ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968

УДК 5175

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Об эквивалентности некоторых задач единственности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 28/VI 1968)

1. В работе (¹) были получены некоторые теоремы единственности для мероморфных в полуплоскости $x \geqslant 0$ функций, в частности, для аналитических в полуплоскости функций был получен следующий результат, являющийся обобщением задачи Мандельбройта—Винера (²).

Теорема А. *Пусть* $w=F(z)$ *аналитична в полуплоскости* $x \geqslant 0$, *а* $\Lambda_1=\{\gamma_n\}$, $\Lambda_2=\{\mu_n\}$ — *две последовательности положительных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям: для любого* n

$$\gamma_{n+1}-\mu_n>0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} {}^1/\gamma_n=\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} {}^1/\gamma_n^2<+\infty, \tag{1.1}$$

$$\sigma_n-\mu_n<0, \tag{1.2}$$

где

$$\sigma_n=\frac{\gamma_n+\gamma_{n+1}}{2}.$$

При этом, если $F(z)$ *удовлетворяет условиям*

$$F(\Lambda_1)=\{0\}, \tag{1.3}$$

$$|F(z)|<M_n, \qquad \mu_{n-1} \leqslant x<\mu_n, \tag{1.4}$$

то $F(z) \equiv 0$, *если при* $n \geqslant n_0>0$ *имеем*

$$\sup_{y \in (0, \infty)}\left\{y\left[\frac{\pi}{2} a-y \int_0^{\infty} \frac{N_n^+(t)+N_n^-(t)}{t\left(y^2+t^2\right)} dt\right]\right\} \leqslant \ln C_n, \tag{1.5}$$

где $1 \leqslant C_n<+\infty$ — *постоянная*, $a \geqslant 1$ *при* $\gamma_k \leqslant k$ *зависит только от последовательности* $\{\gamma_n\}$, *а* $N_n^+(t)$ *и* $N_n^-(t)$ *соответственно числовые функции последовательностей*

$$\sigma_n-\gamma_n, \ \sigma_n-\gamma_{n-1}, \ldots, \ \sigma_n-\gamma_1, \ \sigma_n, \ \sigma_n+1, \ldots,$$

$$\gamma_{n+1}-\sigma_n, \ \gamma_{n+2}-\sigma_n, \ldots, \ \gamma_{n+k}-\sigma_n, \ldots,$$

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = \infty, \tag{1.6}$$

$$T(r) = \sup_n \frac{r^{\gamma_n}}{m_n^*}, \quad m_n^* = M_n [C_n A_n(\alpha, \gamma) + C_{n+1} A_{n+1}(\alpha, \gamma)],$$

$$A_n(\alpha, \gamma) = \frac{\breve{\Gamma}(\sigma + \varkappa, \alpha, \varkappa)}{\breve{\Gamma}(\sigma_n + \varkappa, \gamma, \varkappa)} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\sigma_n + \varkappa}{\gamma_k + \varkappa}\right)^2\right]} \left(\varkappa = \frac{1}{2},\ 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} 1/\alpha_k^2 < +\infty \right)$$

$$\breve{\Gamma}(\zeta, \gamma; \pm\varkappa) = \frac{1}{\zeta \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k \pm \varkappa}\right) e^{\frac{\zeta}{\gamma_k \pm \varkappa}}} = \breve{\Gamma}(\zeta).$$

Аналогичный результат для мероморфных функций получен при условии, что полюсы $\{\lambda\}$ положительны и удовлетворяют условию

$$\inf_{\lambda, \lambda' \in \{\lambda\}} |\lambda - \lambda'| = c > 0.$$

В настоящей статье даются некоторые применения этой теоремы к различным задачам единственности.

2. *Проблема единственности для моментов Стилтьеса. Для того, чтобы из условий*

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma_n} d\mu(t) = 0, \tag{2.1}$$

$$\int_0^{\infty} t^{\mu_n} |d\mu(t)| < M_n,$$

где $\{\gamma_n\}$ *и* $\{\mu_n\}$ *удовлетворяют условиям* (1.1) и (1.2), *следовало* $\mu(t) \equiv C$ *достаточно, чтобы выполнялись условия* (1.5) *и* (1.6).

Доказательство. Функция

$$f(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} d\mu(t)$$

является решением обобщенной задачи Мандельбройта—Винера, и на основании теоремы *A* утверждение доказано.

Замечание. Очевидно, что преобразование Меллина функции $f(z)/(1+z)^p$, где $p > 1$ — некоторое число,

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{t^{-z-1}f(z)}{(1+z)^p}\,dz\quad(\alpha>0,\ p>1)$$

порождает меру $d\mu(t)=g(t)\,dt$, которая удовлетворяет условию (2.1). С другой стороны, так так

$$|g(t)|<M_n t^{-\mu_n-1},$$

то

$$\int_0^\infty t^{\mu_n}|g(t)|\,dt=\int_0^1 t^{\mu_n}|g(t)|\,dt+\int_1^\infty t^{\mu_n}|g(t)|\,dt<C+\int_1^\infty t^{\mu_{n+1}}|g(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant CM_{n+1},$$

и условие (2.2) тоже удовлетворено. Таким образом вышеприведенная задача проблемы моментов эквивалентна обобщенной задаче Мандельбройта—Винера, поставленной в работе (¹).

3. *Полиномиальная аппроксимация в смысле Бернштейна на полуоси.* Для данной на полуоси $(0,+\infty)$ функции $F(t)$ рассмотрим банахово пространство $C_F(0,+\infty)$ всех функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{F(t)}=0. \tag{3.1}$$

Введем норму следующим образом

$$\|g\|_F=\max_t\left|\frac{g(t)}{F(t)}\right|. \tag{3.2}$$

Тогда линейное многообразие, порожденное системой $\{t^{\gamma_n}\}$ *плотно в* $C_F(0,+\infty)$, *если удовлетворены условия* (1.1), (1.2), (1.6), *где* $M_n=\|t^{\mu_n}\|_F$.

Доказательство. Обозначим через *У* линейное многообразие системы функций $\{t^{\gamma_n}\}$. По теореме Рисса (³), утверждающей, что *У* плотно в $C_F(0,+\infty)$ тогда и только тогда, когда не существует нетривиальная мера $\mu(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n}\,d\mu(t)=0\qquad(\text{n}=0,1,2,\cdots) \tag{3.3}$$

$$\int_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)|<+\infty \tag{3.4}$$

и из оценки

$$\int_0^\infty t^{\mu_n}|d\mu(t)|\leqslant\max_t\left|\frac{t^{\mu_n}}{F(t)}\right|\int_0^\infty|F(t)|\,|d\mu(t)|\leqslant M_n\|\mu\|_F,$$

где $\|\mu\|_F = \int\limits_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)|$, согласно пункту 2, следует требуемое утверждение.

Замечание. Вышеприведенная задача весового приближения эквивалентна задаче пункта 2, так как из условий

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_n}\, d\mu(t)=0,$$

$$\int\limits_0^\infty t^{\mu_n}\, |d\mu(t)| \leqslant M_n,$$

если обозначим

$$A_p = \int\limits_p^{p+1} |d\mu(t)|,$$

имеем

$$\sup_p A_p\, p^{\mu_{n+k}} \leqslant M_{n+k},$$

согласно

$$A_p p^{\mu_{n+k}} \leqslant \int\limits_p^{p+1} t^{\mu_{n+k}}\, |d\mu(t)| \leqslant \int\limits_0^\infty t^{\mu_{n+k}}\, |d\mu(t)| \leqslant M_{n+k}.$$

Определим функцию $F(t)$ из равенства

$$F(t) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{t^{\mu_n}}{M_{n+k}} = \sup_{n\geqslant k+1} \frac{t^{\mu_n}}{M_n}$$

и докажем, что

$$\int\limits_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)| < +\infty.$$

Имеем

$$F(t) \leqslant \sup_n \frac{t^{\mu_n}}{\sup\limits_p A_p\, p^{\mu_{n+k}}} \leqslant \sup_n \frac{t^{\mu_n}}{A_t\, t^{\mu_{n+k}}},$$

следовательно,

$$|F(t)| \leqslant \sup_n \frac{1}{A_t\, t^{\mu_{n+k}-\mu_n}}$$

и значит

$$|F(p)| < \frac{1}{A_p p^{\mu_{n+k}\mu}},$$

следовательно,

$$A_p < \frac{1}{p^{\mu_{n+k}-\mu_n}\,|F(p)|},$$

что обеспечивает сходность интеграла

$$\int_0^\infty |F(t)|\,|d\mu(t)| < +\infty$$

при надлежащем выборе k.

4. *Обобщенная квазианалитичность на полуоси.* Рассмотрим последовательность чисел

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\ldots,\quad \sum_{k=1}^{\infty} {}^1/\gamma_k=\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty} {}^1/\gamma_k^2<+\infty \tag{4.1}$$

и функций

$$\varphi(t),\quad \varphi^{[1]}(t)=\varphi'(t),\quad \varphi^{[k+1]}(t)=\left(\frac{\varphi^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)',\ (k=1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

если они существуют.

Определение. Функции последовательности (4.2) (если они существуют) называются последовательными обобщенными производными функции $\varphi(t)$ при последовательности $\{\gamma_n\}$.

Эти обобщенные производные впервые были рассмотрены Г. В. Бадаляном (^{4}) в связи с задачей о представлении произвольных функций факториальными рядами. В дальнейшем эти производные мы будем называть производными в смысле Бадаляна. Для дальнейшего нам будет нужна следующая легко доказуемая

Лемма. *При условии*

$$\left|\frac{\varphi^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right|<m_k\quad t\in(0,\infty),$$

где m_k — *некоторые числа, выражение*

$$R_n(t)=\int_0^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\int_0^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dt_n\times$$

$$\times\int_0^{t_{n+1}}\varphi^{[n+1]}(t_{n+1})\,dt_{n+1} \tag{4.3}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\frac{R_n^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}} = 0\left(t^{\gamma_{n+1}-\gamma_k}\right) \quad \text{при } t\to 0 \qquad (4.4)$$

$$\frac{R_n^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}} = 0\left(t^{\gamma_n-\gamma_k}\right) \quad \text{при } t\to \infty, \qquad (4.4)$$

где $R_n^{[k]}(t)$*—к-ое обобщенное производное функции* $R_n(t)$ *в смысле Бадаляна.*

Теорема Б. *Для последовательностей* $\{M_n\}$ *и* $\{\gamma_n\}$ *положительных чисел чтобы не существовала бесконечно-дифференцируемая в смысле Бадаляна функция* $f(t)$*, опердeленная на полуоси* $[0,+\infty)$*, не равная тождественно постоянной и удовлетворяющая условиям*

$$|\psi_n(t)| < M_n, \qquad (4.5)$$

$$\psi_n(0) = 0, \qquad (4.6)$$

где

$$\psi_n(t) = \lim_{t\to 0} \psi_n(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f^{[n]}(t)}{t^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}},$$

достаточно, чтобы удовлетворялись условия (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), *где* M_n *заменено* (M_n+M_{n+1}) *и* $\inf|\gamma_k-\gamma_{k+1}|=h>0$.

Доказатеьство. Обозначим

$$R_n(t)=f(t)-\sum_{p=0}^{n}\frac{a_p t^{\gamma_p}}{\prod\limits_{k=0}^{p-1}(\gamma_p-\gamma_k)}, \quad \text{где } a_p=\lim_{u\to 0}\frac{f^{[p]}(u)}{u^{\gamma_p-\gamma_{p-1}-1}}$$

$$g_n(z) = \frac{1}{\widetilde{\Gamma}(-z)}\int_0^\infty R_n(t)\,t^{-z-1}\,dt.$$

Функция $g_n(z)$ голоморфна в полосе $\gamma_n < x < \gamma_{n+1}$, так как $R_n(t)$ имеет вид

$$R_n(t) = \int_0^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\int_0^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}dt_2\ldots\int_0^{t_n} f^{[n+1]}(t_{n+1})\,dt_{n+1} \qquad (\text{см. } (^4))$$

и тогда из леммы следует утверждение. Нетрудно доказать, что $g_n(z)$ и $g_{n-1}(z)$ оба стремятся к одному и тому же пределу, когда z стремится соответственно справа и слева к точке $z_0=\gamma_n+iy_0$.

Таким образом, $g_n(z)$ и $g_{n-1}(z)$ голоморфные функции в двух смежных полосах. Причём они равны и непрерывны на общей стороне этих полос, следовательно, составляют части одной и той же голоморфной функции на сумме этих полос. Аналогично шаг на шагом мы будем строить голоморфную в полуплоскости $x>0$ функцию $g(z)$, которая удовлетворяет условию

$$g(\gamma_n) = \psi_n(0)\,\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_n}{\gamma_k}\right)e^{\frac{\gamma_n}{\gamma_k}}\,e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\gamma_n}{\gamma_k}}\cdot e}{\prod\limits_{k=1}^{n}\gamma_k}.$$

С другой стороны, имеем

$$g(\mu_n+iy) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(-\mu_n-iy)}\int\limits_0^{\infty} R_n(t)\,t^{-\mu_n-1-iy}\,dt = \frac{1}{\tilde{\Gamma}(-\mu_n-iy)}\,\cdot$$

$$\cdot\,\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\gamma_k\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{\mu_n+iy}{\gamma_k}\right)(\mu_n+iy)}\int\limits_0^{\infty}[\psi_n(t)-a_n]\,t^{-\mu_n-iy+\gamma_n-1}\,dt. \tag{4.8}$$

Учитывая условия теоремы и предполагая также, что $\gamma_{k+1}-\gamma_k \geqslant h > 0$, тогда взяв $\mu_n = \gamma_n + \frac{h}{2}$, будем иметь

$$|g(\mu_n+iy)| \leqslant C(M_n+M_{n+1})\,e^{\frac{\pi}{2}|y|}. \tag{4.9}$$

Следовательно, функция $g(z)/\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\gamma_k^2}\right)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 работы (1) откуда вытекает, что $g(t)\equiv 0$.

В заключении приношу благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и полезные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса.

Վ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ

Որոշ միակության թեորեմների համարժեքության մասին

Ապացուցվում է, որ (1) աշխատանքում դիտարկված Մանդելբրոյտ Վիների ընդհանրացված խնդիրը, Ստիլտյեսի ընդհանրացված մոմենտների խնդիրը՝

$$\int\limits_0^{\infty} t^{\gamma_n}\,d\mu(t) = 0,$$

$$\int\limits_0^{\infty} t^{\mu_n}\,|d\mu(t)| < M_n$$

և Բեռնշտեյնի իմաստով կիսաուղղի վրա կշռային մոտավորության խնդիրը համարժեք են իրար: Վերջում ցույց է տրվում, որ Մանդելբրոյտ Վիների ընդհանրացված խնդիրը կապված է նաև կիսաուղղի վրա մի ընդհանրացված քվազիանալիտիկության խնդրի հետ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. М. Едигарян*, ДАН АрмССР. т XLVII, № 1 (1968). [2] *Mandelbrojt, Wiener*, Sur les fonctions indefiniment derivables sur une demidroite C. R. Acad. Sci. 225 (1947), p. 978. [3] *Рисс и Секефальви Надь*, Функциональный анализ, М., 1954. [4] *Г. В. Бадалян*, Обобщенные факториальные ряды, Сообщение ин-та математики и механики АН АрмССР, вып. V, 13—84, 1950.