t_2) , by integrating system (1.7) with initial conditions (3.2) under constant control $u(t) = 1$, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= k^{-1}(t - t_1) + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^{(1)})[\exp(-kR^{-1}(t - t_1)) - 1] + \varphi_1^{(1)}, \\ \varphi_2(t) &= k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^{(1)})\exp(-kR^{-1}(t - t_1)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

The values of the phase variables at the point t_2 will be denoted, respectively, by

$$\varphi_1(t_2) = \varphi_1^{(2)}, \quad \varphi_2(t_2) = \varphi_2^{(2)}. \quad (3.4)$$

On the final interval $[t_2, T]$ the control has the form (2.4)

$$u_1(t) = k\varphi_2(t) + p_2(t) / (2R) \quad p_2(t) = -A(t - t_2) + B, \quad (3.5)$$

where $p_2(t)$ is the solution of the second adjoint equation (2.2), A and B are integration constants to be determined.

Substitute expression (3.5) into system (1.7)

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{-A(t - t_2) + B}{2R^2}. \quad (3.6)$$

Integrating (3.6) with the initial conditions (3.4), we obtain

$$\varphi_1(t) = -\frac{A}{12R^2}(t - t_2)^3 + \frac{B}{4R^2}(t - t_2)^2 + \varphi_2^{(2)}(t - t_2) + \varphi_1^{(2)}, \quad (3.7)$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{A}{4R^2}(t - t_2)^2 + \frac{B}{2R^2}(t - t_2) + \varphi_2^{(2)}. \quad (3.8)$$

Taking into account (3.8), the control (3.5) can be written as

$$u_1(t) = -\frac{kA}{4R^2}(t-t_2)^2 + \frac{kB-RA}{2R^2}(t-t_2) + \frac{B}{2R} + k\varphi_2^{(2)} \quad (3.9)$$

For the admissible control $u_1(t)$ on $[t_2, T]$ the following conditions must be satisfied:

- 1) boundary conditions (1.9);
- 2) continuity of the control at the point t_2 : $u_1(t_2) = 1$;
- 3) concavity and monotonicity: $A > 0$, $B < RA/k$;
- 4) compliance with the constraint at the end: $u_1(T) \geq -1$.

From 2) we obtain $u_1(t_2) = k\varphi_2^{(2)} + \frac{B}{2R} = 1$ or equivalently:

$$B = 2R(1 - k\varphi_2^{(2)}). \quad (3.10)$$

After substituting (3.10) into formulas (3.7) and (3.8) for $t = T$, from condition $\varphi_2(T) = 0$ (1.9) we find an explicit expression for

$$A = \frac{4R(1 - k\varphi_2^{(2)})}{(T-t_2)} + \frac{4R^2\varphi_2^{(2)}}{(T-t_2)^2}, \quad (3.11)$$

which is then substituted into condition $\varphi_1(T) = \varphi_1^T$ (1.9).

As a result, we obtain an equation with respect to a single parameter t_2 :

$$\frac{(1 - k\varphi_2^{(2)})}{6R}(T-t_2)^2 + \frac{2\varphi_2^{(2)}}{3}(T-t_2) + \varphi_1^{(2)} - \varphi_1^T = 0. \quad (3.12)$$

It has two real roots

$$t_2 = T - \frac{-2R\varphi_2^{(2)} \pm \sqrt{(2R\varphi_2^{(2)})^2 - 6R(1 - k\varphi_2^{(2)})(\varphi_1^{(2)} - \varphi_1^T)}}{1 - k\varphi_2^{(2)}}, \quad (3.13)$$

but only one – with the positive sign in front of the radical – satisfies conditions 1) – 4). This choice will also be confirmed in the numerical example below.

When these conditions are satisfied, the problem is considered solved, and the obtained control is deemed admissible and optimal within the chosen structure.

Let's present a numerical example of the implementation of the proposed algorithm for constructing the optimal control (2.16). Suppose the electromechanical manipulator is characterized by the following dimensional parameters [1], which enter into equation (1.1):

$$\begin{aligned} I &= 5.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad J = 2.45 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad n = 163, \\ R &= 3.6 \text{ Ohm}, \quad k = 0.233 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{A}, \quad U = 110 \text{ V}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

When switching to nondimensional variables (1.6), we choose as the unit of time the quantity $\bar{T} = nkU^{-1} \approx 0.345 \text{ s}$, equal to the time it takes the manipulator arm to rotate by

one radian when moving at a steady angular velocity $\dot{\varphi} = (nk)^{-1}U \approx 2.9s^{-1}$ [1]. The nondimensional parameters of equation (1.7) then take the values:

$$R \approx 0.09, \quad k \approx 1. \quad (3.15)$$

With an initial angle of zero $\varphi_1(0) = 0$ rad, we set the final rotation angle corresponding to condition (1.9) equal to

$$\varphi_1^T = 1 \text{ rad.} \quad (3.16)$$

Construction of the optimal control (2.16) and the corresponding phase trajectories $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ is carried out in the following sequence:

1. Using the given parameters (3.15), (3.16) and formulas (2.11), (2.13), and (2.18), determine the values: $T^* = 0.735$, $T' = 1.52$, $T_{\min} = 1.125$. Since $T^* < T_{\min} < T'$, the case B considered in Section 2 is realized, in which $T \in (T_{\min}, T') = (1.125, 1.52)$.

2. Choose $T = 1.5 \in (1.125, 1.52)$.

3. For the selected value of T , construct the optimal control profile (2.16). In this process, the switching time $t_1 = 0.57$ is calculated using formula (3.1), and to determine the switching time t_2 the following procedure is applied.

First, using formulas (3.10) and (3.11), the coefficients $A = 0.0594$, $B = 0.0016$ are calculated so that all the admissibility conditions for the control $u_1(t)$ (3.9), formulated in items 1)–4) of Section 3, are satisfied. Then, the switching time t_2 is determined as the root of equation (3.13).

Figure 1 shows the graph of the function $F(t_2)$, defined by equation (3.13) for the numerical values of the parameters (3.15), (3.16), $T = 1.5$. The function $F(t_2)$ has the form:

$$F(t_2) = 1.5 - t_2 - \frac{-0.18\varphi_2^{(2)} + \sqrt{0.0324(\varphi_2^{(2)})^2 - 0.54(1 - \varphi_2^{(2)})(\varphi_1^{(2)} - 1)}}{1 - \varphi_2^{(2)}}$$

where the values $\varphi_1^{(2)} = \varphi_1^{(2)}(t_2)$, $\varphi_2^{(2)} = \varphi_2^{(2)}(t_2)$ are determined by formulas (3.3) and (3.4) at $t = t_2$.

From the graph in Figure 1, it is seen that the equation $F(t_2) = 0$ on the interval $(0.57, 1.5)$ has a unique solution. The result of the numerical solution is $t_2^* = 0.7373$, which confirms the correctness of the chosen parameters A , B and the uniqueness of the constructed optimal control.

Figures 2–4 show the graphs of the optimal control (2.16) and the dependencies $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, obtained at $T = 1.5$. The control $u(t)$ (fig. 2) has a combined structure: on the

initial interval $[0, t_1]$ and the final interval $[t_2, T]$ it varies according to a smooth (parabolic) law, while on the middle interval $[t_1, t_2]$ it takes a constant value $u(t) = 1$,

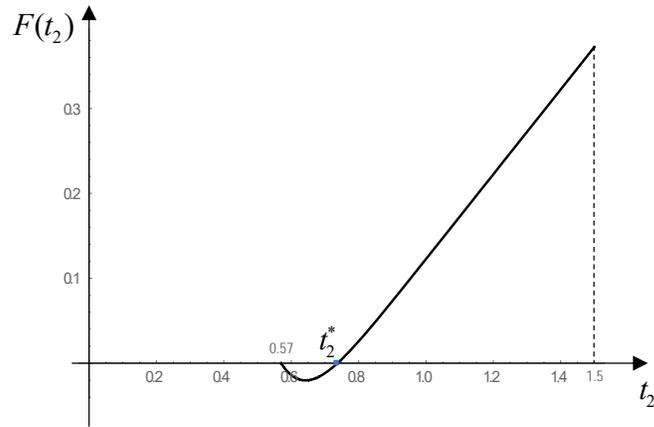


Fig. 1

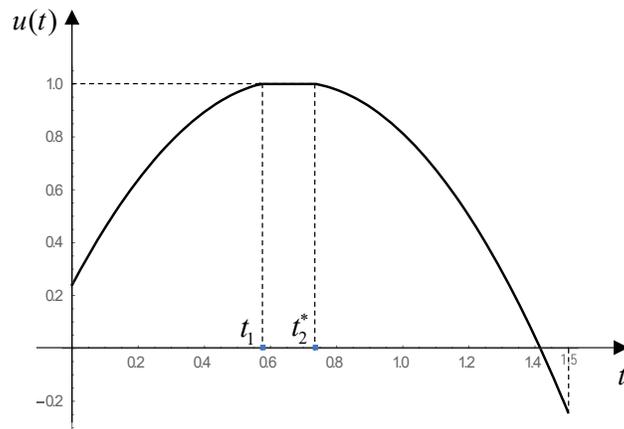


Fig. 2

satisfying the constraint $|u(t)| \leq 1$ for all $t \in [0, T]$.

Based on the results of numerical simulation, the following values were obtained:

$$\varphi_1(1.5) = 1.00024 \text{ rad}, \quad \varphi_2(1.5) = 0.00099 \text{ rad},$$

which correspond to an accuracy on the order of 10^{-3} , upon reaching the final state.

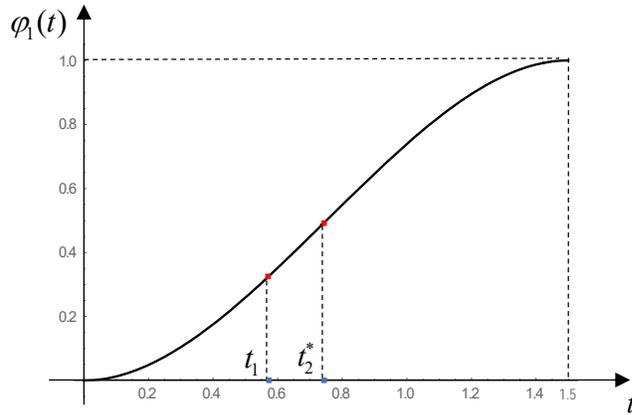


Fig. 3

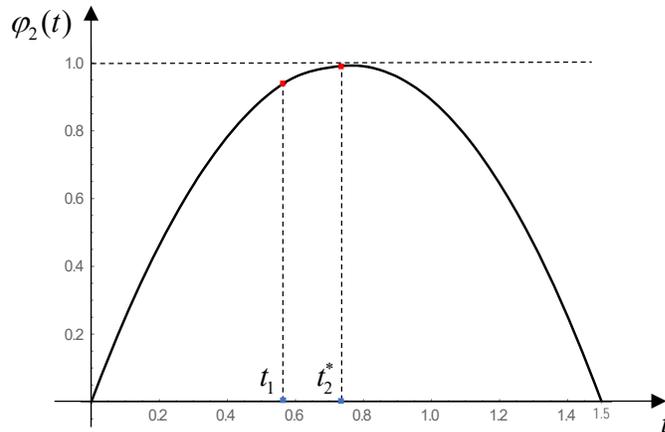


Fig. 4

Since the moment is uniquely determined from equation (3.15), the corresponding admissible control (2.16), satisfying constraint (1.10) and transferring system (1.7) from the rest state (1.8) to the final rest state (1.9), is also unique. Therefore, it is optimal in the sense of minimizing the functional (1.11).

The calculated value of the functional (1.11) in nondimensional units is $Q_1 = 0.029$. By converting to dimensional variables using the corresponding formulas (1.6), we obtain the amount of thermal losses $Q = 33.6 \text{ J}$ (1.5), corresponding to the implemented optimal control.

Thus, the proposed algorithm ensures the construction of an optimal control according to criterion (1.11), satisfying the constraints and providing a high – precision implementation of the required transition.

Conclusion. This study addresses the problem of constructing energy-optimal control for a single-link electromechanical manipulator subject to a control voltage constraint. Based on Pontryagin's maximum principle, it is established that for large transition times, the optimal control corresponds to the unconstrained solution, whereas for small transition times, a combined control structure is required. An algorithm for such control is developed, and its feasibility is confirmed by numerical simulations demonstrating compliance with the control constraint and boundary conditions while ensuring minimal energy consumption.

References

1. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G. Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. – Boca Raton: CRC Press, 1994. 268 p.
2. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimization of manipulation robot control // Soviet Journal of Computer Systems Sciences. 1990. Vol. 28. Issue 5. P. 127–169.
3. Avetisyan V.V., Bolotnik N.N. Suboptimal control of an electromechanical manipulator with a high degree of positioning accuracy // Mechanics of Solids. 1990. Vol. 25. Issue 5. P.32-41.
4. Khalil W., Dombre E. Modeling, Identification and Control of Robots. – CRC Press. 2002, 480 p.
5. Spong, M. W., Hutchinson, S., Vidyasagar, M. Robot Modeling and Control. – John Wiley & Sons. 2006, 496 p.
6. Boldea, I., Nasar, S. A. Electric Drives. – Boca Raton: CRC Press. 2016. 672 p.
7. Gregory J., Olivares A., Staffetti E. Energy – optimal trajectory planning for robot manipulators with holonomic constraints // Systems and Control Letters. 2012. Vol. 61. Issue 2. P. 279–291. DOI: [10.1016/j.sysconle.2011.11.005](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.11.005)
8. Mirro, J. et al., Optimal control of a single – link flexible manipulator // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 1989. Vol. 2. P.187–199.
9. Hussain, S. et al. A robust and energy – efficient trajectory planning framework for high degree of freedom robots //arXiv:2503.11716(2025). DOI: [10.48550/arXiv.2503.11716](https://doi.org/10.48550/arXiv.2503.11716)
10. Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N.V. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two – Link manipulator // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 238. No. 2. P. 174-188. DOI: [10.1007/s10958-019-04227-8](https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8)
11. Oršanský P., Ftorek B., Vittek J. Energy optimal trajectories for electro – mechanical systems // Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. 776(1)012113. DOI: [10.1088/1757-899X/776/1/012113](https://doi.org/10.1088/1757-899X/776/1/012113)
12. Galicki M. Energy optimal control of mobile manipulators subject to compensation of external disturbance forces // Mechanism and Machine Theory. 2022. Vol. 167. Article 104550. DOI: [10.1016/j.mechmachtheory.2021.104550](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104550)
13. Abdullah Mohammed, Bernard Schmidt, Lihui Wang, Liang Gao. Minimizing Energy Consumption for Robot Arm Movement // 8th International Conference on Digital Enterprise Technology – Procedia CIRP 25 (2014). P. 400–405. DOI:[10.1016/j.procir.2014.10.055](https://doi.org/10.1016/j.procir.2014.10.055)
14. Avetisyan V.V. Movements of an electromechanical manipulator robot optimal with respect to energy expenditure // Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. Vol. 35. Issue 4. P. 679–6856.

15. Avetisyan V.V., Martirosyan, S.R. Guaranteed Search for a Target Object by an Electromechanical System with Minimal Light Power Costs // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2009. Vol. 48. Issue 5. P. 814–826. DOI: [10.1134/S1064230709050153](https://doi.org/10.1134/S1064230709050153)
16. Avetisyan V.V. Controlled dynamic search for a mobile object with minimum cost of light energy // *Automation and Remote Control*. 2020. Vol. 81. Issue 4. P. 662–669. DOI: [10.1134/S0005117920040086](https://doi.org/10.1134/S0005117920040086)
17. Bolotnik N.N., Sattar T.P. Adaptive time – optimal control of a robotic manipulator // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 1993. Vol. 31. Issue 3. P. 171–182.
18. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // *Soviet Journal of Computer Systems Sciences*. 1987. Vol. 25. Issue 3. P. 100-107.
19. Pontryagin L.S. et al. *Mathematical Theory of Optimal Processes*. – M.: Nauka, 1983. 393p. (in Russian).
20. Avetisyan V.V. Optimal Control of an Electromechanical Manipulator with Minimal Energy Consumption // *Mechanics – Proceedings of NAS PA*. 2023. Vol. 77. Issue 3. P. 58 – 73. (in Russian). DOI: [10.54503/0002-3051-2024.77.3-58](https://doi.org/10.54503/0002-3051-2024.77.3-58)
21. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Modeling and optimization of transport motion for an industrial robot // *Soviet Journal of Computer Systems Sciences*. 1986. Vol. 24. Issue 6. P. 97 – 103.

Information about author:

Avetisyan Vahan – Doctor of Science (Physics and Mathematics), professor, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, tel.: +374 94 449560, e-mail: vanavet@yahoo.com

Received 14 August 2025

**REFLECTION AND TRANSMISSION OF SHEAR ELASTIC WAVES THROUGH
PERIODICALLY STRATIFIED BI-MATERIAL ELASTIC LAYER**

K.B. Ghazaryan, R.A. Ghazaryan, S.H. Terzyan

Keywords: reflection and refraction, shear wave, periodic structure, frequency band gaps.

Казарян К., Казарян Р., Терзян С.
**Отражение и преломление сдвиговых упругих волн от периодически
слоистого упругого слоя из двух материалов.**

Ключевые слова: отражение, преломление, сдвиговая волна, периодическая структура, запрещенные зоны частот.

Исследовано поведение сдвиговых волн при взаимодействии с периодически расслаивающимся упругим слоем, расположенным между двумя идентичными упругими полупространствами. Анализ сосредоточен на определении характеристиках отражения и преломления этих волн от слоистой структуры. Коэффициент преломления определяется для количественной оценки доли волновой энергии, передаваемой через композитный слой. Показано, что когда частоты падающей сдвиговой волны в пределах запрещенной зоны частот соответствующей бесконечной периодической среды, коэффициент пропускания упругой волны близок к нулю. В этих частотных диапазонах периодическая структура демонстрирует почти полное отражение, а коэффициент отражения приближается к единице. И наоборот, когда частоты падающей волны лежат между любыми двумя соседними запрещенными зонами частот, существует конечный набор частот, при которых коэффициент пропускания упругих волн достигает единицы. На этих частотах отражательная способность полностью исчезает и волна идеально проходит через слоистую структуру. Кроме того, мы исследуем изменение фазового сдвига отраженной сдвиговой волной, когда слоистая структура ограничена с одной стороны упругим полупространством, а с другой - свободной от напряжений поверхностью.

Ղազարյան Կ.Բ., Ղազարյան Ռ.Ա., Թերզյան Ս.Հ.
**Սահիքի առաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը երկու նյութերից կազմված
պարբերական շերտավոր առաձգական շերտից**

Հիմնաբառեր՝ անդրադարձում, բեկում, սահիքի ալիք, պարբերական կառուցվածք, հաճախությունների արգելված գոտիներ:

Հետազոտված է, պարբերական շերտավորվող առաձգական շերտի փոխազդեցությամբ պայմանավորված, սահիքի ալիքների վարքը: Շերտը գտնվում է երկու նույնական առաձգական կիսատարածությունների միջև: Վերլուծությունը կենտրոնացված է շերտավոր կառուցվածքից այդ ալիքների անդրադարձման և բեկման բնութագրիչների որոշմանը: Բեկման գործակիցը որոշվում է կոմպոզիտային շերտի միջոցով փոխանցվող ալիքային էներգիայի մասնաբաժնի քանակական գնահատականի համար: Ցույց է տրված, որ երբ ընկնող սահիքի ալիքի հաճախությունը գտնվում է համապատասխան անվերջ պարբերական միջավայրի արգելված գոտու հաճախության սահմաններում, առաձգական ալիքի բաց թողման գործակիցը մոտ է գրոյին: Այդ հաճախական ընդգրկություններում պարբերական կառուցվածքը համարյա լրիվ անդրադարձում է ցույց տալիս, իսկ անդրադարձման գործակիցը մոտենում է մեկին: Եվ հակառակը, երբ ընկնող ալիքի հաճախություններն ընկած են հաճախությունների արգելված, ցանկացած երկու հարևան, գոտիների միջև, գոյություն ունի հաճախությունների վերջավոր քանակ, որոնց դեպքում առաձգական ալիքների

բաց թողնման գործակիցը հասնում է մեկին: Այդ հաճախություններում անդրադարձման հատկությունը ամբողջությամբ վերանում է, և ալիքը կատարելապես անցնում է շերտավոր կառուցվածքի միջով: Բացի այդ, ուսումնասիրում ենք սահի ալիքով արտացոլված ֆազային շեղումը, երբ շերտավոր կառուցվածքը սահմանափակված է մի կողմից առաձգական կիսատարածությունով, իսկ մյուս կողմից լարումներից ազատ մակերևույթով:

In this study, we investigate the behaviour of incident shear waves as they interact with a periodically stratified bi-material elastic layer positioned between two identical elastic half-spaces. Our analysis focuses on the reflection and transmission characteristics of such waves as they encounter the layered structure. The transmission coefficient is defined to quantify the proportion of wave energy transmitted through the composite layer. It is demonstrated that, when the frequencies of the incident shear wave fall within the bandgaps of the corresponding infinite periodic medium, the transmissivity of the elastic wave approaches zero. In these frequency ranges, the structure exhibits almost complete reflection, with the reflectivity nearing unity. Conversely, when the frequencies of the incident wave lie between any two adjacent bandgaps of the infinite periodic medium, there exists a finite set of frequencies at which the elastic wave transmissivity reaches unity. At these specific frequencies, the reflectivity vanishes entirely, and the wave is perfectly transmitted through the layered structure. Additionally, we examine the phase shift experienced by the reflected shear wave when the layered structure is by an elastic half-space and the other by a free interface.

Furthermore, this study analyses the phase shift of the reflected shear wave occurring when one side of the layered structure is adjacent to an elastic half-space and the other side is bounded by a free interface.

Introduction.

The phenomena of reflection and transmission of elastic waves at the interface between two distinct media play a crucial role in a variety of scientific and engineering disciplines. In composites engineering, understanding how elastic waves interact at material boundaries is essential for the design and analysis of advanced composite structures. In geology and seismology, the propagation of elastic waves through different earth layers underpins the interpretation of seismic data, which is fundamental for studying the Earth's interior and for earthquake research. Seismic exploration also relies heavily on these phenomena, as the reflection and transmission of waves at subsurface interfaces are used to identify and characterise geological formations. Furthermore, in acoustics, the way elastic waves reflect and transmit at material boundaries determines the sound transmission properties of structures, influencing the design of materials and systems for noise control and sound insulation. The issues related to the reflection and transmission of elastic waves in layered media have been the focus of extensive analysis by numerous researchers. Their combined efforts established the basis for analysing wave behaviour at layered structure interfaces [1-11].

When two distinct elastic materials are joined together, it is typically assumed that the interface connecting them is perfectly bonded. This means that, at the boundary, certain fundamental physical quantities must remain continuous from one material to the other. In particular, both the displacement and the traction (which represents the mechanical forces acting across the interface) are required to be continuous. The continuity of displacement ensures that there is no separation or slip at the boundary, so the deformations are transmitted smoothly. Similarly, the continuity of traction guarantees that the mechanical forces are balanced and transferred seamlessly from one material to the other. This idealisation is commonly adopted in analytical and computational models, as it simplifies the study of how forces and deformations are transmitted and distributed at the interface between different elastic materials. While the assumption of a perfectly bonded interface between two elastic materials simplifies analysis, it does not always represent actual conditions encountered in practice. In reality, interfaces may contain various defects,

damages, or other imperfections. Several theoretical models have been developed to represent imperfect interfaces [11-16].

The most commonly used models include the strain-gradient model, which accounts for higher-order mechanical effects at the interface; the spring model, which introduces interfacial compliance; the mass model, which considers additional interfacial inertia; and the combined spring-mass model, which incorporates both compliance and inertia effects. Each of these models offers a different perspective on how imperfections at the interface can affect wave transmission and reflection, and they play a crucial role in the accurate analysis of layered composite structures [17-24].

This study focuses on the behaviour of incident shear waves as they encounter a periodically stratified bi-material elastic layer that is positioned between two identical elastic half-spaces. The research centres on analysing how these waves are reflected and transmitted when passing through the layered medium. By examining the reflection and transmission properties, the study aims to provide a detailed understanding of the mechanisms governing wave interaction within the composite structure. The findings contribute to a broader comprehension of elastic wave dynamics in layered materials, which is relevant for various applications in engineering and the physical sciences.

#

Problem statement and matrix approach for periodic structure.

Consider two homogeneous elastic half-spaces, composed of identical materials, separated by a periodically in perfect interfacial contact. This stratified layer consists of n ($n = 1, 2, \dots, N$) repeating unit cells, with each cell comprising two distinct sub-layers formed from different elastic materials A and B of widths a, b . Each sub-layer is assumed to be perfectly bonded to its adjacent sub-layers. The composite layer extends from the top surface $x = 0$ to the bottom surface $x = Nd$ and $d = a + b$.

Shear waves propagation in stratified bi-material elastic layer obey to anti-plane equations of motion. Choosing the anti-plane deformation in the z - direction one has

$$\partial_x \sigma_{xz} + \partial_y \sigma_{yz} = \rho \partial_{tt} u_z, \quad \sigma_{xz} = \mu \partial_x u_z, \quad \sigma_{yz} = \mu \partial_y u_z \quad (1)$$

where $u_z(x, y, t)$ is the displacement in z - direction.

Considering a steady SH-wave propagation $\sim \exp[i(ky - \omega t)]$, where k, ω are the wave number and frequency, the solutions for amplitude functions $u(x), v(x)$ within each the sub-layers material $x \in (n-1)d, (n-1)d + a), x \in (nd - b, nd)$ can be found as

$$u(x) = A_1 \sin(px) + A_2 \cos(px), \quad v(x) = B_1 \sin(qx) + B_2 \cos(qx). \quad (2)$$

Here

$$p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_a^2} - k^2}, \quad q = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_b^2} - k^2}, \quad c_a = \sqrt{\frac{G_a}{\rho_a}}, \quad c_b = \sqrt{\frac{G_b}{\rho_b}}, \quad (3)$$

G_a, G_b are the shear modulus, ρ_a, ρ_b bulk density of sub-layers materials, correspondingly.

Enforcing the continuity of tractions and displacement at the contact interface $x_0 = nd - b$ of the two materials

$$u(x_0) = v(x_0)$$

$$G_a \frac{du(x_0)}{dx} = G_b \frac{dv(x_0)}{dx} \quad (4)$$

we can express B_1, B_2 via A_1, A_2

$$B_1 = A_1 \left(\frac{G_a p \cos(px_0) \cos(qx_0)}{G_b q} + \sin(px_0) \sin(qx_0) \right) + A_2 \left(\cos(px_0) \sin(qx_0) - \frac{G_a p \sin(px_0) \cos(qx_0)}{G_b q} \right) \quad (5)$$

$$B_2 = A_1 \left(\sin(px_0) \cos(qx_0) - \frac{G_a p \cos(px_0) \sin(qx_0)}{G_b q} \right) + A_2 \left(\frac{G_a p \sin(px_0) \sin(qx_0)}{G_b q} + \cos(px_0) \cos(qx_0) \right); \quad (6)$$

Introducing field vectors and constant vector

$$\mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ G_a \frac{du(x)}{dx} \end{pmatrix}, \mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} v(x) \\ G_b \frac{dv(x)}{dx} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

the expressions of the vector $\mathbf{u}((n-1)d), \mathbf{v}(nd)$ can be expressed via the vector \mathbf{A} in the following matrix form

$$\mathbf{u}((n-1)d) = \mathbf{P}\mathbf{A} \quad (8)$$

$$\mathbf{v}(nd) = \mathbf{Q}\mathbf{A}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sin(p(n-1)d) & \cos(p(n-1)d) \\ G_a p \cos(p(n-1)d) & -G_a p \sin(p(n-1)d) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

$$q_{11} = \frac{G_a p \sin(bq) \cos(px_0)}{G_b q} + \cos(bq) \sin(px_0);$$

$$q_{12} = \cos(bq) \cos(px_0) - \frac{G_a p \sin(bq) \sin(px_0)}{G_b q}$$

$$\begin{aligned} q_{21} &= G_a p \cos(bq) \cos(px_0) - G_b q \sin(bq) \sin(px_0); \\ q_{22} &= -qG_b \sin(bq) \cos(px_0) - G_a p \cos(bq) \sin(px_0) \end{aligned} \quad (10)$$

Omitting the vector $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}((n-1)d)$ leads to the following relation connecting values of the field vectors at a cells interface

$$\mathbf{v}(nd) = \mathbf{M}\mathbf{u}((n-1)d) \quad (11)$$

Here $\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$ is a unimodal matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(ap) \cos(bq) - \frac{G_a p \sin(ap) \sin(bq)}{G_b q} & \frac{\sin(ap) \cos(bq)}{G_a p} + \frac{\cos(ap) \sin(bq)}{G_b q} \\ -G_a p \sin(ap) \cos(bq) - G_b q \cos(ap) \sin(bq) & \cos(ap) \cos(bq) - \frac{G_b q \sin(ap) \sin(bq)}{G_a p} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Let note that elements of matrix \mathbf{M} do not depend of cell number n . Repeating this procedure the n -th times the propagator unimodal matrix \mathbf{M}^n can be found. The matrix \mathbf{M}^n links the field vectors at $x = 0$ and $x = nd$ surfaces of the waveguide.

$$\mathbf{M}^n \mathbf{u}(0) = \mathbf{v}(nd), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

According to Sylvester's matrix polynomial theorem [28] for 2x2 matrices the elements of the n -th power of an unimodal matrix \mathbf{M}^n can be cast as

$$\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (14)$$

and can be simplified using the following matrix identity

$$\begin{aligned} M_{11} &= m_{11} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta); & M_{12} &= m_{12} S_{n-1}(\eta) \\ M_{21} &= m_{21} S_{n-1}(\eta); & M_{22} &= m_{22} S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta) \end{aligned} \quad (15)$$

where $S_{n-1}(\eta)$ are the Chebyshev polynomials of second kind, namely

$$S_n(\eta) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)}; \quad \cos(\phi) = \eta; \quad (16)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{M}) = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22});$$

In addition to the finite sized bi-material layer we consider a corresponding infinite bi-material layer. By applying the Floquet conditions at the unit cell boundaries, $x = (n-1)d, x = nd$ we obtain:

$$\mathbf{v}(nd) = \exp(\kappa d) \mathbf{u}((n-1)d) \quad (17)$$

Using (11) leads to the Floquet equation

$$\cos(\kappa d) = \eta(\omega) \quad (18)$$

Here κ is the complex Bloch wave number, and $\eta(\omega)$ is defined in (16).

Thus, the deviation function $\eta(\omega)$ – argument of the Chebyshev polynomials, as applied to the corresponding infinite periodic medium, defines the frequency "stopbands" under $|\eta(\omega)| > 1$ and identifies the "passband" frequencies under $|\eta(\omega)| < 1$.

Shear elastic wave reflection and transmission.

Consider now the reflection and transmission of the shear wave through periodically stratified bi-material elastic layer positioned between two identical elastic half-spaces.

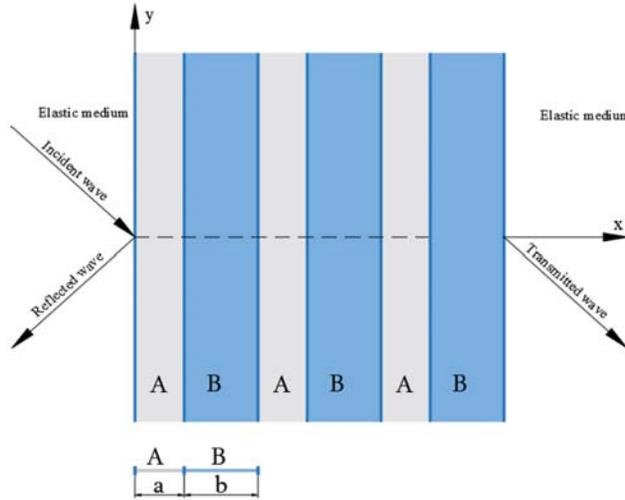


Figure 1: Reflection and transmission of shear wave through layer sandwiched into elastic medium

The shear displacements and shear stresses in the top $-\infty < x < 0$ and in the bottom $0 < x < \infty$ half-spaces can be cast as

$$V(x, y, t) = V_0(x) \exp[i(ky - \omega t)]; \quad U(x, y, t) = U_0(x) \exp[i(ky - \omega t)]$$

$$V_0(x) = (A_i \exp(irx) + A_r \exp(-irx)); \quad U_0(x) = A_t \exp(irx) \quad (19)$$

$$\sigma_{xz1} = G \frac{dV_0}{dx}, \quad \sigma_{xz2} = G \frac{dU_0}{dx};$$

Here

$$r = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} = d^{-1} \sqrt{\Omega^2 - K^2}; \quad \Omega = \frac{\omega d}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad K = kd$$

A_i, A_r, A_t , stand for the amplitudes of incident, reflected and transmitted shear waves, respectively, G is the shear modulus, ρ is the bulk density of semi-space material

The conditions for perfect contact between displacements and shear stresses in an elastic medium and a bi-material stratified layer at $x = 0, x = Nd$ can be expressed as follows:

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{U}(0), \quad \mathbf{u}(Nd) = \mathbf{U}(Nd) \quad (20)$$

where

$$\mathbf{V}(0) = \begin{pmatrix} V_0(0) \\ G \frac{dV_0(0)}{dx} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}(Nd) = \begin{pmatrix} U_0(Nd) \\ G \frac{dU_0(Nd)}{dx} \end{pmatrix}; \quad (21)$$

Taking into account (21) the amplitudes A_r, A_t via A_i can be found by solving the matrix equation

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + A_r \\ Gr(A_i - A_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_t \\ GrA_t \end{pmatrix} \exp(irNd) \quad (22)$$

$$A_r = -\frac{A_i(M_{21} + Gr(GrM_{12} - i(M_{11} - M_{22})))}{M_{21} - Gr(GrM_{12} + i(M_{11} + M_{22}))}, \quad (23)$$

$$A_t = -\frac{2iA_iGr e^{-idNd}}{M_{21} - Gr(GrM_{12} + i(M_{11} + M_{22}))}$$

Defining reflection and transmission functions (coefficients) as

$$R_r = \left| \frac{A_r}{A_i} \right|^2, \quad R_t = \left| \frac{A_t}{A_i} \right|^2 \quad (24)$$

from (23) we get

$$R_r = \frac{G^2 r^2 (G^2 M_{12}^2 r^2 + M_{11}^2 + M_{22}^2 - 2) + M_{21}^2}{G^2 r^2 (G^2 M_{12}^2 q^2 + M_{11}^2 + M_{22}^2 + 2) + P_{21}^2}, \quad (25)$$

$$R_t = \frac{4G^2 r^2}{G^2 r^2 (G^2 M_{12}^2 q^2 + M_{11}^2 + M_{22}^2 + 2) + M_{21}^2};$$

Energy flux conservation is expressed via reflection and transmission coefficients in the following transmissivity and reflectivity identity

$$R_r + R_t = 1 \quad (26)$$

Using (25) and the following recurrence identity formula for the Chebyshev polynomials of the second kind

$$S_n^2(\eta) + S_{n-1}^2(\eta) - 2\eta S_n(\eta)S_{n-1}(\eta) = 1 \quad (27)$$

the relations (25) can be transform as

$$R_i = \frac{4G^2 r^2}{4G^2 r^2 + S_{N-1}^2(\eta) \left(G^2 r^2 \left(G^2 m_{12}^2 r^2 + m_{11}^2 + m_{22}^2 - 2 \right) + m_{21}^2 \right)}; \quad (28)$$

Since $S_{N-1}(\eta) \rightarrow 0$ at $N \rightarrow \infty$ when $|\eta(\omega)| > 1$ the incident wave frequencies are in the "stopbands" of the stratified layer, the transmission function decreases as the number of cells increases. In contrast, within the "passbands," $|\eta(\omega)| < 1$ the transmission function exhibits periodic behaviour.

Consider now the wave reflection from a finite-length stratified layer bounded on one side by an elastic half-space and on the other by a mechanically free surface.

The amplitude of a reflection wave A_r can be found by solving the following matrix equation where $U(Nd)$ is the unknown displacement at the layer traction free surface.

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i + A_r \\ Gir(A_i - A_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(Nd) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(irNd) \quad (29)$$

From solution of (29) we have

$$A_r = -A_i \begin{pmatrix} M_{21} + iGrM_{22} \\ M_{21} - iGrRM_{22} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Since the complex conjugate of the reflection coefficient $T_r = A_r/A_i$ is equal its reciprocal, the magnitude $|T_r|$ equal unity at any frequency Ω of incident wave.

Writing T_r in the polar form of complex number we have

$$T_r = -\exp(2i\phi), \quad (31)$$

$$\text{where } \phi(\Omega) = \text{arctg} \left(\frac{GrM_{22}}{M_{21}} \right) = \text{arctg} \left(\frac{Gr(m_{22}S_{n-1}(\eta) - S_{n-2}(\eta))}{m_{21}S_{n-1}(\eta)} \right) \quad (32)$$

Formula (32) gives the phase shift for a shear elastic wave reflected from a finite-length stratified layer, which is bonded to an elastic half-space on one surface and mechanically free on the other.#

Numerical analysis and discussions.

We here will illustrate the obtained theoretical results providing numerical analysis concerning bandgaps of the stratified layer (counterpart infinite media), reflection and transmission coefficients as well as reflection wave phase shifts. Numerical calculations have been carried out for materials listed in Table 1

Table 1

Substance	Bulk density $\rho(\text{kgm}^{-3})$	Shear modulus $G(\text{GPa})$	Transversal velocity $c(\text{ms}^{-1})$
Aluminium	2700	25	3040

Copper	8900	46	2320
Titanium	4500	42	3120

Based on (28), the transmission and reflection of the elastic wave are considered when material of elastic semi-spaces is the titanium, the elastic reflector made of the aluminium and copper materials. Numerical analysis of counterpart infinite piezoelectric media will be carried out for the aluminium and copper materials.

The condition $|\eta(\Omega)| > 1$, where $\Omega = \omega d \sqrt{G^{-1} \rho}$ stand for titanium material defines bandgaps of counterpart infinite piezoelectric media.

On Figure 2 for counterpart infinite media of the layer made of aluminium and copper materials the deviation function curves versus frequency Ω are plotted.

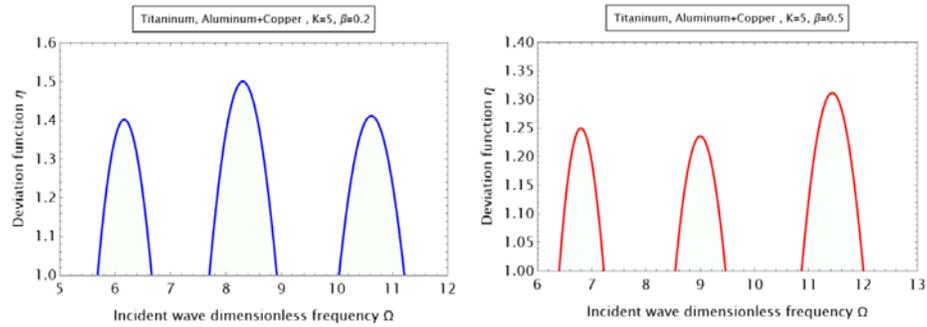


Figure 2. Plots of a first and subsequent bandgaps for material at different values of parameter β

Analysis of the function $\eta(\Omega)$ shows that that variations in material arrangement within the unit cell, as characterized by the filling coefficient $\beta = a/d$, slightly affect the lengths of the first bandgaps.

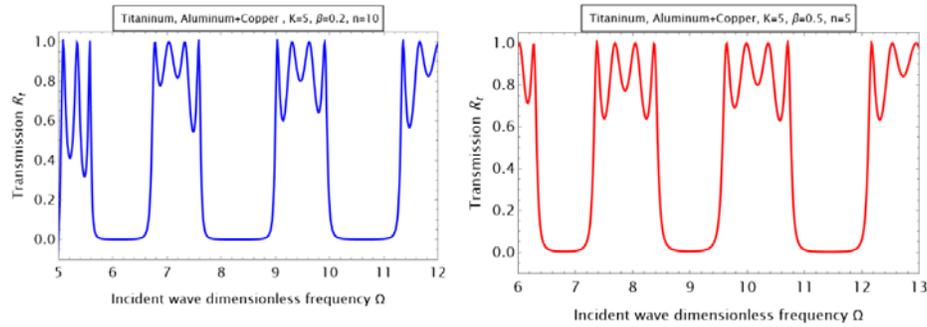


Figure 3. Plots of a transmission functions at different values of parameter β

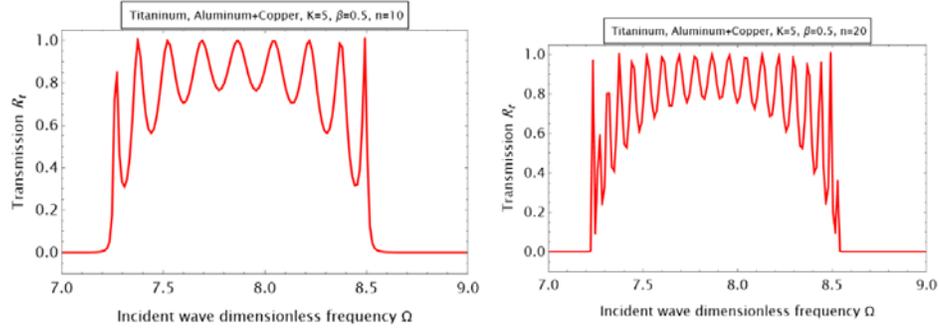


Figure 4. Plots of a transmission functions at different values of cell numbers $n = 10, n = 20$ between first and second bandgaps

Analysis of Fig. 4 illustrates that when the frequencies of the incident elastic wave fall within the bandgaps of the corresponding infinite periodic medium, the transmissivity of the elastic wave decreases significantly, approaching zero. In these frequency intervals, the layer becomes highly reflective, with the reflectivity nearing unity. This phenomenon occurs even in layers that contain a relatively small number $n = 5$ of unit cells, demonstrating the effect of bandgap formation on wave propagation in such structured materials.

As indicated by the transmission function plots, there exists a set of frequencies between any two bandgaps where the transmission function reaches a value of one, meaning that reflectivity effectively disappears. This phenomenon occurs consistently in the frequency ranges that lie between adjacent bandgaps. The presence of these specific frequencies can be explained by examining the behaviour of the transmission function outside of these intervals. In the range between two bandgaps, the transmission function possesses a number of zeroes, which are determined by the underlying physical properties of the system. The existence of a set of such frequencies can be explained as follows.

Between two any bandgaps $|\eta| < 1$ the function has $N - 1$ zeroes given by

$$\eta(\Omega_{0m}) = \cos(m\pi N^{-1}), m = 1, 2, \dots, (N - 1) .$$

From (14), it follows that at these frequencies, #

$$S_{N-1}(\eta) = 0, R_t = 1, (R_r = 0) .$$

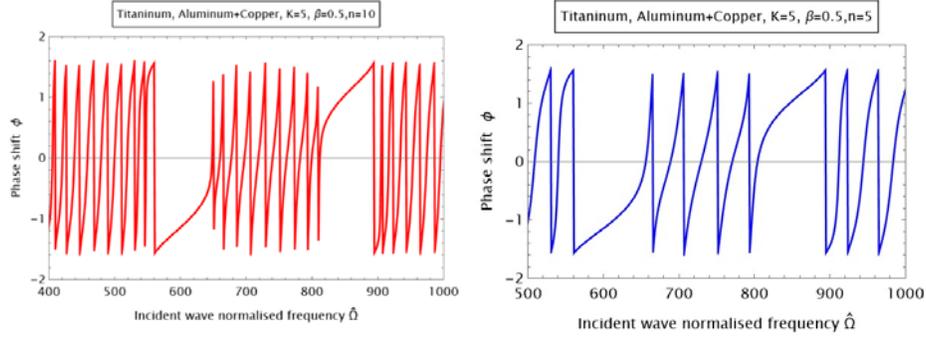


Figure 5. Phase shift plots of the reflected wave

The graph in Figures 5 based on (40) shows how the phase shift $\phi(\Omega)$ changes with frequency. Blue curves correspond to $n = 10$, blue curves to $n = 5$ structures. The phase shift is a function of the normalized frequency $\hat{\Omega} = 100\Omega$.

As it follows from the plots on Figure 5 within the first bandgap the phase shifts $\phi(\Omega)$ reach its minimal and maximal values at the first and second gap boundaries $\phi = -\pi/2, \pi/2$. Outside of the gaps between the first and the second gaps there are the $N - 1$ phase shift “resonance” curves each exhibiting repeated transitions from $-\pi/2$ to $\pi/2$.

Conclusions.

This study investigates the interaction between incident shear waves and a periodically layered bi-material elastic layer positioned between two identical elastic half-spaces. The analysis demonstrates that when the frequency of the incident shear waves falls within the bandgaps inherent to the equivalent infinite periodic medium, the transmissivity of the elastic waves becomes nearly zero. As a result, the waves are almost completely reflected, with the reflectivity approaching unity. This behaviour highlights the strong reflective nature of the layer within the bandgap regions. In contrast, for frequency ranges located between adjacent bandgaps, there exist certain discrete frequencies where the transmissivity of the elastic waves reaches unity. At these frequencies, perfect transmission occurs, and reflectivity is negligible. This phenomenon underscores the existence of transmission windows between bandgaps, where wave propagation through the layered structure is unhindered.

This phenomenon underscores the existence of transmission windows between bandgaps, where wave propagation through the layered structure is unhindered. Specifically, within these frequency intervals situated between two adjacent bandgaps, the transmission function attains a value of one. As a result, the reflectivity effectively drops to zero, allowing elastic waves to pass through the structure without significant attenuation or

reflection. These transmission windows are a direct consequence of the physical properties of the periodic system, and their presence is consistently observed in the plots of the transmission function. Thus, between the bandgaps, the structure transitions from being highly reflective to fully transparent to incident elastic waves, which is a key characteristic in the analysis of wave propagation in such media. #

The phase shift of the reflected shear wave is analysed for the scenario in which one side of the layered structure is adjacent to an elastic half-space, while the opposite side is bounded by a free interface. Within the first bandgap, it is observed that the phase shift values attain their minimum and maximum precisely at the boundaries of the gap. Furthermore, in the frequency interval between the first and second bandgaps, phase shift resonance curves emerge, each exhibiting repeated transitions.

References

1. **Sun, C-T., Jan D. Achenbach, and George Herrmann.** "Continuum theory for a laminated medium." (1968): 467-475.
2. **Brekhovskikh, L.M., Godin, O.A.** (2012). Acoustics of layered media I: Plane and quasi-plane waves (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
3. **Brekhovskikh, L.** Waves in layered media. Vol. 16. Elsevier, 2012.
4. **Achenbach, Jan.** Wave propagation in elastic solids. Elsevier, 2012. ,
5. **Ambartsumyan SA, Avetisyan A S, Belubekyan M.V,** 2017 Propagation of elastic waves in a plane waveguide layer on the basis of a simplified model of the Cosserat continuum, Mechanics, Proceedings NAS,Armenia. 70 (2) 15–27
6. **Ghazaryan, K.B., Papyan A.A., and Ohanyan S.K.** "Reflection, refraction, and transmission of SH waves at a micropolar layer separating two elastic media." In Journal of Physics: Conference Series, vol. 991, no. 1, p. 012025. IOP Publishing, 2018.
7. **Ambartsumian SA, Belubekyan MV, Ghazaryan KB,** 2014, Shear elastic waves in a periodic medium with the Cosserat simplified model properties , Mechanics, Proceedings NAS, Armenia, 67 (4) 3–9
8. **Wei, Peijun.** "Reflection and transmission of elastic waves at interfaces." In Theory of Elastic Waves, pp. 63-150. Singapore: Springer Nature Singapore, 2022.
9. **Avetisyan, A.S.** Electroacoustic Waves in Piezoelectric Layered Composites. Cham: Springer, 2023.
10. **Ghazaryan, K. B., Papyan A.A., Ohanyan S.K.** "Reflection, refraction, and transmission of SH waves at a micropolar layer separating two elastic media." In Journal of Physics: Conference Series, vol. 991, no. 1, p. 012025. IOP Publishing, 2018.
11. **Singh, B., Sangwan, A., & Singh, J.** (2019). Reflection and transmission of elastic waves at an interface between two micropolar piezoelectric half-spaces. Journal of Ocean Engineering and Science, 4(3), 227-237.
12. **Kumar, S., Hemalatha K., Vishwakarma S.K.** "Effect of corrugation and imperfect boundary on the propagation of Rayleigh waves in sandy half-space beneath an anisotropic layer." International Journal of Geomechanics 24, no. 10 (2024): 04024221.
13. **Kaur, Jatinder, and S. K. Tomar.** "Reflection and refraction of SH-waves at a corrugated interface between two monoclinic elastic half-spaces." International journal for numerical and analytical methods in geomechanics 28, no. 15 (2004): 1543-1575.

14. **Yang, Wanyou, Pengpeng Bai, Jingbo Fang, Keao Qi, and Qinghua Zhou.** "Impact contact behaviors of elastic coated medium with imperfect interfaces." *International Journal of Mechanical Sciences* 236 (2022): 107743.
15. Long, J., Fan, H. Effects of interfacial elasticity on the reflection and refraction of SH waves. *Acta Mech* 233, 4179–4191 (2022).
16. **Eremeyev, Victor A., Giuseppe Rosi, Salah Naili.** "Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy." *Mechanics Research Communications* 74 (2016): 8-13.
17. **Shi, Y., Wan, Y., & Zhong, Z.** (2017). Dynamic effective property of fibrous piezoelectric composites with spring-or membrane-type imperfect interfaces. *Mechanics Research Communications*, 84, 116-124.
18. **Golub, M.V., Doroshenko, O.V., Fomenko, S. I.** (2025). Effective spring boundary conditions for modelling wave propagation through a damaged interface between dissimilar orthotropic media. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 111, 105564.
19. **Olsson, Peter, Subhendu K. Datta, A. Bostrom.** "Elastodynamic scattering from inclusions surrounded by thin interface layers." (1990): 672-676.
20. **Reyes, M.A., Otero, J.A., Pérez-Álvarez, R.** (2017). Interfacial waves in an A/B/A piezoelectric structure with electro-mechanical imperfect interfaces. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 12(4), 457-470.
21. **Ghazaryan, K., Piliposyan, D., Piliposian, G.** (2025). Reflection and transmission of shear elastic waves through periodically stratified piezoelectric reflector with imperfect interfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 113514.
22. **Mikhasev, G.I., & Eremeyev, V A.** (2024). Effects of interfacial sliding on anti-plane waves in an elastic plate imperfectly attached to an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science*, 205, 104158.
23. **Ghazaryan, K.B., Mozharovsky, V.V., Sarkisyan, S.V., & Ohanyan, S. K.** (2022). Shear surface wave propagation in stratified media with slip interfaces. *International Journal of Materials and Structural Integrity*, 14(2-4), 120-126.
24. **Ghazaryan K.B., Ghazaryan R.A., Terzyan S.A.** // Surface Shear Horizontally Wave Propagation in a Half-Space Periodically Stratified with Interfaces of Imperfect Elastic Contact. / Altenbach, H. (eds) *Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials*, vol 223, 2025, pp 233–242, Springer.

Information about authors:

Ghazaryan K. Institute of mechanics NAN of Armenia,
ghkarren@gmail.com, 374 99 227395

Ghazaryan R. Institute of mechanics NAN of Armenia,
rafaelghazaryan52@gmail.com, 374 99 396344

Terzyan S. Institute of mechanics NAN of Armenia,
sat_and_21@yahoo.com, 374 91 340432

Received 05 November, 2025

СОДЕРЖАНИЕ 2025 г., том 78 №3-4

Ագայն Կ.Լ., Արությունյան Լ.Ա., Հակարյան Վ.Գ. Контактная задача для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной двумя упругими луночными накладками 3

Աкопяն Վ.Ն.,#Ամիրճյանյան Ա.Ա., Խաչիկյան Ա.Տ. О задаче контакта тонкого абсолютно жёсткого межфазного включения с кусочно-однородной плоскостью при наличии трения покоя 17

Արձումյան Մ.Գ. Изучение напряженного состояния процесса прессования образца из неспеченного порошка в жесткой цилиндрической матрице, используя модифицированную модель текучести Друкера-Прагера 30

Գուկասյան Կ.Ա., Բաղդասարյան Ա.Տ. О методе оптимального проектирования системы посадки беспилотных летательных аппаратов легкого типа 40

Միկիլյան Մ.Ա., Թոնոյան Վ.Ս. Новый подход к вычислению траектории наземного транспорта на основе ИМУ данных 50

Տաակյան Ա.Վ. Квадратурная формула для интеграла с ядром, порожденным интегралом Вебера – Шафхейтлина, в применении к решению осесимметричной контактной задачи теории упругости. 65

Թորոսյան Մ.Տ., Տակյան Մ.Գ. минимизация усталостных явлений в сварных швах металлических труб с применением упрочняющих технологий 78

Ավետիսյան Վ.Վ. Оптимальное по энергозатратам комбинированное управление электро-механическим манипулятором с ограничением на управляющее напряжение 90

Հակարյան Կ., Հակարյան Ր., Թերզյան Տ. Отражение и преломление сдвиговых упругих волн от периодически слоистого упругого слоя из двух материалов. 103

CONTENTS 2025, v. 78 №3-4

#

Aghayan K.L., Harutunyan L.A., Zakaryan V.Z. Contact problem for composite plane weakened by a circular hole and reinforced by two elastic lune pads.....	3
Hakobyan V.N., Amirjanyan A.A., A.S.Khachikyan On a Contact Problem of a Thin Absolutely Rigid Interphase Inclusion with a Piecewise Homogeneous Plane in the Presence of Static Friction.....	17
Arzumanyan M.G. Studying the stress state of the compaction process of specimens from non-sintered powder in a hard cylindrical die using the modified Drucker-Prager cap model.....	30
Ghukasyan K.H., Baghdasaryan A.S. One optimal way of the project of the light U.A.Vs landing system.....	40
Mikilyan M., Tonoyan V. A new approach to draw trajectory of ground vehicles based on IMU data	50
Sahakyan A.V. Quadrature formula for an integral with a kernel generated by the Weber–Schafheitlin integral, applied to solving an axisymmetric contact problem of elasticity theory	65
Torosyan M.S., Stakyan M.G. Minimizing Fatigue in Welded Joints of Metal Pipes Using Strengthening Technologies.....	78
Avetisyan V.V. Energy-Optimal Combined Control of an Electromechanical Manipulator under Control Voltage Constraint	90
K.B. Ghazaryan, R.A. Ghazaryan, S.H. Terzyan Reflection and Transmission of Shear Elastic Waves Through Periodically Stratified Bi-Material Elastic Layer.....	103

Աղայան Կ.Լ., Հարությունյան Լ.Ա., Զաքարյան Վ.Գ. Կոնտակտային խնդիր շրջանային անցքով թուլացված և երկու լուսնաձև առաձգական բարձիկներով ուժեղացված բաղադրյալ հարթության համար.....3

Հակոբյան Վ.Ն., Ամիրջանյան Հ.Ա., Խաչիկյան Ա.Ս. Հանգստի շփման առկայության դեպքում բարակ, բացարձակ կոշտ միջֆազային ներդրակի և կտոր առ կտոր համասեռ հարթության կոնտակտի վերաբերյալ 17

Արզումանյան Մ.Գ. Կոշտ գլանական մամլամայրում չեռակալված փոշենմուշի մամլման գործընթացի լարվածային վիճակի հետազոտմը Դրուկեր-Պրագերի ձևափոխված գլխարկաձև մոդելի օգտագործմամբ..... 30

Ղուկասյան Կ.Հ., Բաղդասարյան Ա.Ս. Թեթև տեսակի անօդաչու թռչող ապարատների վայրէջքային համակարգի օպտիմալ նախագծման մի եղանակի մասին..... 40

Միկիլյան Մ., Տոնոյան Վ. Գետնի վրա շարժվող օբյեկտի հետագծի որոշման նոր մոտեցում՝ հիմնված IMU տվյալների վրա..... 50

Սահակյան Ա.Վ. Վեբեր-Շաֆհեյտլինի ինտեգրալով տրվող կորիզով ինտեգրալի համար քառակուսացման բանաձևի կիրառությունը առաձգականության տեսության առանցքահամաչափ կոնտակտային խնդրի լուծման համար..... 65

Թորոսյան Մ.Ս., Ստակյան Մ.Գ. Մետաղական խողովակների եռակցման կարերում առաջացող հոգնածային երևույթների նվազարկումն ամրացնող տեխնոլոգիաների կիրառմամբ..... 78

Ավետիսյան Վ.Վ. Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի ըստ էներգածախսերի օպտիմալ համակցված ղեկավարումը՝ ղեկավարող լարման սահմանափակմամբ..... 90

Ղազարյան Կ.Բ., Ղազարյան Ռ.Ա., Թերզյան Ս.Հ. Սահքի առաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը երկու նյութերից կազմված պարբերական շերտավոր առաձգական շերտից..... 103

Сдано в производство 8.12.2025 г.

Формат 70 x 100 ¹/₁₆ . Печ. лист –5.5

Заказ № 1421. Тираж 150.

Цена договорная.

Типография Издательства НАН РА

Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Հակոբյան Վ.Ն. (գլխավոր խմբագիր), Սահակյան Ա.Վ. (գլխ. խմբագրի տեղակալ), Աղալովյան Լ.Ա., Ավետիսյան Ա.Ս., Ավետիսյան Վ.Վ., Կարապետյան Կ.Ա., Ղազարյան Կ.Բ., Ղուկասյան Ա.Ա., Ջիրավյան Ս.Հ., Սարգսյան Ս.Հ.

ՄԻՋԱԶԳԱՅԻՆ ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԽՈՐՀՈՒՐԴ

Ալտենբախ Հ. (Գերմանիա), Գաչկեիչ Ա.Ռ. (Ուկրաինա), Գորյաչևա Ի.Գ. (Ռուսաստան), Հասանյան Դ.Ջ. (ԱՄՆ), Կապլունով Յու.Դ. (Մեծ Բրիտանիա), Կուդիշ Ի.Ի. (ԱՄՆ), Շավլակաձե Ն.Ն. (Վրաստան), Մարզոկա Պ. (ԱՄՆ), Մեյրանյան Ա.Պ. (Ռուսաստան), Սումբատյան Մ.Ա. (Ռուսաստան), Վատոյան Ա.Հ. (Ռուսաստան)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Акопян В.Н. (главный редактор), Саакян А.В. (зам. главного редактора), Аветисян А.С., Аветисян В.В., Агаловян Л.А., Гукасян А.А., Джилавын С.А., Казарян К.Б., Карапетян К.А., Саркисян С.О.

МЕЖДУНАРОДНЫЙ РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Альтенбах Х. (Германия), Асанян Д.Дж. (США), Ватулян А.О. (Россия), Гачкевич А.Р. (Украина), Горячева И.Г. (Россия), Каплунов Ю.Д. (Великобритания), Кудиш И.И. (США), Шавлакадзе Н.Н. (Грузия), Марзока П. (США), Сейранян А.П. (Россия), Сумбатян М.А. (Россия)

EDITORIAL BOARD

Накобян В.Н. (editor-in-chief), Sahakyan A.V. (associate editor), Aghalovyan L.A., Avetisyan A.S., Avetisyan V.V., Ghazaryan K.B., Ghukasyan A.A., Jilavyan S.H., Karapetyan K.A., Sarkisyan S. H.

INTERNATIONAL ADVISORY BOARD

Altenbach H. (Germany), Gachkevich A.R. (Ukraine), Goryacheva I.G. (Russia), Hasanyan D.J. (USA), Kaplunov J.D. (UK), Kudish I.I. (USA), Shavlakadze N.N. (Georgia), Marzocca P. (USA), Seyranyan A.P. (Russia), Sumbatyan M.A. (Russia), Vatulyan A.O. (Russia)

Технический редактор: Геворгян Г.З., Ответственный секретарь: Авдалян Ж.А.

E-mail: journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech

Հայաստանի	Республика Армения,	24/2, Baghramyan Ave.
Հանրապետություն, Երևան,	Ереван, 0019	Yerevan 0019
0019 Բաղրամյան պող. 24/2,	пр. Баграмяна 24 /2,	Republic of Armenia
Հեռ. 52-48-02	Тел. 52-48-02	Tel. 52-48-02