

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ,  
ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И УСИЛЕННОЙ  
ДУМЯ УПРУГИМИ ЛУНОЧНЫМИ НАКЛАДКАМИ**

**Агаян К.Л., Арутюнян Л.А., Закарян В.Г.**

**Ключевые слова:** плоская задача, составное тело, биполярные координаты, луночки, сингулярные интегралы, уравнение Фредгольма.

**Contact problem for composite plane weakened by a circular hole and reinforced by two elastic lune pads**  
**Aghayan K.L., Harutyunyan L.A., Zakaryan V.Z.**

**Keywords:** plane problem, composite body, bipolar coordinates, lune shapes, singular integrals, Fredholm equation.

Within the generalized bipolar coordinate system, a plane contact problem for a composite plane weakened by circular hole is considered. The contour of the circular hole is assumed to be covered by two intersecting lune-shaped pads made of a different elastic material. Within the framework of plane elasticity theory, a closed solution to the problem is constructed in a bipolar coordinate system using the stress function method.

The solution to the governing boundary value problem at first is reduced to a system of two singular integral equations, then formulated as a Riemann-Hilbert problem for certain vector function. The solution of last one is reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind, which admits a solution using the method of successive approximations.

**Կոնտակտային խնդիր շրջանային անցքով թուլացված և երկու լուսնաձև  
առաձգական բարձիկներով ուժեղացված բաղադրյալ հարթության համար**

**Աղայան Կ.Լ., Հարությունյան Լ.Ա., Ջաքարյան Վ.Գ.**

**Հիմնաբաներ.** Հարթ խնդիր, բաղադրյալ մարմին, երկբևեռ կոորդինատներ, լուսնաձև տիրույթ, սինգուլյար ինտեգրալներ, Ֆրեդհոլմի հավասարում:

Ընդհանրացված երկբևեռ կոորդինատական համակարգում դիտարկվում է, շրջանային անցքով թուլացված, բաղադրյալ առաձգական հարթության հարթ կոնտակտային խնդիրը: Ենթադրվում է, որ շրջանային անցքը իր եզրագծով շրջափակված է, այլ առաձգական նյութից պատրաստված, երկու փոխհաստվող լուսնաձև բարձիկներով: Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի շրջանակներում, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում, լարումների ֆունկցիայի մեթոդով, կառուցվում է խնդրի փակ լուծումը:

Որոշիչ եզրային խնդրի լուծումը նախ բերվում է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որն այնուհետև ձևակերպվում է որպես Ռիման – Հիլբերտի եզրային խնդիր որոշակի վեկտոր ֆունկցիայի նկատմամբ: Վերջինիս լուծումը, բերվում է Ֆրեդհոլմի II սեռի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որը թույլ է տալիս լուծում մոտավոր հաջորդականությունների մեթոդով:

В обобщенной биполярной координатной системе рассматривается плоская контактная задача для ослабленной круговым отверстием составной плоскости. Предполагается, что контур кругового отверстия окружен двумя пересекающийся луночными подушками из другого упругого материала. В рамках плоской

теории упругости, в системе биполярной системе координат, методом функции напряжения, построено замкнутое решение задачи.

Решение определяющей краевой задачи сперва сводится к системе из двух сингулярных интегральных уравнений, которое затем формулируется в виде краевой задачи Риммана – Гильберта для некоторой вектор функции. Решение последнего сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода, допускающее решение методом последовательных приближений.

## Введение.

Исследованию закономерностей и особенностей напряженного состояния в составных упругих телах в виде упругой плоскости, содержащей концентраторы напряжения типа трещин, накладок и включений или остроугольные полости различных типов, посвящены многочисленные работы. В связи с этим, отметим книги [1-5], в которых выдвинуты различные подходы к решению вопросов, связанных с определением сингулярного поведения упругих напряжений около концевых точек концентраторов напряжений. В работах [6-12], конечно это далеко не полный список, поставлены и решены различные задачи, относящиеся к вопросам изучения напряженно – деформированного состояния в составных упругих телах, с точным определением степеней сингулярности разрушающих напряжений в остроугольных точках контактных поверхностей. Наиболее близкими к рассматриваемой здесь задаче можно считать работы [2,6,11], в которых изучаются плоские задачи для внутренности круговых луночек. В [7,8,10] изучаются аналогичные внешние задачи теории упругости для неоднородных плоскостей с круговыми сегментными луночными подушками.

## 1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

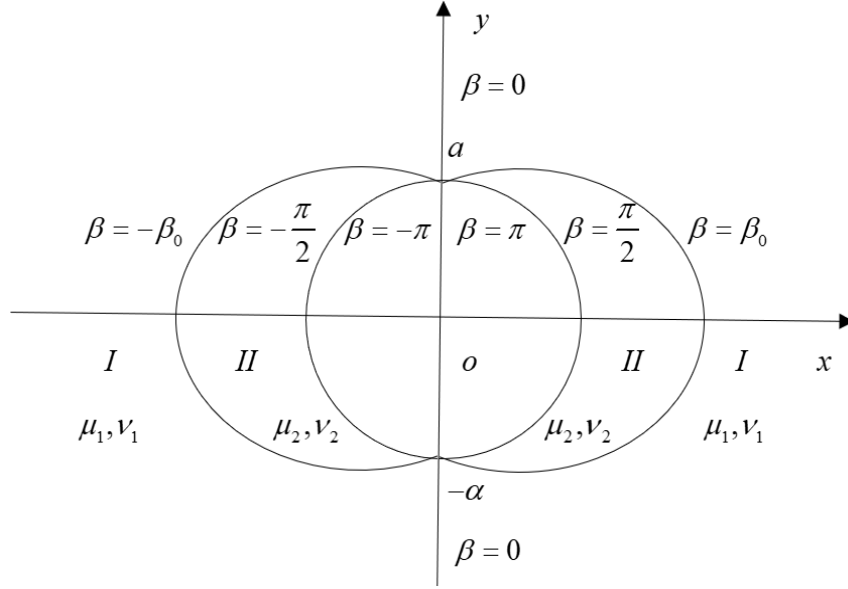
В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной луночными подушками из другого материала.

Принимаем, что в биполярной системе координат, первый материал занимает область  $|\beta| \leq \beta_0$  и имеет упругие характеристики  $\mu_1$  и  $\nu_1$ , второй материал, с упругими характеристиками  $\mu_2$  и  $\nu_2$ , занимает область  $\beta_0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}$ , причем координата  $\alpha$  внутри рассматриваемой составной области изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$  (фиг. 1).

Между материалами, вдоль контактных линий  $\beta = \pm\beta_0$ , осуществляется полный контакт. Внешние нагрузки, в виде нормальных и касательных напряжений, приложены вдоль контура отверстия  $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ . При этом предполагается, что напряжения

на краях  $\beta = -\frac{\pi}{2}$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$  одинаковы. Так что, к геометрической симметрии задачи добавляется также симметрия по внешней нагрузке. Следовательно, ввиду симметрии напряженно-деформированного состояния относительно оси  $Oy$ , в

дальнейшем будем рассматривать только правую половину, которая в биполярной системе координат определяется неравенством  $0 \leq \beta \leq \pi$ .



Фиг. 1

Page | 5 Внешние задачи для этой области удобно решать в несколько видоизменной системе биполярных координат. Связь прямоугольных координат с видоизменной системой биполярных координат дается формулами [2].

$$gx = \sin \beta, \quad gy = \operatorname{sh} \alpha, \quad ag = \operatorname{ch} \alpha - \cos \beta \quad (1)$$

где  $a$  – размерный параметр.

Задача решается при помощи функции напряжений  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m = 1, 2$ ), каждая из которых удовлетворяют бигармоническому уравнению [2]

$$\left[ \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta)) = 0 \quad (2)$$

Напряжения и перемещения в видоизменённых биполярных координатах через функции напряжений  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  задаются формулами [2]:

$$a \sigma_{\alpha}^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta))$$

$$a \sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) = \left[ (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (g \Phi_m(\alpha, \beta))$$

$$\alpha \tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta) = -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (g\Phi_m(\alpha, \beta)) \quad (3)$$

$$u_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[ (1 - 2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right]$$

$$\nu_m(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu_m} \left[ (1 - 2\nu_m) \frac{\partial \Phi_m(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_m(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] \quad m = 1, 2$$

где  $\mu_m$  и  $\nu_m$  упругие характеристики ( $\mu_m$  – модули сдвига,  $\nu_m$  – коэффициенты Пуассона), а связь между  $g\Psi_m(\alpha, \beta)$  и  $g\Phi_m(\alpha, \beta)$  дается формулой

$$\frac{\partial^2 (g\Psi_m(\alpha, \beta))}{\partial \alpha \partial \beta} = (1 - \nu_m) \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right) (g\Phi_m(\alpha, \beta)) \quad (4)$$

Бигармоническую функцию напряжений  $\Phi_m(\alpha, \beta)$  ( $m = 1, 2$ ) ищем в виде интеграла Фурье:

$$g\Phi_m(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (m = 1, 2) \quad (5)$$

где  $f_m(t, \beta)$  берется в следующем виде

$$f_1(t, \beta) = A_1(t) \operatorname{ch} t(\beta_0 - \beta) \cos \beta + B_1(t) \operatorname{ch} t\beta \cos(\beta_0 - \beta) +$$

$$+ C_1(t) \operatorname{sh} t(\beta_0 - \beta) \sin \beta + D_1(t) \operatorname{sh} t\beta \sin(\beta_0 - \beta)$$

$$f_2(t, \beta) = A_2(t) \operatorname{ch} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \cos(\beta - \beta_0) + B_2(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \sin \beta +$$

$$+ C_2(t) \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \sin(\beta - \beta_0) + D_2(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \cos \beta \quad (6)$$

Неизвестные функции интегрирования  $A_m(t)$ ,  $B_m(t)$ ,  $C_m(t)$  и  $D_m(t)$  ( $m = 1, 2$ ) определены при помощи следующих граничных условий:

$$V_1(\alpha, 0) = \tau_{\alpha\beta}^{(1)}(\alpha, 0) = 0$$

$$(g\Phi_2(\alpha, \beta)) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \varphi_1(\alpha); \quad \frac{\partial (g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \varphi_2(\alpha) \quad (7)$$

$$\left. (g\Phi_1(\alpha, \beta)) \right|_{\beta=\beta_0} = \left. (g\Phi_2(\alpha, \beta)) \right|_{\beta=\beta_0}; \quad \left. \frac{\partial (g\Phi_1(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = \left. \frac{\partial (g\Phi_2(\alpha, \beta))}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0}$$

$$U_1(\alpha, \beta_0) = U_2(\alpha, \beta_0); \quad V_1(\alpha, \beta_0) = V_2(\alpha, \beta_0) \quad (8)$$

где предполагается, что функции  $\Phi_m(\alpha)$  ( $m=1, 2$ ) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

Из граничных условий (7), для неизвестных функций интегрирования  $A_m(t)$ ,  $B_m(t)$ ,  $C_m(t)$  и  $D_m(t)$  ( $m=1, 2$ ) получаем следующие выражения через неизвестные функции  $P_m(t)$  ( $m=1, 2$ )

$$A_1(t) = P_1(t) \frac{2t \sin \beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\text{sh } 2t\beta_0 \sin \beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$B_1(t) = P_1(t) \frac{2 \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t)} + P_2(t) \frac{\text{sh } t\beta_0 \sin 2\beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$C_1(t) = -P_1(t) \frac{2 \sin \beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\sin 2\beta_0 \sin \beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$D_1(t) = P_1(t) \frac{2t \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t)} - P_2(t) \frac{\text{sh } 2t\beta_0 \text{sh } t\beta_0}{\Delta_1(t) \Delta_3(t)}$$

$$A_2(t) = P_1(t) \frac{\text{ch } t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_4(t)} - \bar{\varphi}_1(t) \frac{\cos \beta_0}{\Delta_4(t)}$$

$$B_2(t) = -P_1(t) \frac{\cos \beta_0}{\Delta_4(t)} + \bar{\varphi}_1(t) \frac{\text{ch } t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_4(t)}$$

$$C_2(t) = P_1(t) \left[ \frac{t \text{ch } t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \text{sh } t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right] + P_2(t) \frac{\text{sh } t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} -$$

$$- \bar{\varphi}_1(t) \left[ \frac{t \sin \beta_0}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \text{sh } 2t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin 2\beta_0}{2\Delta_2(t) \Delta_4(t)} \right] + \bar{\varphi}_2(t) \frac{t \cos \beta_0}{\Delta_2(t)}$$

$$D_2(t) = -P_1(t) \left[ \frac{t \sin \beta_0}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t(\pi - 2\beta_0) \cos \beta_0}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)} \right] - P_2(t) \frac{t \cos \beta_0}{\Delta_2(t)} +$$

$$+ \bar{\varphi}_1(t) \left[ \frac{t \operatorname{ch} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin 2\beta_0}{2\Delta_2(t)\Delta_4(t)} \right] - \bar{\varphi}_2(t) \frac{\operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right)}{\Delta_2(t)} \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\alpha) e^{it\alpha} d\alpha \quad (m=1,2)$$

$$\Delta_1(t) = \operatorname{sh} 2t\beta_0 + t \sin 2\beta_0; \quad \Delta_2(t) = \operatorname{sh}^2 t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - t^2 \cos^2 \beta_0$$

$$\Delta_3(t) = \operatorname{sh}^2 t\beta_0 + \sin^2 \beta_0; \quad \Delta_4(t) = \operatorname{sh}^2 t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) + \cos^2 \beta_0$$

При удовлетворении условий (8) равенства перемещений, получаем следующую характеристическую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $P_m(t)$  ( $m=1,2$ ), при помощи которой дается окончательное решение поставленной задачи.

$$M_1(t)X_1(t) + M_2(t)X_2(t) + N_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)\beta_0}}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} X_1(\tau) d\tau$$

$$M_2(-t)X_1(t) + M_1(-t)X_2(t) + N_2(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(t-\tau)\beta_0}}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} X_2(\tau) d\tau \quad (10)$$

где

$$X_1(t) = (h + a_{21}(t))P_1(t) + a_{22}(t)P_2(t) + a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$X_2(t) = (h - a_{21}(t))P_1(t) - a_{22}(t)P_2(t) - a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) - a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$M_1(t) = \frac{1}{2ha_{22}(t)} \left[ a_{11}(t)a_{22}(t) + (h + a_{12}(t))(h - a_{21}(t)) \right] - t$$

$$M_2(t) = \frac{1}{2ha_{22}(t)} \left[ a_{11}(t)a_{22}(t) - (h + a_{12}(t))(h - a_{21}(t)) \right]$$

$$N_1(t) = M_3(t)\bar{\varphi}_1(t) + M_4(t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$N_2(t) = M_3(-t)\bar{\varphi}_1(t) + M_4(-t)\bar{\varphi}_2(t)$$

$$\begin{aligned}
M_3(t) &= a_{13}(t) - \frac{a_{23}(t)}{a_{22}(t)}(h + a_{12}(t)); \quad M_4(t) = a_{14}(t) - \frac{a_{24}(t)}{a_{22}(t)}(h + a_{12}(t)) \\
a_{11}(t) &= h_2 \frac{t^2 + 1}{\Delta_1(t)} \sin 2\beta_0 + t \frac{t^2 + 1}{\Delta_2(t)} \cos^2 \beta_0 \\
a_{12}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} (\operatorname{ch} 2t\beta_0 + \cos 2\beta_0) + \frac{1}{2\Delta_2(t)} \left( \operatorname{sh} 2t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) - t \sin 2\beta_0 \right) \\
a_{13}(t) &= -\frac{t^2 + 1}{\Delta_2(t)} \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 \\
a_{14}(t) &= \frac{1}{\Delta_2(t)} \left( t \operatorname{ch} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 - \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right) \\
a_{21}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} (\operatorname{ch} 2t\beta_0 - \cos 2\beta_0) + \frac{1}{2\Delta_2(t)} \left( \operatorname{sh} 2t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) + t \sin 2\beta_0 \right) \\
a_{22}(t) &= \frac{h_2}{\Delta_1(t)} \sin 2\beta_0 + \frac{t}{\Delta_2(t)} \cos^2 \beta_0 \\
a_{23}(t) &= -\frac{1}{\Delta_2(t)} \left( t \operatorname{ch} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 + \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \sin \beta_0 \right) \\
a_{24}(t) &= \frac{1}{\Delta_2(t)} \operatorname{sh} t \left( \frac{\pi}{2} - \beta_0 \right) \cos \beta_0 \\
h_1 &= \frac{1 - \mu}{1 + \mu}, \quad h_2 = \frac{\mu(1 - \nu_1)}{1 - \nu_2}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad h = \frac{h_1}{2} + h_2 - 1
\end{aligned} \tag{11}$$

## 2. Решение определяющей системы уравнений.

Для решения сингулярных интегральных уравнений (10), представим их в виде

$$\begin{aligned}
M_1(t)Y_1(t) + M_4(t)Y_2(t) + K_1(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)Y_1(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \\
M_4(-t)Y_1(t) + M_1(-t)Y_2(t) + K_2(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)Y_2(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_1(t) &= e^{\frac{t\pi}{2}} X_1(t); \quad Y_2(t) = e^{-t(\beta_0+\pi)} X_2(t) \\
K_1(t) &= e^{t(\beta_0-\pi)} N_1(t); \quad K_2(t) = e^{-t(\beta_0+\pi)} N_2(t) \\
M_4(t) &= e^{2t\beta_0} M_2(t); \quad \theta(t) = e^{2t\pi}
\end{aligned} \tag{13}$$

Интегральные уравнения (12) сведем к краевой задаче Римана-Гильберта [3,4,9,10].

Введем новую кусочно-голоморфную функцию

$$R_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) Y_m(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (m=1,2) \tag{14}$$

исчезающую на бесконечности.

Если  $t$  —любая точка контура, то по формуле Сохоцкого-Племеля получаем:

$$\begin{aligned}
R_m^+(t) - R_m^-(t) &= Y_m(t) \\
R_m^+(t) + R_m^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) Y_m(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (m=1,2)
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя эти выражения в систему сингулярных интегральных уравнений (12), получим следующие краевые задачи Римана Гилберта

$$\begin{aligned}
R_1^+(t) &= c_{11}(t) R_1^-(t) + c_{12}(t) R_2^-(t) + T_1(t) \\
R_1^+(t) &= c_{21}(t) R_1^-(t) + c_{22}(t) R_2^-(t) + T_2(t)
\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11}(t) &= 1 + \frac{2i(M_1(-t) + i)}{\Delta_3(t)}; \quad c_{22}(t) = 1 - \frac{2i(M_1(t) + i)}{\Delta_3(t)} \\
c_{12}(t) &= \frac{2iM_4(t)}{\Delta_3(t)}; \quad c_{21}(t) = -\frac{2iM_4(-t)}{\Delta_3(t)} \\
T_1(t) &= \frac{1}{\Delta_3(t)} [M_4(t) K_2(t) - (M_1(-t) - i) K_1(t)] \\
T_2(t) &= \frac{1}{\Delta_3(t)} [M_4(-t) K_1(t) - (M_1(t) + i) K_2(t)] \\
\Delta_3(t) &= (M_1(t) + i)(M_1(-t) - i) - M_4(t) M_4(-t)
\end{aligned} \tag{17}$$



Обозначая матрицу коэффициентов через  $G(t)$ , а векторы с составляющими  $R_m(t)$  и  $T_m(t)$  ( $m=1,2$ ) – через  $R(t)$  и  $T(t)$ , можно краевые задачи (16) записать в матричной форме

$$R^+(t) = G(t)R^-(t) + T(t) \quad (18)$$

Решение уравнения (18), в общем случае, строится путем регуляризации, т.е. приведением к интегральному уравнению Фредгольма.

Над обеими частями уравнения по определенным правилам производится операция, устраняющая сингулярные интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

$$R^+(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) R^+(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau, \quad R^-(t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) R^-(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (19)$$

Подставляя  $R^+(t)$  из уравнения (18) в первое уравнение (19), получаем

$$G(t)R^-(t) + T(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} [G(\tau)R^-(\tau) + T(\tau)] d\tau \quad (20)$$

Умножая эти уравнения на  $[G(t)]^{-1}$  и сложив со вторым уравнением (19), получаем

$$\begin{aligned} R^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} \{ [G(t)]^{-1} G(\tau) - E \} R^-(\tau) d\tau = \\ = \frac{[G(t)]^{-1}}{2} \left[ \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) T(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau - T(t) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

где  $E$  - единичная матрица.

Интеграл в левой части (21) собственный, так как подынтегральное выражение уже не имеет особенности в точках  $\tau = t$ . Таким образом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы  $G(t)$  и свободные члены, входящие в уравнение (18), удовлетворяют условию Гельдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det G(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \quad \text{на контуре} \quad (22)$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи равен -1, и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (21) всегда эквивалентно исходному уравнению [4,8,9,10].

После несложных преобразований и упрощений, векторное уравнение (21) сводится к следующей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функции  $P_m(t)$  ( $m=1,2$ )

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [H_{11}(t,\tau)P_1(\tau) + H_{12}(t,\tau)P_2(\tau)]d\tau + F_1(t) \right\} \\ P_2(t) &= \frac{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}{(t^2+1)\Delta(t)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [H_{21}(t,\tau)P_1(\tau) + H_{22}(t,\tau)P_2(\tau)]d\tau + F_2(t) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} H_{11}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \times \\ &\times [h(t-\tau)(a_{21}(\tau) - a_{12}(t)) - a_{12}(t)a_{11}(\tau) - (t^2+1)a_{22}(t)a_{12}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h((t^2+1)a_{22}(t) - a_{11}(\tau)) + (t-\tau)(a_{12}(t)a_{21}(\tau) - h^2)] \\ H_{12}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [a_{11}(t)(h + a_{11}(\tau)) + (t^2+1)(a_{21}(\tau) - h^2)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h(t^2+1)(a_{21}(\tau) - a_{21}(t)) - (t-\tau)a_{11}(t)a_{21}(\tau)] \\ H_{21}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \times \\ &\times [h^2 + h(t-\tau)a_{22}(\tau) - a_{12}(t)a_{12}(\tau) - (t^2+1)a_{22}(t)a_{22}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h(a_{12}(t) - a_{12}(\tau)) - (t-\tau)a_{22}(\tau)] \\ H_{22}(t,\tau) &= \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [a_{11}(t)a_{12}(\tau) - (t^2+1)a_{21}(t)a_{22}(\tau)] + \\ &+ \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} [h((t^2+1)a_{22}(\tau) - a_{11}(t)) - (t-\tau)a_{11}(t)a_{22}(\tau)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
F_1(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[ \left( h(t-\tau) - (t^2+1) \right) a_{22}(t) \left( a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) - \right. \right. \\
& - a_{12}(t) \left( a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[ (t-\tau) a_{12}(t) \left( a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) - \right. \\
& - h \left( a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) \left. \right] \Big\} d\tau + \\
& + \left( h(t^2+1) - t a_{11}(t) \right) \left( a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t) \right) + \\
& + t a_{21}(t) \left( a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t) \right) \\
F_2(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[ - (t^2+1) a_{21}(t) \left( a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{24}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) + \right. \right. \\
& + a_{11}(t) \left( a_{13}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\text{ch}(t-\tau)\beta_0}{\text{sh}(t-\tau)\pi} \left[ h(t^2+1) - (t-\tau) a_{11}(t) \right] \left( a_{23}(\tau)\bar{\varphi}_1(\tau) + a_{14}(\tau)\bar{\varphi}_2(\tau) \right) \Big\} d\tau - \\
& - h(t^2+1) \left( a_{13}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{14}(t)\bar{\varphi}_2(t) \right) + \\
& + (t^2+1) \left( t a_{21}(t) - a_{11}(t) \right) + 2th \left( a_{23}(t)\bar{\varphi}_1(t) + a_{24}(t)\bar{\varphi}_2(t) \right) \\
\Delta(t) = & h_2 \left[ \text{sh } 2t(\gamma_1 + \gamma_2) + t \sin 2(\gamma_1 + \gamma_2) \right] - h_1 h_2 \text{sh } 2t\gamma_1 \Delta_2(t) - \\
& - \Delta_1(t) \left[ \frac{h_1^2}{4} \Delta_2(t) - h_1 \text{sh}^2 t\gamma_2 + h_2 - 1 \right]
\end{aligned} \tag{25}$$

Учитывая найденные значения, для контактных напряжений из (3) будем иметь

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) &= \frac{i(\text{ch } \alpha - \cos \beta_0)}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_2(t) e^{-it\alpha} dt \\
\sigma_{\beta}^{(m)}(\alpha, \beta_0) &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ -t^2 (\text{ch } \alpha - \cos \beta_0) - it \text{sh } \alpha + \cos \beta_0 \right] P_1(t) - \right. \\
& \left. - \sin \beta_0 P_2(t) \right\} e^{-it\alpha} dt
\end{aligned} \tag{26}$$

В общем случае любое из трех напряжений (3) согласно (5), (9) и (23) выражается несобственным интегралом вида

$$\tau(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}(x, y, t) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-(1+it)}}{\Delta(t) \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{1-it}} dt \quad (27)$$

который, после определения  $\bar{\tau}(x, y, t)$ , можно вычислить приближенно с помощью различных численных методов.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта  $y = \pm a$  (т.е. в точках  $\alpha = \pm\infty$ ) интеграл (27) по вещественной оси добавляется интегралом по правой (при  $y < 0$  или  $\alpha < 0$ ) или по левой (при  $y > 0$  или  $\alpha > 0$ ) полуокружности радиуса  $R \rightarrow \infty$  с центром в начале координат [6-10].

При увеличении радиуса полуокружности последовательность  $R$  может быть подобрана так, чтобы интеграл (27) по полуокружности стремился к нулю.

Применяя теорему о вычетах, представим (27) в виде бесконечного ряда

$$\tau(x, y) = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{\tau}(x, y, t_1) \left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-(1+it_1)}}{\Delta'(t_1) \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{1-it_1}} + \sum_{k=2,3} \text{выч} [f(x, y, t_k), t_k] \right\} \quad (28)$$

Здесь  $f(x, y, t_k)$  – подынтегральная функция в (27), а  $t_k = \xi_k - i\eta_k$  – корни уравнения  $\Delta(t) = 0$ , которые расположены в порядке возрастания положительных значений  $\eta_k$ .

Трансцендентное уравнение  $\Delta(t) = 0$  зависит от четырех параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и комбинаций упругих характеристик материалов  $h_1$  и  $h_2$ .

Очевидно, характер напряженного состояния около края  $y = a$  ( $\alpha = \infty$ ) определяется величиной мнимой части первого простого корня  $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$ , уравнения (25). Если  $\eta_1 > 1$  около края имеем нулевое напряженное состояние, если  $\eta_1 < 1$  имеет место явление концентрации напряжений. В случае  $\eta_1 = 1$  напряжения на краях поверхности контакта конечны и, в общем случае, отличны от нуля.

Из уравнения  $\Delta(t) = 0$  в зависимости от геометрических и физических параметров задачи можно найти области конечных и бесконечных напряжений на краю поверхности контакта и границу раздела между этими областями.

Упомянутая граница определяется из зависимости

$$\sin 2\beta_0 (h_1 \cos^2 \beta_0 + h_2 - 1) = 0 \quad (29)$$

### 3. Частные случаи.

$$\text{а) } \sin 2\beta_0 = 0 \quad \beta_0 = 0 \text{ или } \beta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

это значит что материал однородный.

$$\text{б) } \cos 2\beta_0 = \frac{2(1-h_2)}{h_1} - 1, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{2(1-h_2)}{h_1} - 1 \right] \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет решение, когда

$$\frac{(1+\mu)(1-\nu_1)}{1-\nu_2} \leq 2 \quad (32)$$

При  $\mu = 1$  уравнение (31) имеет решение, когда  $\nu_2 \leq \nu_1$ .

При  $\nu_1 = \nu_2$  уравнение (31) имеет решение, когда  $\mu_2 \leq \mu_1$ .

Следует отметить, что решением граничной задачи подтверждается утверждение, сделанное в [6] на основе локального решения, о том, что в случае кусочно – однородного тела угол, разделяющий зоны концентрации напряжений от зоны малонапряженности может быть меньше развернутого угла.

### 4. Заключение.

С помощью видоизменной системы биполярных координат и аппарата интеграла Фурье, дано решение плоской задачи для составной плоскости, ослабленной круговым отверстием и усиленной двумя симметрично расположенными луночными подушками из другого материала. На границе отверстия заданы нормальные и касательные напряжения, а на линии сопряжения около края соприкосновения подушек с плоскостью - условия полного контакта. При удовлетворении граничных и контактных условий получена определяющая система сингулярных интегральных уравнений. Решение этих уравнений, в конечном итоге, сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Получено характеристическое уравнение, по корням которого определяется напряженное состояние около края соприкосновения подушки с плоскостью. В зависимости от геометрических и физических параметров найдены области конечных и бесконечных напряжений и граница раздела этих областей.

Отметим, что результаты рассмотренной здесь задачи могут быть использованы при оценке расчетов прочности туннельных сооружений, встречающихся в различных областях строительства.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М. 1950.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Наука, Л. 1967, 402 ст.
3. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений М. Наука, 1970.
5. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М., Наука, 1982, 344 ст.
6. Чобанян К.С. Нагрузки в составных упругих тел. Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1987, ст. 338.
7. Акопян В.Н. Смешанные граничные задачи взаимодействия сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. Ереван, Изд. Гитутюн, НАН 2014, 322 ст.
8. Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казань. ун-та, т.116. кн.4, 1956.
9. Боджи Д.В. Плоская статистическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов, имеющих произвольные углы раствора. ПМ. т.38. сер. Е. №2, 1971.
10. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 29, №1, 1976. ст.51-66.
11. Арутюнян Л.А., Едоян В.А. Плоская задача теории упругости для внешности круговой луночки. Мат. V межд. Конф. Цахкадзор, Арм. 2017. Ст. 31-32.
12. Алексанян Р.К., Арутюнян Л.А., Седракян А.М. Плоская задача для внешности кругового сегмента. Slovak inter. Scientific journal N 80 (2024) p. 34-38.
13. Aghayan K.L., Zakaryan V.G. Surface Electro-Elastic Shear Waves in Piezo-Electrical Half-Space with Semi-Infinite Electrode. Springer Nature Switzerland AG 2025 H. Altenbach. Current Developments in Solid Mechanics and Their Applications. Advanced Structured Materials. 2025. V.223, pp.1-16.
14. Арутюнян Л.А., Закарян В.Г. Плоская задача для составной плоскости с конечным отверстием. Мат. IX межд. конф. 2025, Цахкадзор, Арм., см. 31-35.

**Сведения об авторах:**

**Агаян Каро Леренцович**—д.ф.м.н., проф., ведущий научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел.: (37491) 485566, **E-mail:** [karo.aghayan@gmail.com](mailto:karo.aghayan@gmail.com)

**Арутюнян Левон Арсенович**—к.ф.м.н., старший научный сотрудник Института Механики НАН РА, Тел.: (37499) 675747, **E-mail:** [arutyunyanlevon@gmail.com](mailto:arutyunyanlevon@gmail.com)

**Закарян Ваге Гришаевич**—к.ф.м.н., ученый секретарь Института Механики НАН Армении, Тел.: (37477) 789264, **E-mail:** [vahe-zaqaryan@mail.ru](mailto:vahe-zaqaryan@mail.ru)

Поступила в редакцию 15 ноября 2025