ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLV 1968 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. Г. Овсепян

# О порождающем множестве граничных точек и о полноте системы обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 27/IV 1968)

В настоящей заметке в ограниченной области $D$ с кусочно-гладкой границей Г рассматривается однородная задача Дирихле для уравнения колебания струны

$$L_\lambda(u) \equiv (1+\lambda)\, u_{xx} - (1-\lambda)\, u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

$$u/\Gamma = 0, \qquad (2)$$

где $\lambda$ действительный параметр с модулем меньшим единицы. Область $D$ предполагается такой, что характеристики уравнения (1) пересекают ее границу не более чем в двух точках.

Впервые, в 1949 году Р. А. Александряном [1] было введено следующее понятие обобщенного решения (обобщенной собственной функции) краевой задачи (1), (2):

Определение 1. *Суммируемая функция* $u_\lambda(x, y)$ *называется обобщенным решением задачи* (1), (2), *если она удовлетворяет интегральному соотношению*

$$\iint\limits_D u_\lambda(x, y)\, L_\lambda(\varphi)\, dxdy = 0$$

*для любой гладкой в* $\overline{D}$ *функции* $\varphi(x, y)$, *исчезающей на границе* Г.

Им же было установлено, что это определение эквивалентно тому, что $u_\lambda(x, y)$ представима в виде суммы двух суммируемых в $D$ функций

$$u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y),$$

где $f_\lambda(x, y)$ постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а $g_\lambda(x, y)$ почти на всех характеристиках второго семейства характеристик уравнения (1) и если на границе Г $u_\lambda(x, y)$ почти везде равна нулю.

В связи с этим представляется естественным следующее более широкое понятие обобщенного решения задачи (1), (2).

Определение 2. *Измеримая функция* $u_\lambda(x, y)$ *называется обобщенным решением задачи* (1), (2), *если она представима в виде суммы двух измеримых в* $D$ *функций*

$$u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y),$$

*где* $f_\lambda(x, y)$ *постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а* $g_\lambda(x, y)$ *почти на всех характеристиках второго семейства характеристик уравнения* (1) *и если на границе* $\Gamma$ $u_\lambda(x, y)$ *почти везде равна нулю.*

В случае выпуклых областей в работе ([2]) построено порождающее множество граничных точек для класса кусочно-непрерывных функций и доказано, что любая обобщенная собственная функция из этого класса представляет собой предел линейных комбинаций обобщенных собственных функций простой структуры, а именно, кусочно-постоянных собственных функций, принимающих лишь три значения.

В случае невыпуклых и многосвязных областей построение порождающего множества граничных точек для класса функций, имеющих односторонние предельные значения, а также доказательство полноты кусочно-постоянных собственных функций в множестве всех обобщенных собственных функций указанного класса даны в работах ([3, 4]).

Заметим, что аналогичное утверждение полноты системы кусочно-постоянных собственных функций в классе всех обобщенных собственных функций из $L_2(D)$ не имеет место. Можно построить области, для которых задача (1), (2) при некотором значении $\lambda$ имеет только тривиальное решение из класса кусочно-постоянных функций в то время, как она обладает нетривиальными решениями из $L_2(D)$ и, следовательно, к этим собственным функциям нельзя приблизиться несуществующими кусочно-постоянными собственными функциями. Вместе с тем оказывается, что если несколько расширить построенный Р. А. Александряном класс кусочно-постоянных собственных функций, сохранив при этом ту же простую структуру, допустив, однако, разрывы вдоль счетного числа характеристик, можно доказать, что получаемая таким образом система „счетно-постоянных" обобщенных собственных функций, принимающих лишь значения 0, $\pm 1$, полна в классе всех обобщенных решений задачи (1), (2) из $L_2(D)$.

В настоящей работе, в случае выпуклых областей, удается построить порождающее множество граничных точек для всего класса измеримых функций, которое дает возможность доказать указанную выше полноту.

При исследовании задачи (1), (2) второе определение обобщенного решения дает возможность привлечь к рассмотрению тесно связанные с этой задачей специальные автоморфизмы $S_\lambda^+$, $S_\lambda^-$ и $S_\lambda = S_\lambda^- S_\lambda^+$ границы $\Gamma$, введенные в работе ([1]).

Автоморфизм $S_\lambda^+$ (соответственно $S_\lambda^-$) переводит точку $\theta \in \Gamma$ в точку пересечения с границей $\Gamma$ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через $\theta$.

Множество точек $\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^k \theta$ называется циклом точки $\theta \in \Gamma$ относительно автоморфизма $S_\lambda$ ($S_\lambda^{-k}$ означает $k$-тую итерацию обратного отображения $S_\lambda^{-1}$).

Множество точек $M_\lambda(\theta) = \mathfrak{M}_\lambda(\theta) \cup \mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^+ \theta)$ называется циклом точки $\theta$ относительно автоморфизмов $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$.

Множество $E \subset \Gamma$ называется инвариантным относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$, если $S_\lambda^+ E = E$ и $S_\lambda^- E = E$.

Лемма 1. *Множество $M_\lambda(\theta)$, а также его замыкание $\overline{M_\lambda(\theta)}$ инвариантны относительно автоморфизмов $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ при любой $\theta \in \Gamma$.*

Точка $\theta \in \Gamma$ называется периодической точкой автоморфизма $S_\lambda$, или $\lambda$—периодической точкой, если множество $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ состоит из конечного числа точек. Число точек множества $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ называется периодом точки $\theta$.

Пусть $N$ множество всех „неэргодических“ значений $\lambda$, т. е. таких, для которых число вращения автоморфизма $S_\lambda$ рационально, а $CN$ его дополнение на интервале $(-1, 1)$.

В работе ([5]) доказано, что для любой выпуклой области $D$ с гладкой границей множество $CN$ имеет положительную меру и для почти всех $\lambda \in CN$ решение соответствующей задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

Лемма 2. *Если $\lambda \in N$, то для любой точки $\theta \in \Gamma$ множество $\overline{M_\lambda(\theta)}$ имеет меру нуль и содержит конечное число $\lambda$-периодических точек, причем все предельные точки этого множества $\lambda$-периодические.*

Заданная на $\Gamma$ измеримая функция $f(s)$ называется инвариантной относительно автоморфизмов $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$, если для почти всех $\theta \in \Gamma$

$$f(\theta) = f(S_\lambda^+ \theta) = f(S_\lambda^- \theta).$$

Лемма 3. *Для того, чтобы $\lambda$ было обобщенным собственным значением задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы существовало инвариантное относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$* множество $E \subset \Gamma$, *такое, что* $\operatorname{mes} \Gamma > \operatorname{mes} E > 0$, *или что тоже самое, необходимо и достаточно, чтобы существовала отличная от константы инвариантная относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ измеримая функция $f(s)$.*

Исследование обобщенных собственных функций задачи (1), (2) сводится к исследованию заданных на $\Gamma$ инвариантных относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ функций. Но инвариантная относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ функция не может быть произвольной на всей границе $\Gamma$, ее значения на каком-либо участке $\Gamma$ жестко определяют эту функцию на определенных участках границы. Поэтому возникает вопрос о выделении такого минимального множества граничных точек, значениями на котором полностью определяется инвариантная относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ функция. В этой связи Р. А. Александряном было введено понятие порождающего множества граничных точек и для выпуклых областей построено это множество для класса кусочно-непрерывных функций (2).

Измеримое множество $E \subset \Gamma$ называется множеством единственности для класса измеримых функций, если из того, что инвариантная относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ измеримая функция равна нулю почти всюду на $E$, следует, что она равна нулю почти всюду на $\Gamma$.

Измеримое множество $F \subset \Gamma$ называется множеством продолжимости для класса измеримых функций, если для любой измеримой функции $f^*$, заданной на $F$, существует определенная на $\Gamma$ инвариантная относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ измеримая функция $f(s)$, которая почти всюду на $F$ совпадает с $f^*$.

Измеримое множество $\gamma \subset \Gamma$ называется порождающим множеством для класса измеримых функций, если оно является как множеством единственности, так и множеством продолжимости для класса измеримых функций.

Лемма 4. *Для того, чтобы измеримое множество $E \subset \Gamma$ было множеством единственности для класса измеримых функций необходимо и достаточно, чтобы множество $M_\lambda(E)$ имело полную меру.*

Лемма 5. *Для того, чтобы измеримое множество $F \subset \Gamma$ было множеством продолжимости для класса измеримых функций необходимо и достаточно, чтобы для почти всех точек этого множества из $\theta_1 \neq \theta_2$ следовало $M_\lambda(\theta_1) \cap M_\lambda(\theta_2) = \varnothing$.*

Точка $p \in \Gamma$ называется $\lambda$-вершиной границы $\Gamma$, или области $D$, если хотя бы одна из двух характеристик, проходящих через эту точку, не имеет других пересечений с границей $\Gamma$. Очевидно выпуклая область может иметь не более чем четыре $\lambda$-вершины $P_\lambda^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Пусть $\lambda \in N$, тогда согласно лемме 1 замыкание множества

$$Q_\lambda = \bigcup_{i=1}^{4} M_\lambda(P_\lambda^i)$$

инвариантно относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$, а в силу леммы 2 оно имеет меру нуль. Поэтому дополнение множества $\overline{Q}_\lambda$ инвариантно относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$, имеет полную меру и состоит из не более чем счетного числа интервалов

$$C\,\overline{Q} = \bigcup_i \delta_i .$$

Концы этих интервалов принадлежат инвариантному относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ множеству $\overline{Q}_\lambda$, поэтому образ каждого интервала $\delta_i$ при отображении $S_\lambda^+$ ($S_\lambda^-$) совпадает с некоторым из этих интервалов, т. е. $C\bar{Q}_\lambda$ образует инвариантную относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ систему интервалов. Из сказанного следует, что если $\delta$ некоторый из этих интервалов, то возможны два случая:

1°. $S_\lambda^r \delta = \delta$, где $r$ период $\lambda$-периодических точек, тогда концы этого интервала $\lambda$-периодические точки. В этом случае $S_\lambda^r S_\lambda^+ \delta = S_\lambda^+ \delta$, т. е. $\delta$ и $S_\lambda^+ \delta$ периодические интервалы автоморфиза $S_\lambda$.

2°. При любом целом $n \neq 0$ $S_\lambda^n \delta \cap \delta = \varnothing$, следовательно, $S_\lambda^n S_\lambda^+ \delta \cap S_\lambda^+ \delta = \varnothing$, т. е. $\delta$ и $S_\lambda^+ \delta$ непериодические интервалы автоморфизма $S_\lambda$.

Пусть $G_\lambda^{(1)}$ множество всех периодических, а $G_\lambda^{(2)}$ множество всех непериодических интервалов из $C\bar{Q}_\lambda$. Очевидно эти множества не пересекаются между собой и инвариантны относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$.

По лемме 2 $\bar{Q}_\lambda$ содержит конечное число $\lambda$-периодических точек, поэтому $G_\lambda^{(1)}$ состоит из конечного числа интервалов. Пусть $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n_1)$ такие интервалы из $G_\lambda^{(1)}$, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_i) = G_\lambda^{(1)} \text{ и при } i \neq j \; M_\lambda(\alpha_i) \cap M_\lambda(\alpha_j) = \varnothing.$$

Существует конечное число интервалов $\beta_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n_2)$ из $G_\lambda^{(2)}$ такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_2} M_\lambda(\beta_i) \equiv G_\lambda^{(2)} \text{ и при } i \neq j \quad M_\lambda(\beta_i) \cap M_\lambda(\beta_j) = \varnothing.$$

Пусть $A_i$ множество всех $\lambda$-периодических точек на замыкании $\bar{\alpha}_i$ $\lambda$-периодического интервала $\alpha_i$. Известно, что все $\lambda$-периодические точки образуют замкнутое множество на $\Gamma$, так что множество $A_i$ замкнуто на отрезке $\bar{\alpha}_i$ и, следовательно, его дополнение на $\bar{\alpha}_\lambda$ состоит из не более чем счетного числа $\lambda$-периодических интервалов $\alpha_i^j$.

Пусть $\theta_i^j$ произвольная точка в интервале $\alpha_i^j$. Тогда точка $S_\lambda^r \theta_i^j$ принадлежит интервалу $\alpha_i^j$ и не совпадает с $\theta_i^j$. Пусть $[\theta_i^j, S_\lambda^r \theta_i^j)$ тот из двух полуинтервалов, образованных точками $\theta_i^j$ и $S_\lambda^r \theta_i^j$, который принадлежит интервалу $\alpha_i^j$.

Образуем множество

$$\gamma_\lambda = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n_1} A_i \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n_1} \bigcup_j \; [\theta_i^j, S_\lambda^r \theta_i^j) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{n_2} \beta_i \right\}.$$

Теорема 1. *$\gamma_\lambda$ является порождающим множеством для класса измеримых функций.*

Следствие 1. *Каждое „неэргодическое" значение $\lambda$ является обобщенным собственным значением задачи* (1), (2).

В самом деле, пусть $\lambda \notin N$, тогда легко убедиться, что построенное порождающее множество содержит хотя бы один интервал $(a, b)$. Пусть $\theta$ некоторая точка из этого интервала. Рассмотрим множество

$M_\lambda[(a, \theta)]$. Это множество инвариантно относительно $S_\lambda^+$ и $S_\lambda^-$ (см. лемму 1), имеет положительную меру строго меньшую, чем mes Γ, поскольку оно не может иметь точек из $(\theta, b)$, и стало быть в силу леммы 3 $\lambda$ является обобщенным собственным значением задачи (1), (2).

Пусть $\Phi_\lambda$ линейная система измеримых функций, заданных на порождающем множестве $\gamma_\lambda$, факторизованная по подгруппе констант, а $H_\lambda$ линейная система всех обобщенных собственных функций задачи (1), (2), соответствующих собственному значению $\lambda$.

Следствие 2. *Линейные системы $H_\lambda$ и $\Phi_\lambda$ изоморфны.*

Следствие 3. *Каждое „неэргодическое“ значение является бесконечнократным собственным значением задачи* (1), (2).

В самом деле, поскольку порождающее множество $\gamma_\lambda$ всегда содержит целый интервал, то размерность линейной системы $\Phi_\lambda$ бесконечна и, в силу следствия 2, обобщенному собственному значению $\lambda \in N$ соответствует бесчисленное множество линейно независимых обобщенных собственных функций задачи (1), (2).

Следует отметить, что в работе ([6]) доказано, что для любой выпуклой области $D$ множество „неэргодических“ значений всюду плотно в $[-1, 1]$, а в работе ([5]) установлено, что это множество состоит из счетного числа компонент, каждая из которых является либо точкой, либо отрезком.

Построение порождающего множества граничных точек для класса измеримых функций дает возможность путем аппроксимации на этом множестве доказать следующую основную теорему.

Теорема 2. *„Счетно-постоянные“ собственные функции, отвечающие „неэргодическому“ значению $\lambda$ полны в метрике $L_2(D)$ в классе всех обобщенных решений из $L_2(D)$ задачи* (1), (2) *при том же значении $\lambda$.*

Институт математики и механики
Академи наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

### Լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմության և ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին

*Աշխատության մեջ ուռուցիկ տիրույթներում դիտարկվում է լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի համասեռ (1), (2) խնդիրը։ λ պարամետրի ոչ էրգոդիկ արժեքների համար կառուցվում է այդ խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմությունը։ Այդ բազմության կառուցումը հնարավորություն է տալիս ապացուցել հետևյալ հիմնական թեորեմը։*

Թեորեմ — $\lambda$ ոչ էրգոդիկ արժեքին համապատասխանող պարզագույն սեփական ֆունկցիաների դասը (սեփական ֆունկցիաներ, որոնք ընդունում են միայն 0, $\pm$ 1 արժեքներ) լրիվ է $L_2(D)$-ին պատկանող այդ նույն արժեքի դեպքում (1), (2) խնդրի բոլոր լուծումների դասում։

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, Диссертация, МГУ, 1949. [2] *Р. А. Александрян*, Докторская диссертация, МГУ, 1962. [3] *С. Г. Овсепян*, ДАН АрмССР, т. 39, № 4 (1964). [4] *С. Г. Овсепян*, Диссертация, ЕГУ, 1965. [5] *С. Г. Овсепян*, „Известия АН АрмССР“, математика, т. 2, № 3 (1967). [6] *Р. А. Александрян*, Труды Моск. математ. о-ва, 9, 1960.