ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLVII 1968 3

МАТЕМАТИКА

УДК 518.5

И. Д. Заславский

О реализации булевых функций с помощью автоматов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 31/V 1968)

В этой статье сравниваются возможности реализации булевых функций с помощью растущих и нерастущих автоматов ([1–5]). С этой целью выводятся сравнительные оценки сложности автоматов указанных типов, аналогичные функциям Шеннона ([6]). В дальнейшем используются лишь конструктивные методы рассуждений; будут применяться некоторые понятия и терминология конструктивной логики ([7]).

Введем в рассмотрение растущие автоматы в смысле определения Я. М. Барздиня ([2]); мы будем трактовать это определение так, как это сделано в работе Ю. П. Офмана ([5]), со следующей разницей: допускается, чтобы элементарное звено, порожденное в некоторый момент времени, могло быть подключено не только к своему „родителю“, но и к любому элементарному звену из окрестности „родителя“; коммутации порожденного звена определяются отдельно задаваемой функцией, которая строится совершенно аналогично тому, как строится функция коммутаций самого звена. Мы определим конкретные типы элементарных звеньев Z_1 и Z_2, имеющих по два состояния, по два входа, и глубину пульсации, равную 1 для Z_1 и 2 для Z_2. Для краткости при описании функционирования элементарного звена мы будем обозначать само звено через a; звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу a, будем обозначать соответственно через b и c; звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу b, будем обозначать соответственно через d и e; наконец, звенья, присоединенные к 1-му и 2-му входу c, будем обозначать соответственно через f и g. Теми же буквами будем обозначать состояния указанных звеньев. Будем считать, что звенья могут находиться в состояниях 0 и 1 и что в логических обозначениях 0 соответствует лжи, а 1 — истине. Окрестность звена a будем обозначать в виде $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, где $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ — все автоматы, входящие в эту окрестность. Так, например, $[a\ b\ c\ e]$ означает окрестность, в которой присутствуют автоматы a, b, c, e и отсутствуют автоматы d, f, g.

Функционирование звена Z_1 задается следующим образом: новое состояние звена a есть $\neg b \vee \neg c$ в случае наличия b и c; оно есть b в случае наличия b и отсутствия c; оно есть c в случае наличия c и отсутствия b; оно есть a в случае отсутствия b и c; коммутации звена не меняются; порождения и отмирания не происходит. По существу автоматы, построенные из звеньев Z_1, представляют собой частный вид автоматов, рассмотренных в ([4]).

Функционирование звена Z_2 задается следующим образом. Новое состояние звена a равно:

b — в случаях $[abd]$, $[abcdf]$, $[abde]$, $[abcd]$;

a — в случаях $[a]$, $[ab]$, $[ac]$, $[acf]$, $[acg]$, $[acfg]$, $[abcdg]$;

$\neg b \vee \neg c$ — в случаях $[abc]$, $[abcdefg]$;

$(c \& e) \vee (b \& \neg e)$ — в случае $[abcdef]$;

$(c \& e) \vee (a \& \neg e)$ — в случае $[abcdef]$;

g — в случае $[abceg]$;

1 — в случае $[abcg]$.

(В остальных случаях новое состояние a несущественно и может быть доопределено любым образом). Порождение нового звена a^* происходит только в случае $[abcdf]$ при $c = 1$. В этом случае к 1-му входу звена a присоединяется выход звена a^*, а ко 2-му входу звена a — выход звена c; к 1-му входу звена a^* присоединяется выход звена b, а ко 2-му входу звена a^* ничего не присоединяется. Изменение коммутаций звена a без порождения нового звена происходит только в случае $[abcdg]$ при $c = 0$ и $g = 0$. В этом случае к 1-му входу звена a присоединяется выход звена d, а ко 2-му входу звена a — выход звена c. Во всех остальных случаях не происходит никаких изменений, кроме изменения состояния звена a.

Рассмотрим произвольный ориентированный граф, в каждую вершину которого входит не более двух стрелок; в этом графе выделим: (1) набор из n вершин, называемых **входными**; (2) одну вершину, называемую **выходной**; (3) одну вершину, называемую **стоп-вершиной**; кроме того, зафиксируем начальные состояния (нули или единицы) для всех вершин графа, отличных от входных, и фиксируем тип элементарных звеньев (Z_1 или Z_2), располагаемых в вершинах графа (предполагается, что во всех вершинах располагаются звенья одного и того же типа). Ориентированный граф с выделенными в нем указанным образом $n+2$ вершинами, зафиксированными начальными состояниями и фиксированным типом элементарных звеньев, мы будем называть **автоматной схемой размерности** n. Конструктивное множество автоматных схем (любой размерности), построенных из элементарных звеньев типа Z_1 (соответственно, Z_2) мы будем обозначать через Y_1 (соответственно, Y_2). Через $\mathfrak{F}$ обозначим алгорифм, который по всякой паре, состоящей из автоматной схемы A и булева вектора V, производит следующие преобразования: 1) присваивает входным вершинам схемы A значения равные соответствующим координатам вектора V (если размерности A и V не совпадают, то алгорифм δ работает бесконечно); 2) производит преобразование схемы A в соответствии с правилами функционирования ее элементарных звеньев до тех пор, пока состояние звена, соответствующего стоп-вершине, не станет равным 1 (если такого момента не наступит, то алгорифм работает бесконечно); 3) выдает в качестве ответа окончательное состояние звена, соответствующего выходной вершине (отметим, что в процессе работы алгорифма δ „потомок" стоп-вершины или выходной вершины сам по себе не приобретает этих характеристик).

Будем говорить, что автоматная схема A размерности n реализует булеву функцию F от m переменных, если $n=m$, и для всякого n-мерного вектора V оказывается $F(V)=\delta(A, V)$. Будем говорить, что автоматная схема A является правильной, если A реализует некоторую булеву функцию. Две автоматные схемы будем называть эквивалентными, если они реализуют одну и ту же булеву функцию. Количество вершин в автоматной схеме A будем называть сложностью этой схемы и обозначать через $\|A\|$. Размерность схемы A будем обозначать через $|A|$.

Синтезирующим алгорифмом для множества Y_i (где $1 \leqslant i \leqslant 2$) будем называть любой алгорифм, который для всякой булевой функции F строит автоматную схему из множества Y_i, реализующую функцию F. Транслятором из множества Y_i в множество Y_j (где $1 \leqslant i, j \leqslant 2$) будем называть любой алгорифм, который по всякой правильной автоматной схеме A из множества Y_i строит автоматную схему из множества Y_j, эквивалентную A.

В формулировках нижеследующих теорем переменные F, A, B могут принимать в качестве своих значений конструктивные объекты следующих типов: переменная F — любые булевы функции; переменная A — любые правильные автоматные схемы из множества Y_1; переменная B — любые правильные автоматные схемы из множества Y_2. Количество переменных, от которых зависит булева функция F, будем обозначать через $|F|$.

Теорема 1. (а) *Можно построить такие синтезирующие алгорифмы S_1 и S_2 для множеств, соответственно, Y_1 и Y_2, что*

$$\forall k \exists l \forall n \left(n \geqslant l \supset \max_{|F| \leqslant n} \| S_i(F) \| \leqslant \frac{2^n}{n} (1+2^{-k}) \right), \quad (i=1,\ 2);$$

(б) *каковы бы ни были синтезирующие алгорифмы S_1 и S_2 для множеств Y_1 и Y_2,*

$$\forall k \exists l \forall n \left(n \geqslant l \supset \max_{|F| \leqslant n} \| S_i(F) \| \geqslant \frac{2^n}{n} (1-2^{-k}) \right), \quad (i=1,\ 2).$$

Теорема 2. (а) *Можно построить такой транслятор T_{12} из Y_1 в Y_2, что*

$$\forall_k \exists l \forall_n (n \geqslant l \supset \forall A (\|A\| \leqslant n \supset \|T_{12}(A)\| \leqslant n \cdot (1 + 2^{-k})));$$

(б) *для всякого транслятора* T_{12} *из* Y_1 *в* Y_2

$$\forall_k \exists l \forall_n (n \geqslant l \supset \exists A (\|A\| \leqslant n \& \|T_{12}(A)\| \geqslant n \cdot (1 - 2^{-k}))).$$

Теорема 3. (а) *Можно построить такой транслятор* T_{21} *из* Y_2 *в* Y_1 *и такую постоянную* C', *что*

$$\forall_n \left(n > 0 \supset \forall B \left(\|B\| \leqslant n \supset \|T_{21}(B)\| \leqslant C' \cdot \frac{2^n}{n}\right)\right);$$

(б) *можно построить такую постоянную* C'', *что для всякого транслятора* T_{21} *из* Y_2 *в* Y_1

$$\forall_n \left(n > 0 \supset \exists B \left(\|B\| \leqslant n \& \|T_{21}(B)\| \geqslant C'' \cdot \frac{2^n}{n}\right)\right).$$

Теорема 4. *Можно построить булеву функцию* F *от 300 переменных, реализуемую некоторой автоматной схемой из* Y_2 *со сложностью, меньшей 50000, и не реализуемую никакой автоматной схемой из* Y_1 *со сложностью, меньшей* 2^{290}.

В доказательствах теорем 1—4 используются методы и результаты О. Б. Лупанова([6]).

Последняя теорема дает пример ситуации, когда некоторое сообщение может быть закодировано с обозримой сложностью в рамках одного информационного языка и не может быть закодировано с обозримой сложностью в рамках другого информационного языка. Отметим, что запись F на языке АЛГОЛ—60 содержит менее 800 знаков. Нерастущие автоматы, рассмотренные в ([4]), могут рассматриваться как один из способов математического описания понятия цифровой вычислительной машины. Всякий такой автомат может быть моделирован автоматами множества Y_1 с незначительным возрастанием сложности. Если мы принимаем тезис о том, что автоматы множества Y_1 дают формализацию общего понятия цифровой вычислительной машины, то теорема 4 дает нам конкретный пример булевой функции F от 300 переменных, которая может быть записана с обозримой сложностью средствами определенных алгорифмических языков (например, на языке АЛГОЛ—60), но не реализуема с помощью цифровых вычислительных машин обозримой сложности. Невозможность реализации F на любой из существующих цифровых вычислительных машин может быть доказана строго.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ավտոմատների միջոցով բուլյան ֆունկցիաների իրականացման մասին

Համեմատվում են բուլյան ֆունկցիաների իրականացման հնարավորությունները աճող և ոչ-աճող ավտոմատների միջոցով։ Ապացուցվում է, որ n-չափանի բուլյան ֆունկցիաներ իրականացնող սխեմաների բարդության ընդհանուր գնահատականները միևնույն արտահայտությունն ունեն աճող և ոչ-աճող ավտոմատների համար, սակայն որոշ կոնկրետ բուլյան ֆունկցիաների դեպքում նշված բարդությունները կարող են էապես տարբերվել իրարից։ Կառուցվում է կոնկրետ բուլյան ֆունկցիա, որը իրականացվում է ընկալվող բարդությամբ աճող ավտոմատների միջոցով, սակայն չի ներկայացվում ոչ-աճող ավտոմատներից կազմված ընկալվող բարդություն ունեցող սխեմայով։ Այս կարելի է մեկնաբանել այնպես, որ նշված բուլյան ֆունկցիան ներկայացվում է ալգորիթմիկ լեզվի ոչ բարդ սխեմայով, բայց չի կարող ծրագրավորված լինել գոյություն ունեցող թվային հաշվիչ մեքենաների վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. von Neumann*, The General and Logical Theory of Automata, Cerebral Mechanisms in Behaviour, New York—London, 2070—2098 (1951). Русский перевод: фон Нейман Дж. Общая и логическая теория автоматов (в книге: А. Тьюринг. „Может ли машина мыслить", Физматгиз, М., 59—101 (1960)). [2] *Я. М. Барздинь*, ДАН СССР, т. 157, вып. 3, 542—545 (1964). [3] *Я. М. Барздинь*, ДАН СССР, т. 157, вып. 2, 291—294 (1964). [4] *Ю. П. Офман*, Труды Моск. Матем. общества, т. 14, 186—199 (1965). [5] *Ю. П. Офман*, Проблемы передачи информации, т. II, вып. 2, 68—73 (1966). [6] *C. Shannon*, The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. Journ., 28, № 1, 59—98 (1949). [7] *Н. А. Шанин*, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 226—311 (1958). [8] *О. Б. Лупанов*, Проблемы кибернетики, вып. 14, 31—110 (1965).