ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 2

ФИЗИКА

УДК 533.9

В. А. Варданян

Замечание к энергетическому принципу исследования устойчивости самогравитирующих образований

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяном 18/IV 1968)

В работах [1-4] даны подробный анализ и обобщение энергетического принципа, которым в настоящее время широко пользуются для исследования устойчивости ограниченных в пространстве плазменных образований. В работе [1] гравитационные эффекты учтены с некоторым приближением, а в [2-4], предназначенных для плазмы лабораторного масштаба, они вообще не рассматривались. С астрофизической точки зрения, однако, учет полного вклада гравитационных сил представляет определенный интерес.

В настоящей заметке дается обобщение энергетического принципа, сформулированного в работе [1], на самогравитирующие системы. Показывается, что для этого необходимо дополнить обобщенную формулу изменения потенциальной энергии членами, учитывающими полный вклад гравитационных сил.

В качестве исходных берем уравнения магнитной гидродинамики при допущениях, приводящих к известным идеализациям (вмороженности магнитных силовых линий, отсутствию вязкости, теплопроводности и т. д.). К этим уравнениям мы присоедeним уравнение Пуассона для гравитационного потенциала.

Используемый нами метод получения обобщенного энергетического принципа и формулы изменения потенциальной энергии, в основном, аналогичен методу, примененному в работе [1]. Поэтому, опуская здесь выкладки, приводим результат в следующем виде:

$$\omega^2 = \frac{\delta W}{\frac{1}{2}\int \rho \xi^2 dV}, \qquad (1)$$

$$\delta W = \delta W_S + \delta W_F + \delta W_V, \qquad (2)$$

$$\delta W_S = \frac{1}{2}\int\limits_S \left\{ (\vec{\xi}\cdot\vec{n}) \left[\vec{\xi}\cdot \left< \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right> - \rho\delta\varphi \right] - (\vec{n}\cdot\vec{B})\vec{\xi}\cdot\left<\delta\vec{B}\right> \right\} dS, \qquad (3)$$

$$\delta W_F = \frac{1}{2}\int\limits_{\text{плазма}} \Bigg\{ \frac{1}{\mu_0}\Big[(\delta \vec{B}_i)^2 - (\vec{\xi} \times \mathrm{rot}\,\vec{B}_i)\cdot \delta\vec{B}_i \Big] + (\vec{\xi}\cdot\nabla P)(\nabla\cdot\vec{\xi}) +$$

$$+ \gamma P(\nabla\cdot\vec{\xi})^2 + \nabla(\rho\vec{\xi})\,[\delta\varphi + \vec{\xi}\cdot\nabla\varphi] \Bigg\} dV, \tag{4}$$

$$\delta W_V = \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_{\text{вакуум}} (\delta\vec{B}_e)^2 dV, \tag{5}$$

$$\delta\vec{B}_i = \mathrm{rot}\,(\vec{\xi}\times\vec{B}_i); \qquad \delta\vec{B}_e = \mathrm{rot}\vec{A}. \tag{6}$$

Здесь ρ — плотность вещества, $\vec{\xi}$ — вектор смещения среды, временная зависимость которого считается экспоненциальной $\vec{\xi} = \vec{\xi}(r)\exp(i\omega t)$, P — давление, $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, φ — гравитационный потенциал, γ — отношение теплоемкостей, $\vec{A}$ — вектор потенциал возмущения магнитного поля в вакууме, символ $\langle\,\rangle$ — означает скачок соответствующей величины, а интегрирование ведется по невозмущенным поверхностям и объему.

Формулы (1) — (5) отличаются от соответствующих выражений в работе ([1]) членами

$$\frac{1}{2}\int\limits_S (\vec{\xi}\cdot\vec{n})\,\rho\delta\varphi\, dS; \quad \frac{1}{2}\int\limits_V \nabla(\rho\vec{\xi})\,\delta\varphi\, dV; \quad \frac{1}{2}\int\limits_S B_n\vec{\xi}\cdot\langle\delta\vec{B}\rangle dS. \tag{7}$$

Третий из этих членов обусловлен искривлением силовых линий, пронизывающих поверхность раздела плазма — вакуум и, очевидно, исчезает, если вместо граничного условия $\langle(\vec{n}\cdot\vec{B})\rangle = 0$ выполняется условие $(\vec{n}\cdot\vec{B}) = 0$.

Для астрофизических приложений существенными оказываются два других члена в (7), которые своим появлением обязаны гравитационным силам.

Первый из них является прямым следствием поверхностных волн, а второй обусловлен сжимаемостью $(\nabla\cdot\vec{\xi} \neq 0)$ и неоднородностью распределения равновесной плотности $(\nabla\rho \neq 0)$.

В качестве иллюстрации рассмотрим известную задачу колебания несжимаемой жидкой сферы, распределение масс в которой подчиняется закону Роша:

$$\rho = \rho_0\left[1 - \alpha\left(\frac{r}{R}\right)^n\right], \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

В силу предположения несжимаемости и отсутствия магнитного поля изменение потенциальной энергии сферы согласно (2) — (4) принимает сравнительно простой и симметричный вид:

$$\delta W = -\frac{1}{2}\int\limits_S \xi_n\,[\delta\varphi + \vec{\xi}\cdot\nabla\varphi]\,\rho\, dS + \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{\xi}\cdot\nabla\rho\,[\delta\varphi + \vec{\xi}\cdot\nabla\varphi]\,dV. \tag{8}$$

Условие $\nabla\cdot\vec{\xi} = 0$ обеспечивает определение координатной зависимости вектора смещения. Гравитационный потенциал φ и его возмущение $\delta\varphi$ находятся из уравнения Пуассона с помощью граничных условий, известных из теории потенциала.

Подставляя найденные таким образом значения $\vec{\xi}$, φ и $\delta\varphi$ в (8) с помощью (1), получаем известное дисперсионное уравнение [5]

$$\omega^2 = \frac{2GM}{R^3}\cdot\frac{l(l-1)}{2l+1}\cdot\frac{1-\alpha\dfrac{(n+6)(2l+1)}{(n+3)(2l+n+1)}+\alpha^2\dfrac{3(2l+1)}{(n+3)(2l+2n+1)}}{\left(1-\dfrac{3\alpha}{n+3}\right)\left(1-\alpha\dfrac{2l+1}{2l+n+1}\right)}.$$

Разумеется, что без учета интегралов (7) мы получили бы совершенно иной результат.

В заключение выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР Г. С. Саакяну за интерес, проявленный к работе и обсуждение ее на теоретическом семинаре.

Ереванский государственный
университет

Վ. Հ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

Ինքնագրավիտացվող կազմավորումների կայունության ուսումնասիրության էներգետիկ սկզբունքի մասին

Տարածության մեջ սահմանափակ պլազմային կազմավորումների կայունության ուսումնասիրության համար ներկայումս լայնորեն կիրառվող էներգետիկ սկզբունքի մանրամասն անալիզն ու ընդհանրացումը տրված են (1—4) աշխատանքներում: Այդ աշխատանքները, սակայն, նախատեսված են գլխավորապես լաբորատոր պլազմայի համար, ուստի և նրանցում գրավիտացիոն ուժերը գրեթե հաշվի չեն առնված: Ներկա հոդվածում էներգետիկ սկզբունքն ընդհանրացվում է այնպես, որ կիրառելի լինի նաև ինքնագրավիտացվող սիստեմների համար: Ցույց է տրված, որ այդ նպատակի համար անհրաժեշտ է պոտենցիալ էներգիայի ընդհանրացված բանաձևը լրացնել գրավիտացիոն ուժերի լրիվ ներգործությունը հաշվի առնող լրացուցիչ անդամներով:

Ընդհանրացման մեր մեթոդը հիմնականում համընկնում է (1)-ում զարգացրած մեթոդի հետ: Իբրև ելակետ ընտրված մագնիսական հիդրոդինամիկայի հավասարումներին մենք ավելացրել ենք նաև Պուասոնի հավասարումը: Պոտենցիալ էներգիայի փոփոխության համար մեր ստացած արտահայտությունը տարբերվում է (1)-ում բերվածից հետևյալ անդամներով.

$$\frac{1}{2}\int\limits_S (\vec{\xi}\cdot\vec{n})\,\rho\,\delta\varphi\, dS; \quad \frac{1}{2}\int\limits_V \nabla(\rho\vec{\xi})\,\delta\varphi\, dV; \quad \frac{1}{2}\int\limits_S (\vec{n}\cdot\vec{B})\,\vec{\xi}\cdot\langle\delta B\rangle\, dS: \tag{1}$$

Այս անդամներից երրորդը պայմանավորված է պլազմա-վակուում սահմանային մակերևույթը հատող-անցնող մագնիսական ուժագծերի ծռումով և, ակնհայտ է, որ կանհետանա, երբ $(\vec{n}\cdot\vec{B}) = 0$: Աստրոֆիզիկական կիրառությունների համար կարևոր ուղղում են մյուս երկու անդամները, որոնք իրենց գոյությամբ պարտական են գրավիտացիոն ուժերին: Նրանցից առաջինը հանդիսանում է մակերևույթային ալիքների ուղղակի հետևանքը, իսկ երկրորդը պայմանավորված սեղմելիությամբ՝ $\nabla\cdot\vec{\xi} \neq 0$ և անհամասեռությամբ՝ $\nabla\rho \neq 0$:

Իբրև օրինակ դիտարկելով անսեղմելի հեղուկ ոլորտի տատանման հայտնի խնդիրը հանգում ենք հանրահայտ դիսպերսիոն հավասարման (5)։ Վերոհիշյալ (1) անդամների անտեսումը ակնհայտ է, որ կհանգեցներ բոլորովին այլ արդյունքի։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal* and *R. M. Kulsrud*, Proc. Roy. Soc. A, 244, 17 (1958), русск. пер. П. С. Ф. № 5, 85 (1958). [2] *Баркович, Град* и *Рубин*. В кн. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, Избранные доклады иностранных ученых, т. 1—Физика плазмы и термоядерные реакции. М., Атомиздат, 1959. [3] *Б. Б. Кадомцев, С. И. Брагинский*. В той же кн. Доклады советских ученых, т. 1—Ядерная физика. М., Атомиздат, 1959. [4] *Б. Б. Кадомцев*, в кн. Вопросы теории плазмы, М., Гостехиздат, 1963. [5] *S. K. Threhan*, Astrophys., 1, 264 (1961).