ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLVII 1968 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. Едигарян

Некоторые теоремы единственности для мероморфных функций в полуплоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 15/I 1968)

1. Как известно, с решением основной задачи теории квазианалитических классов функций связана проблема Ватсона, которая заключается в отыскании необходимых и достаточных условий, которым должны подчиниться числа m_n, чтобы из соотношений

$$|f(z)| \leqslant \frac{m_n}{|z|^n} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{1.1}$$

где $f(z)$ регулярна в полуплоскости $Re z \geqslant \alpha$, следовало $f(z) \equiv 0$. Затем проблема Ватсона была обобщена Мандельбройтом [1], которая оказалась связанной с другой задачей, поставленной в 1947 г. Мандельбройтом и Винером [2], которую можно формулировать следующим образом.

Пусть $w=f(z)$ голоморфна полуплоскости $x \geqslant 0$ и пусть Λ последовательность положительных чисел, таких что

$$f(\Lambda)=\{0\} \tag{1.2}$$

и

$$|f(z)| < M_n \quad \text{при} \quad [x]=n. \tag{1.3}$$

Тогда какие условия необходимы и достаточны для последовательностей $\{M_n\}$ и Λ, чтобы $f(z) \equiv 0$?

П. Маллявин [3] обобщил задачу Мандельбройта—Винера, которая заключается в следующем. Пусть $w=f(z)$ мероморфна в полуплоскости $x \geqslant 0$ и пусть Λ_1, и Λ_2 две последовательности положительных чисел, такая что

$$f(\Lambda)=\{0\}, \tag{1.4}$$

$$f^{-1}(\infty) \subseteq \Lambda_2, \tag{1.5}$$

где $f^{-1}(\infty)$ — множество полюсов функции $f(z)$, и

$$|f(z)| < M_n \text{ при } [x]=n, \; z \in \Omega_{\Lambda_2}, \tag{1.6}$$

где Ω_{Λ_2} — дополнение относительно полуплоскости к множеству кружков, описанных около точек множества Λ_2 с непересекающимися радиусами. Он доказал, что обобщенная проблема Ватсона и обобщенная таким образом задача Мандельбройта—Винера в каком-то смысле эквивалентны. Им же выявлена эквивалентность вышеприведенной задачи со следующей задачей о проблеме моментов. Пусть

$$\int_0^\infty t^{\lambda_n}\, d\alpha(t) = 0, \tag{1.7}$$

где $\{\lambda_n\}$ последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию $\inf|\lambda - \lambda'| = c > 0$, и пусть

$$\int_0^\infty t^n\, |d\alpha(t)| \leqslant M_n. \tag{1.8}$$

Тогда при таких условиях $\alpha(t) \equiv C$.

Мы рассматриваем обобщение задачи Мандельбройта—Винера, заключающееся в следующем. Пусть $w = f(z)$ мероморфна в полуплоскости $x \geqslant 0$ и пусть $\Lambda_1 = \{\gamma_\nu\}$, Λ_2, $\Lambda_3 = \{\mu_\nu\}$ три последовательности положительных чисел. Пусть

$$f(\Lambda_1) = \{0\}, \tag{1.4'}$$

$$f^{-1}(\infty) \subseteq \Lambda_2 \tag{1.5'}$$

и

$$|f(z)| < M_k \text{ при } \mu_{k-1} < x < \mu_k,\ z \in \Omega_{\Lambda_2}, \tag{1.6'}$$

где Ω_{Λ_2} имеет то же значение, что и в теореме Маллявина. Наша задача состоит в определении достаточных условий, которым нужно подчинить последовательности $\{M_n\}$, Λ_1, Λ_2 и Λ_3, чтобы из соотношений (1.4′), (1.5′) и (1,6′) следовало тождественное равенство нулю функции $f(z)$, откуда вытекает, что при условиях

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n}\, d\alpha(t) = 0, \tag{1.9}$$

$$\int_0^\infty t^{\mu_n}\, |d\alpha(t)| \leqslant M_n \tag{1.10}$$

найдено такое условие на последовательность $\{M_n\}$, при котором $\alpha(t) \equiv C$, причем последовательности $\{\gamma_\nu\}$ и $\{\mu_\nu\}$ достаточно свободны по выбору. Метод, применяемый в работе, отличен от метода Маллявина и основан на применении преобразования типа свертки и других интегральных преобразований. В работе рассмотрено также другое обобщение задачи Мандельбройта—Винера. Условия (1.4′), (1.5′) и (1.6′) заменены условиями (1.4′), (1.5′) и

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{f(\mu_k + iy)}{(1+\mu_k+iy)^p}\right|^2 dy\right)^{1/2} \leqslant M_k \quad (p>1 \text{ некоторое}) \tag{1.6}$$

Прежде чем перейти к изложению решения задачи, приведем несколько определений, которые в дальнейшем будут необходимы.

Определение 1. Для некоторой последовательности функций, следуя Г. В. Бадаляну ([4]), некоторую область назовем областью ограничения, если существует последовательность чисел $\{C_n\}$ такая, что эта последовательность функций мажорируется последовательностью чисел $\{C_n\}$. Последовательность $\{C_n\}$ назовем последовательностью, ассоциированной с областью ограничения данных функций.

Пусть $0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots, \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2}<+\infty$ последовательность положительных чисел, а $\{\gamma_k\}$ последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k}=\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2}<+\infty.$$

Введем обозначения

$$\sigma_n=\frac{\gamma_n+\gamma_{n+1}}{2}, \quad E_{1,\infty}(\zeta,\gamma,x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_k+x}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_k}}.$$

Определение 2. Обозначим через $D(\alpha,\gamma)$, содержащую $(0,\infty)$, наибольшую область изменения z, где существуют интегралы

$$R_{n+1}^*(t,z)=\frac{t^{\sigma_n}}{z^{\sigma_{n+1}}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{z}\right)^{\zeta}d\zeta}{(\zeta+\sigma_n+1)E_{1,\infty}(\zeta+\sigma_n+x,\alpha,x)(-\zeta-\sigma_n)E_{1,\infty}(-\zeta-\sigma_n-x,\gamma,x)}$$

для $n=0,1,2,\cdots$, и назовем ее областью разложимости.

Определение 3. Последовательность чисел $\{m_n^*\}$ назовем ([4]) последовательностью единственности решения проблемы Ватсона для области D и для некоторой последовательности $\{\gamma_n\}$, если из условия

$$|f(z)|\leqslant\frac{m_n^*}{|z|^{\gamma_n}},\ z\in D,\ n=n_0,\ n_0+1,\cdots$$

следует, что

$$f(z)\equiv 0,\ z\in D.$$

2. Решение обобщенной задачи Мандельбройта—Винера при достаточно свободном выборе последовательностей Λ_1, Λ_2 и Λ_3 дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* $w=F(z)$ *мероморфна в полуплоскости* $x\geqslant 0$ *и* $\Lambda_1=\{\gamma_\nu\}$, Λ_2, $\Lambda_3=\{\mu_\nu\}$ *три последовательности положительных чисел, которые удовлетворяют следующим условиям*

$$\inf|\lambda - \lambda'| = c > 0, \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda_2 \tag{2.1}$$

и пусть для любого n имеет место

$$\gamma_{n+1} - \mu_n > 0, \tag{2.2}$$

тогда как

$$\sigma_n - \mu_n < 0, \tag{2.2'}$$

где

$$\sigma_n = \frac{\gamma_n + \gamma_{n+1}}{2}.$$

При этом, если

$$F(\Lambda_1) = \{0\}, \tag{2.3}$$

$$F^{-1}(\infty) \subseteq \Lambda_2, \tag{2.4}$$

$$|F(z)| < M_n \text{ при } \mu_{n-1} \leqslant x < \mu_n, \; z \in \Omega_\Lambda, \tag{2.5}$$

и последовательность

$$\{m_n^* = M_n \cdot B_n [|a_{n+1}| + C_n A_n(\alpha, \gamma) + C_{n+1} A_{n+1}(\alpha, \gamma)]\} \tag{2.6}$$

является последовательностью единственности для области ограничения $D_0(\alpha, \gamma)$ функции $B_n(z, t, \alpha, \gamma)$, где

$$B_n(z, t, \alpha, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\left(\frac{\beta_n z}{t}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta + \sigma_n)(\zeta + \sigma_n + 1) E_{1,\infty}(\zeta, \alpha, \sigma_n + 1) \prod_{\nu=1}^{n} \left(1 + \frac{\zeta}{\sigma_n - \gamma_\nu}\right) E_{n+1,\infty}(-\zeta, \gamma - \sigma_n)} \tag{2.7}$$

$$A_n(\alpha, \gamma) = \frac{\tilde{\Gamma}(\sigma_n + \varkappa, \alpha, \varkappa)}{\tilde{\Gamma}(\sigma_n + \varkappa, \gamma, \varkappa)} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left|1 - \left(\frac{\sigma_n + \varkappa}{\gamma_\nu + \varkappa}\right)^2\right|} \quad \left(\varkappa = \frac{1}{2}\right)$$

$$\tilde{\Gamma}(\zeta, \gamma, \pm\varkappa) = \left[\zeta \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu \pm \varkappa}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu \pm \varkappa}}\right]^{-1}, \quad E_{1,\infty}(\zeta, \gamma, \varkappa) =$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu + \varkappa}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}} \tag{2.8}$$

$$a_k = (\gamma_k + \varkappa) \exp\left(-\frac{\gamma_k + \varkappa}{\gamma_k}\right), \quad 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu^2} < +\infty$$

и $\{C_n\}$ является последовательностью ассоциированной с областью ограничения функции $B_n(z, t, \alpha, \gamma)$, а $\{B_n\}$ такая последовательность положительных чисел, функция следа которой

$$B(\sigma) = \sup_n (n\sigma - \log B_n)$$

удовлетворяет условию

$$\int^{\infty} B[\lambda_2(r)]\frac{dr}{r^{2}}<+\infty,$$

где $\lambda_2(r)$ *есть характеристическая функция последовательности* λ_2, *то* $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. Приведем сперва доказательство того частного случая, когда функция $F(z)$ аналитична в полуплоскости $x\geqslant 0$. Составим преобразование Меллина функции $F(z)/(1+z)^p$, где $p>1$ некоторое число. Имеем

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{t^{-z-1}F(z)}{(1+z)^p}\,dz\quad(\alpha>0). \tag{2.9}$$

Отсюда непосредственно следует, что $g(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|g(t)|<t^{-\mu_n-1}M_n.$$

Следуя Г. В. Бадаляну, введем вспомогательную функцию

$$\varphi(t,z)=\frac{1}{(zt)^{\varkappa}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{z}\right)^{\zeta}d\zeta}{(\zeta+\varkappa)\,\mathrm{E}_{1,\infty}(\zeta,\alpha,\varkappa)(\varkappa-\zeta)\,\mathrm{E}_{1,\infty}(-\zeta,\gamma,\varkappa)}.$$

Составим функцию

$$f(z)=\int\limits_0^{\infty}\varphi(t,z)\,g(t)\,dt \tag{2.10}$$

и заметим, что из формулы обращения о преобразованиях Меллина, из (2.3) и из формулы (2.1″) работы [4] имеем

$$f(z)=\int\limits_0^{\infty}R^{*}_{n+1}(t,z)\,g(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Оценка $|f(z)|$ нам дает

$$|f(z)|\leqslant\frac{M_n}{|z|^{\sigma_n}}\left[|a_{n+1}|+C_n A_n(\alpha,\gamma)+C_{n+1}A_{n+1}(\alpha,\gamma)\right]\ \text{при}\ z\in D_0(\alpha,\gamma), \tag{2.12}$$

следовательно, согласно условию теоремы, из (2.12) следует

$$f(z)\equiv 0,\ z\in(0,\infty)\subset D_0(\alpha,\gamma).$$

Тогда, применяя формулу Хиршмана и Уиддера, дающую обращение общего преобразования типа свертки, получим, что $g(t)=0$ почти всюду, следовательно, по формуле обращения преобразования Меллина $F(z)\equiv 0$. Аналогично доказывается следующая.

Теорема 2. *Пусть $w=F(z)$ аналитична в полуплоскости $x\geqslant 0$, а $\Lambda_1=\{\gamma_\nu\}$, Λ_2, $\Lambda_3=\{\mu_\nu^-\}$ те же последовательности, что и в теореме* 1. *При этом, если $F(z)$ удовлетворяет условиям* (2.3), (2.4) *и* (2.5), *то $F(z)\equiv 0$, если при $n\geqslant n_0>0$ имеем*

$$\sup_{y\in(0,\,\infty)}\left\{y\left[\frac{\pi}{2}a-y\int_0^\infty\frac{N_n^+(t)+N_n^-(t)}{t\,(y^2+t^2)}\,dt\right]\right\}\leqslant\ln C_n, \qquad (2.13)$$

где $1\leqslant C_n<\infty$ постоянная, зависящая только от n, а $N_n^+(t)$ и $N_n^-(t)$ соответственно числовые функции последовательностей

$$\sigma_n-\gamma_n,\ \sigma_n-\gamma_{n-1},\cdots,\ \sigma_n-\gamma_1,\ \sigma_n,\ \sigma_{n+1},\cdots\ (\gamma_n<\sigma_n<\gamma_{n+1})$$

$$\gamma_{n+1}-\sigma_n,\ \gamma_{n+2}-\sigma_n,\cdots,\ \gamma_{n+\nu}-\sigma_n,\cdots$$

$$\int^\infty\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr=\infty \qquad (2.14)$$

$$T(r)=\sup_n\frac{r^{\gamma_n}}{m_n^*},\quad m_n^*=M_n\,[|a_{n+1}|+C_n A_n(\alpha,\gamma)+C_{n+1}A_{n+1}(\alpha,\gamma)]. \qquad (2.15)$$

Доказательство общего случая теоремы приводится к вышеуказанному следующим результатом Мандельбройта ([1]).

Пусть $\{B_n\}$ — последовательность положительных чисел, функция следа которой есть $B(\sigma)$, а Λ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию (2.1), Тогда, если

$$\int^\infty B[\lambda(r)]\frac{dr}{r^2}<+\infty,$$

то существует такая функция $G(z)$, которая $\not\equiv 0$, голоморфная в полуплоскости $x>0$ и такова, что

$$G(\Lambda)=\{0\},$$

$$|G(\mu_n+iy)|\leqslant B_n,$$

$$\frac{1}{r}\log|G(re^{i\theta})|=\lambda(r)\cos\theta+0(1)\quad\text{в угле } |\theta|\leqslant\theta_0<\frac{\pi}{2}.$$

Аналогичным образом доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть $w=F(z)$ аналитична в полуплоскости $x\geqslant 0$, а $\Lambda_1=\{\gamma_\nu\}$, Λ_2, $\Lambda_3=\{\mu_\nu\}$ то же последовательности, что и в теореме* 1. *Тогда если удовлетворены условия* (1.4′), (1.6″) *и последовательность*

$$\{m_n^*=M_n\,[|a_{n+1}|^2+C_n^2A_n^2(\alpha,\gamma)+C_{n+1}^2A_{n+1}^2(\alpha,\gamma)]^{1/2}\},$$

где сохранены те же обозначения, что и в теореме 1, *является последовательностью единственности для области ограничения $D_0(\alpha,\gamma)$ функции $B_n(z,t,\alpha,\gamma)$, то $F(z)\equiv 0$.*

Теорема 4. *Пусть $w = F(z)$ аналитична в полуплоскости $x \geqslant 0$ и $\Lambda_1 = \{\gamma_\nu\}$, Λ_2, $\Lambda_3 = \{\mu_\nu\}$ те же последовательности, что и в теореме* 1. *При этом, если $F(z)$ удовлетворяет условиям* (1.4′), (1.6″), *то, если имеют место* (2.13), (2.14) *и* (2.15), *где только взято*

$$m_n^* = M_n \left[|a_{n+1}|^2 + C_n^2 A_n^2(\alpha, \gamma) + C_{n+1}^2 A_{n+1}^2(\alpha, \gamma)\right]^{1/2}.$$

Отличие в доказательстве этих и предыдущих теорем заключается только в том, что, получая представление (2.11), применяем неравенство Шварц-Буняковского, из чего получаем, что

$$|f(z)| \leqslant M_n \left(\int_0^\infty \frac{|R_{n+1}^*(t, z)|^2}{t^{2\mu_n - 1}} dt \right)^{1/2}$$

согласно равенству Парсеваля для преобразования Меллина

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{F(\mu_n + iy)}{(1 + \mu_n + iy)^p} \right|^2 dy = \int_0^\infty t^{2\mu_n - 1} \, |g(t)| dt.$$

После чего оценка интеграла

$$\int_0^\infty \frac{|R_{n+1}^*(t, z)|^2}{t^{2\mu_n - 1}} \, dt$$

приводится соответственно так же, как и в теоремах 1 и 2.

Замечание. При предположениях $\inf |\lambda - \lambda'| = c > 0$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda_i$ $(i = 1, 2)$ и (1.3) из нашего результата следует достаточное условие Маллявина, так как из (2.8) видно, что имеют место

$$|a_{n+1}| \sim n, \tag{2.16}$$

$$A_n(\alpha, \gamma) \sim e^{An}, \tag{2.17}$$

$$|C_n| \leqslant B_0, \; B_0 = \text{const}. \tag{2.18}$$

Соотношение (2.16) очевидно. (2.17) следует из леммы 3.2 гл. III работы [1], соотношение (2.18) следует из условия

$$\inf |\lambda - \lambda'| = c > 0, \; \lambda, \lambda' \in \Lambda_1.$$

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну за постановку задачи и помощь в работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Վ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ

Կիսահարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիաների համար միակության որոշ թեորեմներ

Ուսումնասիրվում են կիսահարթության մեջ անալիտիկ և մերոմորֆ ֆունկցիաների աճի խնդիրներ։

Ապացուցվում են միակության թեորեմներ ֆունկցիայի աճի զրոների թվային ֆունկցիայի և բևեռների բազմության վարքի տերմիններով։

Դիտարկվում է Մանդելբրոյտ-Վիների խնդրի մի ընդհանրացում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Мандельбройт*, Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей. Применения, Изд. ИЛ, М., 1955. [3] *Mandelbrojt* and *Wiener*, Sur les fonctions indefiniment derivables sur une demidroite. C. R. Acad. Sci. 225 (1947), 978. [3] *P. Malliavin*, Sur quelques procedes d'estrapolation, Acta Mathematica, 93, 175—255(1955). [4] *Г. В. Бадалян*, Применение преобразования типа свертки к теории обобщенной проблемы моментов Стилтьеса, ИАН СССР, сер. математика, 31, 491—530 (1967).